Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(11), 5001-5008
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311482

一类 2-树的双变量匹配多项式

韩 军

绍兴文理学院数理信息学院，浙江 绍兴

收稿日期：2024 年 10 月 25 日；录用日期：2024 年 11 月 18 日；发布日期：2024 年 11 月 27 日

摘 要

图的单变量匹配多项式是图的匹配生成函数的等价形式之一，$Farrell$ 引入的图的双变量匹配多项式是图的单变量匹配多项式的推广。本文研究了一类 2-树的双变量匹配多项式，利用匹配矩阵行列式的一种特殊展开形式得到该类 2-树的双变量匹配多项式的显示表达式，进一步, 获得了相应的 $Hosoya$ 指数。

关键词

2-树，匹配多项式，匹配矩阵，$Hosoya$ 指数

The Bivariate Matching Polynomial of a Class of 2-Tree

Jun Han

School of Mathematics Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Oct. 25^{th}, 2024; accepted: Nov. 18^{th}, 2024; published: Nov. 27^{th}, 2024

Abstract

The univariate matching polynomial of a graph is one of the equivalent forms of the

文章引用: 韩军. 一类 2-树的双变量匹配多项式 [J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 5001-5008.
DOI: 10.12677/aam.2024.1311482

graph matching generating function. The bivariate matching polynomial of a graph introduced by *Farrell* is a generalization of the univariate matching polynomial of a graph. This paper studies the bivariate matching polynomial of a class of 2-trees. By using a special expansion form of the determinant of the matching matrix, the explicit expression of the bivariate matching polynomial of this class of 2-trees is obtained. Further, the corresponding *Hosoya* index is obtained.

Keywords

2-Tree, Matching Polynomial, Matching Matrix, *Hosoya* Index

1. 引言

设图 $G=(V,E)$, 其中 V 是顶点集且 $|V|=p$, E 是边集, 当 $S\subseteq V$ 时, 则 $G-S$ 表示从 G 中删去 S 中的所有顶点及其关联边得到的图. 特别地, $S=\{v\}$ 时, $G-S$ 简记为 $G-v$, $m(G)$ 为图 G 的双变量匹配多项式, 其定义为

$$m(G;\omega_1,\omega_2)=\sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]}a_k(G)\omega_1^{p-2k}\omega_2^k,$$

其中 $a_k(G)$ 是图 G 中含有 k 条边的匹配数, ω_1,ω_2 分别是图 G 的顶点权重与边权重. 得出匹配多项式的定义之后, *Farrell* 注意到, 假如一个匹配包含一条边, 那么这个匹配就不包含所有和它相邻的那些边, 因此, 通过选定一条特定的边, 他把图的所有匹配的集合分为两类: 一类包含一条给定的边 e, 另一类不包含边 e . 通过这样的一个划分, *Farrell* 便得到了匹配多项式的一个递归公式, 记作:

$$m(G;\omega_1,\omega_2)=m(G_1;\omega_1,\omega_2)+\omega_2 m(G_2;\omega_1,\omega_2)$$

其中 G_1 表示删去图 G 的一条边 e 后得到的图, G_2 表示删去边 e 两个顶点后得到的图. 这个递归公式的意义在于通过重复应用这个定理, 可以计算一个图的匹配多项式. 对于完全图 K_2, K_3, K_4 以及空图 $\bar{K}_p$, 它们的双变量匹配多项式为 [1]

$$\begin{aligned} m(K_2;\omega_1,\omega_2) &= \omega_1^2+\omega_2; \\ m(K_3;\omega_1,\omega_2) &= \omega_1^3+3\omega_1\omega_2; \\ m(K_4;\omega_1,\omega_2) &= \omega_1^4+4\omega_1^2\omega_2+2\omega_2^2; \\ m(\bar{K_p};\omega_1,\omega_2) &= \omega_1^p. \end{aligned}$$

特别地, 当 $\omega_2=-1$ 时, 得到单变量匹配多项式 ($Heilmann$ 和 $Lieb$ [2]) 的定义

$$m(G;\omega_1,-1)=\sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]}a_k(G)(-1)^k\omega_1^{p-2k}.$$

目前, 许多特殊图类的单变量匹配多项式已经有确定的表达式. 例如, n 个顶点的路图 P_n 和 n 个顶点的星图 S_n 的匹配多项式有以下结果:

$$m(P_n;\omega_1)=\frac{(\omega_1-\sqrt{\omega_1^2-4})^{n+1}-(\omega_1+\sqrt{\omega_1^2-4})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\omega_1^2-4}};$$

$$m(S_n;\omega_1)=\omega_1^{n-2}(\omega_1^2-n+1).$$

1971 年, $Hosoya$ [3] 提出了图 G 的 $Hosoya$ 指数概念, 其定义为

$$Z(G)=\sum_{k\geq 0}a_k(G),$$

其中 $a_k(G)$ 表示图 G 中含有 $k(k\geq 0)$ 条边的匹配数. 2-树是树概念的推广, $Harary$ [4] 首先用单形与复形的概念定义了 2-树, 1986 年,$Arnborg$ [5] 给出了更一般的 k-树的递归定义. 因此通过 k-树的递归定义, 也可得到 2-树的递归定义: 由 2 个顶点连接的一条边是最小的 2-树. 如果 G 是一个 2-树, 那么添加一个新顶点连接 G 中某条边的两个端点得到的图也是一棵 2-树. 本文将研究一类 2-树的双变量匹配多项式, 并根据其结构特征, 利用图匹配矩阵行列式的一种特殊展开形式与图匹配矩阵 $d-$ 函数进行比对, 找出差异及其规律, 进而求得其双变量匹配多项式的显性表达式, 进而得到其 $Hosoya$ 指数.

2. 相关定义与引理

定义 2.1. *([1]) 设 $G=(V,E)$, 且 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$. 若 v_i,$v_j\in V$, 则图 G 的匹配矩阵定义为 $M(G)=(m_{ij})_{n\times n}$, 其中*

$$m_{ij}(G)=\begin{cases} \sqrt{\omega_2} & \text{顶点 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 邻接且} i<j, \\ -\sqrt{\omega_2} & \text{顶点 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 邻接且} i>j, \\ 0 & \text{顶点 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不邻接}, \\ \omega_1 & i=j. \end{cases}$$

定义 2.2. *([1]) 设 $G=(V,E)$, 且 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$. 若 v_i,$v_j \in V$, 则图 G 的匹配矩阵 $M(G)$ 的 $d-$ 函数 $d(M(G))$ 定义如下:*

(i) 当 $n=0$ 时, $d(M(G))=1$;

(ii) 当 $0<n\leq 3$ 时, $d(M(G))=det(M(G))$;

(iii) 当 $n>3$ 时, $d(M(G))=\omega_1 d(M(G-v_i))+\omega_2 \sum_{v_iv_j\in E} d(M(G-v_i-v_j))$.

引理 2.1. *([1, 6]) 设 $G=(V,E)$ 且 $v_i,v_j\in V$, 则*

(i) $d(M(G))=m(G;\omega_1,\omega_2)$;

(ii) $m(G;\omega_1,\omega_2)=\omega_1 m(G-v_i)+\omega_2 \sum_{v_iv_j\in E} m(G-v_i-v_j)$.

引理 2.2. *([7]) 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一个 $n\times n$ 矩阵, A_{ij} 与 $A_{ir,sj}$ 为 A 的对应余子式, 则*

$$|A|=(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{v_1+v_2}a_{is}a_{rj}A_{ir,sj},$$

其中 v_1 为 i 与 r, s 与 j 的逆序数和 $v_2=i+s+r+j$.

引理 2.3. *([8]) 设矩阵 M_1, M_2, M_3 和 M_4 的阶数分别为 $p\times p$, $p\times q$, $q\times p$ 和 $q\times q$. 若 M_1 和 M_4 是可逆的, 则*

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}M_1 & M_2\\ M_3 & M_4\end{pmatrix} &= \det(M_4)\times\det(M_1-M_2M_4^{-1}M_3)\\ &= \det(M_1)\times\det(M_4-M_3M_1^{-1}M_2),\end{aligned}$$

其中 $M_1-M_2M_4^{-1}M_3$ 是 M_4 的 Schur 补, $M_4-M_3M_1^{-1}M_2$ 是 M_1 的 Schur 补.

3. 主要结论

本文讨论的 2-树图序列 $\{B_n\}_{n\geq 0}$ 如图图 1所示:

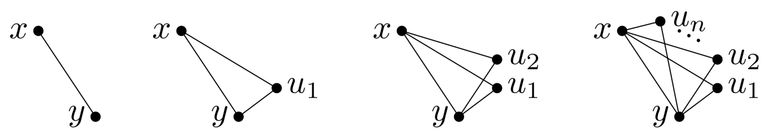

Figure 1. B_n $(n=0,1,2,\ldots)$

图 1. B_n $(n=0,1,2,\ldots)$

不难看出 $B_0=K_2$（$V(B_0)=\{x,y\}$), B_n $(n\geq 1)$ 表示在 K_2 的基础上添加了 n 个 2 度顶点 $u_1,u_2,\ldots,u_n$ 且它们与 K_2 的两个顶点 $\{x,y\}$ 都相邻, 即 $V(B_n)=\{x,y,u_1,u_2,\ldots,u_n\}$,

$E(B_n) = \{xu_k | k = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{yu_k | k = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{xy\}$.

定理 3.1. B_n 的双变量匹配多项式为

$$m(B_n; \omega_1, \omega_2) = \omega_1^{n+2} + (2n+1)\omega_1^n\omega_2 + (n^2 - n)\omega_1^{n-2}\omega_2^2 \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Proof. 根据图匹配矩阵的定义, 有

$$M(B_0) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} \omega_1 & \sqrt{\omega_2} \\ -\sqrt{\omega_2} & \omega_1 \end{pmatrix} \end{array}, M(B_1) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u_1 & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} \omega_1 & \sqrt{\omega_2} & \sqrt{\omega_2} \\ -\sqrt{\omega_2} & \omega_1 & \sqrt{\omega_2} \\ -\sqrt{\omega_2} & -\sqrt{\omega_2} & \omega_1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$M(B_2) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} u_2 & u_1 & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} u_2 \\ u_1 \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \sqrt{\omega_2} & \sqrt{\omega_2} \\ 0 & \omega_1 & \sqrt{\omega_2} & \sqrt{\omega_2} \\ -\sqrt{\omega_2} & -\sqrt{\omega_2} & \omega_1 & \sqrt{\omega_2} \\ -\sqrt{\omega_2} & -\sqrt{\omega_2} & -\sqrt{\omega_2} & \omega_1 \end{pmatrix} \end{array},$$

对匹配矩阵 $M(B_n)$ 作适当分块得

$$M(B_n) = \left(\begin{array}{c:c} D & U \\ \hdashline V & W \end{array}\right),$$

其中, $D = \omega_1 \mathbf{I}_n$, $U = \sqrt{\omega_2}\mathbf{J}_{n\times 2}$, $V = -\sqrt{\omega_2}\mathbf{J}_{2\times n}$, $W = \begin{pmatrix} \omega_1 & \sqrt{\omega_2} \\ -\sqrt{\omega_2} & \omega_1 \end{pmatrix}$.

利用引理2.2, 对上述匹配矩阵按元素 m_{11} 进行展开得

$$\begin{aligned}
\det(M(B_2)) &= m_{11}M_{11} - m_{13}m_{31}M_{13,31} - m_{14}m_{41}M_{14,41} + m_{13}m_{41}M_{14,31} \\
&+ m_{14}m_{31}M_{13,41} \\
&= \omega_1 \det(M(B_1)) + 2\omega_2 \det(M(K_{1,1})) + \Delta(u_2), \\
\det(M(B_3)) &= m_{11}M_{11} - m_{14}m_{41}M_{14,41} - m_{15}m_{51}M_{15,51} + m_{14}m_{51}M_{15,41} \\
&+ m_{15}m_{41}M_{14,51} \\
&= \omega_1 \det(M(B_2)) + 2\omega_2 \det(M(K_{1,2})) + \Delta(u_3), \\
&\vdots \\
\det(M(B_n)) &= m_{11}M_{11} - m_{1(n+1)}m_{(n+1)1}M_{1(n+1),(n+1)1} - m_{1(n+2)}m_{(n+2)1}M_{1(n+2),(n+2)1} \\
&+ m_{1(n+1)}m_{(n+2)1}M_{1(n+2),(n+1)1} + m_{1(n+2)}m_{(n+1)1}M_{1(n+1),(n+2)1} \\
&= \omega_1 \det(M(B_{n-1})) + 2\omega_2 \det(M(K_{1,n-1})) + \Delta(u_n),
\end{aligned}$$

其中

$$\Delta(u_n) = m_{1(n+1)}m_{(n+2)1}M_{1(n+2),(n+1)1} + m_{1(n+2)}m_{(n+1)1}M_{1(n+1),(n+2)1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

经过计算, 得

$$\Delta(u_n) = -\omega_2[(\det(\mathscr{A})) + (\det(\mathscr{B}))],$$

其中

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \omega_1 \mathbf{I}_{n-1} & \sqrt{\omega_2}\mathbf{1}_{n-1} \\ -\sqrt{\omega_2}\mathbf{1}_{n-1}^T & \sqrt{\omega_2} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} \omega_1 \mathbf{I}_{n-1} & \sqrt{\omega_2}\mathbf{1}_{n-1} \\ -\sqrt{\omega_2}\mathbf{1}_{n-1}^T & -\sqrt{\omega_2} \end{pmatrix}.$$

由引理2.3的 *Schur* 补公式, 有

$$\det(\mathscr{A}) = \omega_1^{n-1}\sqrt{\omega_2} + (n-1)\omega_1^{n-2}\omega_2,$$

$$\det(\mathscr{B}) = -\omega_1^{n-1}\sqrt{\omega_2} + (n-1)\omega_1^{n-2}\omega_2.$$

因此,

$$\Delta(u_n) = (2-2n)\omega_1^{n-2}\omega_2^2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

根据匹配矩阵的 $d-$ 函数定义, 有

$$\begin{aligned}
d(M(B_0)) &= \det(M(B_0)), \\
d(M(B_1)) &= \det(M(B_1)), \\
d(M(B_2)) &= \omega_1 d(M(B_1)) + 2\omega_2 d(K_{1,1}), \\
d(M(B_3)) &= \omega_1 d(M(B_2)) + 2\omega_2 d(K_{1,2}), \\
&\vdots \\
d(M(B_n)) &= \omega_1 d(M(B_{n-1})) + 2\omega_2 d(K_{1,(n-1)}).
\end{aligned}$$

由于 $\det(M(K_{1,n})) = d(M(K_{1,n})) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$, 有

$$\begin{aligned}
\det(M(B_0)) - d(M(B_0)) &= \det(M(B_1)) - d(M(B_1)) = 0, \\
\det(M(B_2)) - d(M(B_2)) &= \omega_1[\det(M(B_1)) - d(M(B_1))] + \Delta(u_2) \\
&= \Delta(u_2), \\
\det(M(B_3)) - d(M(B_3)) &= \omega_1[\det(M(B_2)) - d(M(B_2))] + \Delta(u_3) \\
&= \omega_1\Delta(u_2) + \Delta(u_3), \\
&\vdots \\
\det(M(B_n)) - d(M(B_n)) &= \omega_1[\det(M(B_{n-1})) - d(M(B_{n-1}))] + \Delta(u_n) \\
&= \omega_1^{n-2}\Delta(u_2) + \omega_1^{n-3}\Delta(u_3) + \omega_1^{n-4}\Delta(u_4) + \ldots + \omega_1\Delta(u_{n-1}) + \Delta(u_n).
\end{aligned}$$

由于 $\Delta(u_n) = (2-2n)\omega_1^{n-2}\omega_2^2 \quad (n = 1, 2, \ldots)$, 故

$$\det(M(B_n)) - d(M(B_n)) = (n - n^2)\omega_1^{n-2}\omega_2^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

易知矩阵 A 为非奇异的, 由 $Schur$ 补公式, 有

$$\det(M(B_n)) = \omega_1^{n+2} + (2n+1)\omega_1^n\omega_2,$$

因此, 根据引理2.1, 得

$$\begin{aligned} m(B_n; \omega_1, \omega_2) = d(M(B_n)) &= \det(M(B_n)) - (n - n^2)\omega_1^{n-2}\omega_2^2 \\ &= \omega_1^{n+2} + (2n+1)\omega_1^n\omega_2 + (n^2 - n)\omega_1^{n-2}\omega_2^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

□

推论 3.1. B_n 的单变量匹配多项式为

$$m(B_n; \omega_1, -1) = \omega_1^{n+2} - (2n+1)\omega_1^n + (n^2 - n)\omega_1^{n-2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

推论 3.2. B_n 的 $Hosoya$ 指数为

$$Z(B_n) = n^2 + n + 2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Proof. 根据 $Hosoya$ 指数的定义, 当 $\omega_1 = \omega_2 = 1$, 则 $m(G; 1, 1) = Z(G)$. 因此,

$$m(B_n; 1, 1) = 1 + (2n+1) + (n^2 - n) = n^2 + n + 2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

n	$det(M(B_n))$	$m(B_n; \omega_1, \omega_2)$	$Z(B_n)$	$\Delta(u_n)$
0	$\omega_1^2 + \omega_2$	$\omega_1^2 + \omega_2$	2	0
1	$\omega_1^3 + 3\omega_1\omega_2$	$\omega_1^3 + 3\omega_1\omega_2$	4	0
2	$\omega_1^4 + 5\omega_1^2\omega_2$	$\omega_1^4 + 5\omega_1^2\omega_2 + 2\omega_2^2$	8	$-2\omega_2^2$
3	$\omega_1^5 + 7\omega_1^3\omega_2$	$\omega_1^5 + 7\omega_1^3\omega_2 + 6\omega_1\omega_2^2$	14	$-4\omega_1\omega_2^2$
4	$\omega_1^6 + 9\omega_1^4\omega_2$	$\omega_1^6 + 9\omega_1^4\omega_2 + 12\omega_1^2\omega_2^2$	22	$-6\omega_1^2\omega_2^2$

4. 小结

本文研究了一类 2-树的双变量匹配多项式, 利用行列式的一种特殊展开式对该类 2-树的匹配矩阵对应的行列式进行展开, 通过与该图匹配矩阵的 $d-$ 函数进行比对, 再计算两者之差发现规律进而求得了其双变量匹配多项式的显性表达式, 进一步获得了该类 2-树的 $Hosoya$ 指数. 这种方法可能可以推广到其他 2-树, 特殊单圈图, 特殊双圈图等图的双变量匹配多项式的计算问题上, 对于顶

点数众多且图匹配矩阵对应的行列式不易计算的图, 因此该方法存在一定的局限性.

致 谢

本文受浙江省自然科学基金一般项目 (Y21A010028) 和浙江省 “十四五” 研究生教育改革项目资助.

参考文献

[1] Farrell, E.J. and Wahid, S.A. (1986) Matching Polynomials: A Matrix Approach and Its Applications. *Journal of the Franklin Institute*, **322**, 13-21. https://doi.org/10.1016/0016-0032(86)90072-4

[2] Heilmann, O.J. and Lieb, E.H. (1972) Theory of Monomer-Dimer Systems. *Communications in Mathematical Physics*, **25**, 190-232.

[3] Hosoya, H. (1971) Topological Index. A Newly Proposed Quantity Characterizing the Topological Nature of Structural Isomers of Saturated Hydrocarbons. *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, **44**, 2332-2339. https://doi.org/10.1246/bcsj.44.2332

[4] Harary, F. and Palmer, E.M. (1968) On acyclic simplicial complexes. *Mathematika*, **15**, 115-122. https://doi.org/10.1112/s002557930000245x

[5] Arnborg, S. and Proskurowski, A. (1986) Characterization and Recognition of Partial 3-Trees. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **7**, 305-314. https://doi.org/10.1137/0607033

[6] Farrell, E.J. (1979) An Introduction to Matching Polynomials. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **27**, 75-86. https://doi.org/10.1016/0095-8956(79)90070-4

[7] Vein, R. and Dale, P. (2006) Determinants and Their Applications in Mathematical Physics. Springer.

[8] Zhang, F.Z. (2006) The Schur Complement and Its Applications. Springer.