

基于斜率限制器下求解 二维时间分数阶 Burgers 方程的 多重网格法

李林娜

长沙理工大学, 数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2024 年 11 月 24 日; 录用日期: 2024 年 12 月 18 日; 发布日期: 2024 年 12 月 25 日

摘 要

本文研究求解二维时间分数阶 Burgers 方程的多重网格法: 在离散过程中, 我们采用 L_1 差分格式离散时间分数阶导数, 对流项运用 Lax-Friedrichs 通量近似计算。实验结果表明该方法可以很好地模拟间断。

关键词

二维时间分数阶 Burgers 方程, 多重网格法

A Multi-Grid Method for Solving Two-Dimensional Temporal Fractional Burgers Equations Based on Slope Limiter

Linna Li

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha
Hunan

Received: Nov. 24th, 2024; accepted: Dec. 18th, 2024; published: Dec. 25th, 2024

Abstract

In this paper, we study the multi-grid method for solving the two-dimensional fractional Burgers equation in time: In the discretization process, we use the discretized fractional derivative of time in the L_1 difference format, and the Lax-Friedrichs flux approximation is used for the convection term. Experimental results show that the proposed method can simulate discontinuities well.

Keywords

Two-Dimensional Time Fractional Burgers Equations, Multigrid Method

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言

本文研究下述二维时间分数阶 Burgers 方程

$$\frac{\partial^\alpha u(x, y, t)}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial f(u)}{\partial y} = 0. \quad x, y \in \Omega = (a, b) \times (c, d), t \in (0, T] \quad (1.1)$$

该方程满足初始条件

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \quad x, y \in \Omega, \quad (1.2)$$

以及合适的边界条件, 其中 $0 < \alpha < 1$, 这里 f, φ 是给定函数, $\frac{\partial^\alpha u(x, y, t)}{\partial t^\alpha}$ 是关于时间 t 的 Caputo 分数阶导数, Γ 是 gamma 函数:

$$\frac{\partial^\alpha u(\cdot, \tau)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(\cdot, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.3)$$

Burgers 方程最早是伯格用来作为一维湍流的模型方程, 后来 Lagerstrom 等人和 Cheng 又用它来作为弱激波的一维气体运动的模型方程加以研究 [1]。近些年来, 对于时间分数阶 Burgers 方程的求解, 已经发展了一些很有用的方法, 如: 二次 b 样条 Galerkin 方法 [2]、有限元方法 [3]、

有限差分法 [4]、有限体积法 [5]，有限积分法结合移位 Chebyshev 多项式等 [6]。2023 年对二维时间分数阶 Burgers 方程使用连续 Galerkin 方法 [7]。2024 年，对 Burgers 方程已有作者引入斜率限制器以确保高阶数值格式的非线性稳定性，同时保证格式的高精度 [8]。

本文剩余部分组织如下：在第 2 节，为二维时间分数阶 Burgers 方程设计数值解法；在第 3 节，通过数值案例验证数值解法的有效性；在第 4 节，给出结论。

2. 数值离散格式

设 N_t 、 N_x 和 N_y 为给定的正整数；定义时间网格节点以及时间步长 $t_n = n\tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N_t$)，其中 $\tau = T/N_t$ ；定义空间网格节点 $x_i = a + ih_x$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N_x$)、 $y_j = c + jh_y$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N_y$)，空间步长 $h_x = (b-a)/N_x$ 、 $h_y = (d-c)/N_y$ 。记 $u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n)$ 。为了便于表述，我们用 $U \in R^{N+1} \times R^{N+1}$ 来表示 Ω 上的网格函数，其中 $U_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, N_x$, $j = 0, 1, \dots, N_y$) 被看作是在节点 (x_i, y_j) 处的函数值。定义空间半节点 $x_{i+\frac{1}{2}} = a + (i + \frac{1}{2})h_x$ ($i = -1, 0, \dots, N_x$) $y_{j+\frac{1}{2}} = c + (j + \frac{1}{2})h_y$ ($j = -1, 0, \dots, N_y$)，我们有 $N+1$ 个区间 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ $i = 0, 1, \dots, N_x, j = 0, 1, \dots, N_y$ 。对于函数 F ，我们采用如下简写：

$$F_{i+\frac{1}{2},j,n} = F\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_n\right), F_{i+\frac{1}{2},j} = F\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j\right). \quad (2.1)$$

在(1.1)中取 $t = t_n$ ($n = 1, 2, \dots, N_t$)，并将所得方程积分到控制体积 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ 上得到

$$h_x h_y \frac{\partial^\alpha \bar{u}_{i,j}(t_n)}{\partial t^\alpha} + h_y \left(f(u)_{i+\frac{1}{2},j,n} - f(u)_{i-\frac{1}{2},j,n} \right) + h_x \left(f(u)_{i,j+\frac{1}{2},n} - f(u)_{i,j-\frac{1}{2},n} \right) = 0. \quad (2.2)$$

这里 $\bar{u}_{i,j}(t_n) = \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, y, t) dx dy / h_x h_y$ 表示 $u(x, y, t)$ 在区间 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ 上的平均值。

时间分数阶导数项可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u(x_i, y_j, t_n)}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - \tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x_i, y_j, \tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - \tau)^{-\alpha} \frac{u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k-1})}{\tau} d\tau \\ &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^n ((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}) (u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k-1})) \\ &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(u_{i,j}^n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1} - a_{n-k}) u_{i,j}^k - a_{n-1} u_{i,j}^0 \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中

$$a_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

在方程 (2.2) 中通量可以被近似为

$$f(u)_{i+1/2,j,n} \approx F\left(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,-}, U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,+}\right), \quad (2.5)$$

$$f(u)_{i-1/2,j,n} \approx F\left(U_{i-\frac{1}{2},j}^{n,-}, U_{i-\frac{1}{2},j}^{n,+}\right), \quad (2.6)$$

$$f(u)_{i,j+1/2,n} \approx F\left(U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,-}, U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,+}\right), \quad (2.7)$$

$$f(u)_{i,j-1/2,n} \approx F\left(U_{i,j-\frac{1}{2}}^{n,-}, U_{i,j-\frac{1}{2}}^{n,+}\right), \quad (2.8)$$

以式子 (2.5) 为例, $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,-}, U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,+}$ 分别表示 $u(x, y_j, t_n)$ 在点 $x_{i+1/2}$ 处左右极限的近似值。数值通量

$$F\left(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,-}, U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,+}\right) = \frac{f\left(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,-}\right) + f\left(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,+}\right)}{2} - \frac{\gamma_{i+\frac{1}{2}}^n}{2} \left(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,+} - U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,-}\right) \quad (2.9)$$

是 Lax-Friedrichs 通量。如果 $\gamma_{i+\frac{1}{2}}^n$ 取为 $\gamma^n = \kappa \max_{w \in D} |f'(w)|$ (D 是包含 $U_{i,j}^n, i = 0, 1, \dots, N_x$ 的最小闭区间), 则 Lax-Friedrichs 通量称为全局通量。这里 $\kappa \geq 1$ 是某个常数。

本文将 $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,-}$ 和 $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,+}$ 作为以下斜率校正值

$$U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,-} = U_{i,j}^n + \frac{\delta U_{i,j}^n}{2}, \quad U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,+} = U_{i+1,j}^n - \frac{\delta U_{i+1,j}^n}{2},$$

这里 δ 表示空间网格上的网格函数 U^n 的非线性差分算子, 定义为 $\delta U_{i,j}^n = \psi(U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n, U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n)$ ($\delta U_{i,j}^n/h$ 是控制体积上网格函数 U^n 的有限斜率 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$), 函数 ψ 称为斜率限制器。合并 (2.2)、(2.3) 和 (2.9), 我们得到离散格式

$$\begin{aligned} & \frac{h_x h_y \tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(U_{i,j}^n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1} - a_{n-k}) U_{i,j}^k - a_{n-1} U_{i,j}^0 \right) \\ & + h_y \left(F\left(U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,-}, U_{i+\frac{1}{2},j}^{n,+}\right) - F\left(U_{i-\frac{1}{2},j}^{n,-}, U_{i-\frac{1}{2},j}^{n,+}\right) \right) \\ & + h_x \left(F\left(U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,-}, U_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,+}\right) - F\left(U_{i,j-\frac{1}{2}}^{n,-}, U_{i,j-\frac{1}{2}}^{n,+}\right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$i = 0, 1, \dots, N_x; j = 0, 1, \dots, N_y; n = 1, 2, \dots, N_t$ 具有离散初始条件

$$U_{i,j}^0 = \varphi(x_i, y_j).$$

3. 多重网格法

假设三个正整数 N, N_0, level 满足下式:

$$N = N_0 \times 2^{\text{level} - 1}$$

构建一个空间网格体系 $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{\text{level}}$, 假设最细网格 Γ_1 的网格大小为 $h_{x_1} = h_x, h_{y_1} = h_y$ 对于 $k = 2, 3, \dots, \text{level}$, Γ_k 的网格大小为 $h_{x_k} = 2^{k-1}h_x, h_{y_k} = 2^{k-1}h_y$, 其中 $N_{x_k} = N_x/2^{k-1}, N_{y_k} = N_y/2^{k-1}$ 表示 Γ_k 的网格数量, 下文中与 Γ_k 有关的量以上标 h_k 的形式书写, 如 U^{h_k} 。

在每一层网格上, 对问题采用如下不动点迭代方法求解:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h_{x_k} h_{y_k} \Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \lambda^{h_k} h_k \right) \hat{V}_{i,j}^{h_k} = r_{i,j}^{h_k} + \lambda^{h_k} h_k V_{i,j}^{h_k} \\ & - h_{y_k} (F(V_{i+2,j}^{h_k-}, V_{i+2,j}^{h_k+}) - F(V_{i-\frac{1}{2},j}^{h_k-}, V_{i-\frac{1}{2},j}^{h_k+})) \\ & - h_{x_k} (F(V_{i,j-\frac{1}{2}}^{h_k-}, V_{i,j+\frac{1}{2}}^{h_k+}) - F(V_{i,j-\frac{1}{2}}^{h_k-}, V_{i,j+\frac{1}{2}}^{h_k+})) \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $r_i^{h_k} = \frac{h_k \Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1} - a_{n-k}) V_i^k + a_{n-1} V_i^0 \right)$, $\hat{V}^{h_k}$ 和 V^{h_k} 分别为一次迭代过程中的新近似解和旧近似解, λ^{h_k} 为一个能够保证迭代方法收敛性的合适的正数。

下面给出二维空间中的插值和限制矩阵。

在二维空间中, 粗网格到细网格的插值是通过双线性插值得到。双线性插值可以通过 x, y 两个方向上分别进行线性插值得到。

水平方向的插值:

$$\begin{aligned} u_{2i,2j} &= v_{i,j} \\ u_{2i,2j+1} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{i,j+1}) \end{aligned}$$

竖直方向的插值:

$$\begin{aligned} u_{2i+1,2j} &= (v_{i,j} + v_{i+1,j}) / 2 \\ u_{2i+1,2j+1} &= (v_{i,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1}) / 4 \end{aligned}$$

反过来, 从细网格到粗网格的算子 $R2D = \frac{1}{4} I2D^T$ ($1/4$ 的常数使得 $1 \rightarrow 1$)。这个矩阵的稀疏由 $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ 组成, 每一个粗网格点都是对于细网格的 9 点加权平均, 见图 1

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{1}{4} u_{2i,2j} + \frac{1}{8} (u_{2i-1,2j} + u_{2i+1,2j} + u_{2i,2j+1} + u_{2i,j-1}) \\ &+ \frac{1}{16} (u_{2i-1,2j+1} + u_{2i-1,2j-1} + u_{2i+1,2j+1} + u_{2i+1,2j-1}) \end{aligned}$$

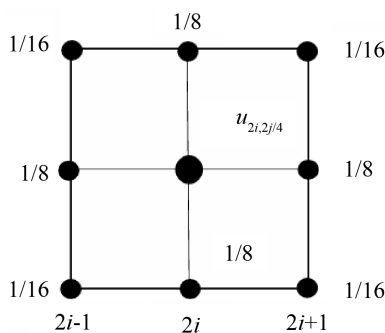


Figure 1. Matrix legend

图 1. 矩阵图例

4. 数值实验

在这部分, 本文提供了一个例子 ($0 < \alpha < 1$) 来测试数值算法的收敛性 [9].

Example 4.1.

$$\frac{\partial^\alpha u(x, y, t)}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial f(u)}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

这里

$$(x, y) \in [-2, 2] \times [-3.5, 1.5], f(u) = (\sin(u), \cos(u)), T = 1, \alpha = 0.3, 0.5, 0.7$$

初始条件和边界条件为:

$$u_0(x, y) = \frac{\pi}{4} \begin{cases} 14, & x^2 + y^2 < 1 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u(a) = u(b) = u(c) = u(d) = \frac{\pi}{4}$$

取 $N_x = N_y = 128$ 、 $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$ 时该方程的数值解见下图 2、图 3、图 4:

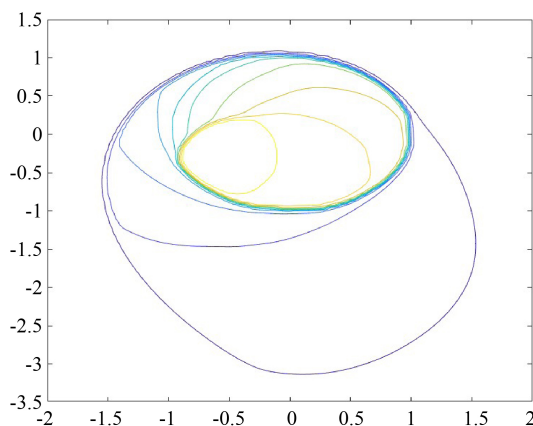


Figure 2. $\alpha = 0.3$

图 2. $\alpha = 0.3$

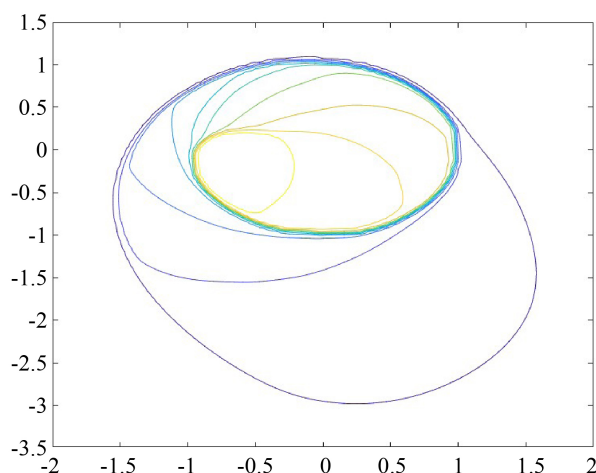


Figure 3. $\alpha = 0.5$

图 3. $\alpha = 0.5$

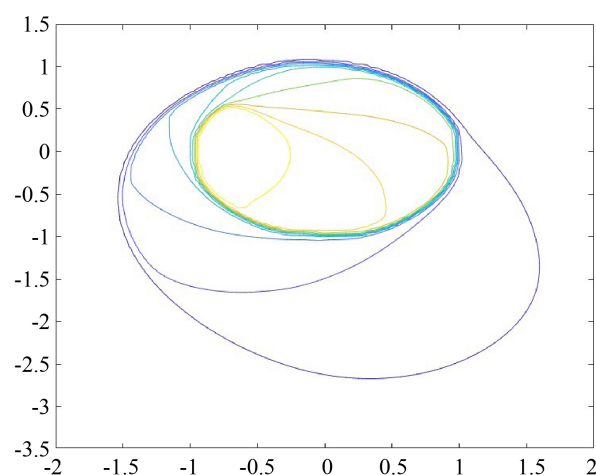


Figure 4. $\alpha = 0.7$

图 4. $\alpha = 0.7$

5. 结论

本文运用多重网格迭代方法求解二维时间分数阶 Burgers 方程，对于对流项中的通量，我们运用 Lax-Friedrichs 通量近似计算，并对于通量中的左近似和右近似采用斜率限制器近似。文中计算了一个算例在 $\alpha = 0.3$ 、 0.5 、 0.7 时方程的数值解，可以看出 α 越大收敛效果越好 [10]。

参考文献

- [1] Ahmad, H., Khan, T.A. and Cesarano, C. (2019) Numerical Solutions of Coupled Burgers' Equations. *Axioms*, **8**, Article 119. <https://doi.org/10.3390/axioms8040119>

-
- [2] Esen, A. and Tasbozan, O. (2015) Numerical Solution of Time Fractional Burgers Equation. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, **7**, 167-185.
<https://doi.org/10.1515/ausm-2015-0011>
- [3] Esen, A. and Tasbozan, O. (2015) Numerical Solution of Time Fractional Burgers Equation by Cubic B-Spline Finite Elements. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **13**, 1325-1337.
<https://doi.org/10.1007/s00009-015-0555-x>
- [4] Abbaszadeh, M., Zaky, M.A., Hendy, A.S. and Dehghan, M. (2023) A Two-Grid Spectral Method to Study of Dynamics of Dense Discrete Systems Governed by Rosenau-Burgers' Equation. *Applied Numerical Mathematics*, **187**, 262-276.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2023.02.014>
- [5] Sheng, Y. and Zhang, T. (2018) The Finite Volume Method for Two-Dimensional Burgers' Equation. *Personal and Ubiquitous Computing*, **22**, 1133-1139.
<https://doi.org/10.1007/s00779-018-1143-4>
- [6] Duangpan, A., Boonklurb, R. and Treeyaprasert, T. (2019) Finite Integration Method with Shifted Chebyshev Polynomials for Solving Time-Fractional Burgers' Equations. *Mathematics*, **7**, Article 1201. <https://doi.org/10.3390/math7121201>
- [7] Zhao, Z. and Li, H. (2023) Numerical Study of Two-Dimensional Burgers' Equation by Using a Continuous Galerkin Method. *Computers Mathematics with Applications*, **149**, 38-48.
<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.08.030>
- [8] Jiang, Y. and Bai, H. (2024) Multigrid Methods for Time Fractional Conservation Laws. *Numerical Algorithms*, **97**, 1301-1322. <https://doi.org/10.1007/s11075-024-01750-x>
- [9] Kurganov, A., Petrova, G. and Popov, B. (2007) Adaptive Semidiscrete Central-Upwind Schemes for Nonconvex Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **29**, 2381-2401. <https://doi.org/10.1137/040614189>
- [10] Hesthaven, J.S. (2018) Numerical Methods for Conservation Laws: From Analysis to Algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics, 199.
<https://doi.org/10.1137/1.9781611975109>