Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(10), 4572-4579
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1310438

Hans汉斯

空间代数曲线上的三元Birkhoff插值问题研究

王心蕊，马亚茹，崔利宏*

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年9月16日；录用日期：2024年10月9日；发布日期：2024年10月16日

摘 要

文章以二元Birkhoff插值研究结果为基础，对三元Birkhoff插值泛函组的适定性问题进行了研究。并提出了空间代数曲线上和代数曲面上的Birkhoff插值适定泛函组的基本概念，研究了空间代数曲线上和代数曲面上的Birkhoff插值适定泛函组的某些基本理论和拓扑结构，得到了构造空间代数曲线上Birkhoff插值适定泛函组的添加曲线交点法。方法是以迭加方式完成的，因此便于在计算机上实现其构造过程。最后给出了具体实验算例。

关键词

Birkhoff插值，插值适定泛函组，空间代数曲线，迭加插值法

The Research on the Three-Dimensional Birkhoff Interpolation Problem for Space Algebraic Curves

Xinrui Wang, Yaru Ma, Lihong Cui*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Sep. 16th, 2024; accepted: Oct. 9th, 2024; published: Oct. 16th, 2024

Abstract

Based on the results of the two-dimensional Birkhoff interpolation, the study investigates the well-posedness of the three-dimensional Birkhoff interpolation functional systems. The fundamental concepts of well-posed Birkhoff interpolation functional systems on space algebraic curves and algebraic surfaces are proposed. The research delves into some basic theories and topological structures of well-posed Birkhoff interpolation functional systems on space algebraic curves and surfaces.

*通讯作者。

文章引用: 王心蕊, 马亚茹, 崔利宏. 空间代数曲线上的三元 Birkhoff 插值问题研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(10): 4572-4579. DOI: 10.12677/aam.2024.1310438

The study presents the method of constructing well-posed Birkhoff interpolation functional systems on space algebraic curves through the addition of intersection points of curves. This method is performed in an iterative manner, making it feasible to implement the construction process on a computer. Finally, specific experimental examples are provided.

Keywords

Birkhoff Interpolation, Well-Posed Interpolation Functional Systems, Space Algebraic Curves, Iterative Interpolation Method

1. 引言

Birkhoff 插值是一种多项式插值方法，旨在通过在给定节点上的函数值和导数(或更高阶导数)来构造插值多项式。这个方法得名于数学家 Birkhoff。Birkhoff 插值广泛应用于数值分析和计算数学中，特别是在需要确保插值多项式的光滑性和逼近性的情况下。Birkhoff 插值是切触插值一个更高层次。对于多元 Birkhoff 插值的研究，国内外学者研究角度不同，本文重点研究对于给定插值多项式空间，寻找适定的 Birkhoff 插值泛函组(即使 Birkhoff 插值多项式唯一存在的插值泛函组)。1906 年 Birkhoff 在[1]中提出了一种在某些插值节点上微商不连续的插值问题，开始了 Birkhoff 插值问题的研究。1966 年 Schoenberg 在[2]中给出了由关联矩阵，插值结点集和插值空间 3 部分组成的一元 Birkhoff 插值格式。1992 年，Lorentz 在[3]中将一元 Birkhoff 插值格式推广到了多元的情形。多元 Birkhoff 插值面临的一个主要问题是解的唯一存在性。对于这个问题有的学者致力于研究合适的插值基；有的学者致力于研究插值格式的正则性；但是对于给定插值多项式空间，寻找适定的 Birkhoff 插值泛函组这一方面的研究较少。2008 年，崔利宏等在[4]中对二元 Birkhoff 插值泛函组适定性问题进行了研究。

本文在以往研究二元 Birkhoff 插值研究结果为基础，对三元 Birkhoff 插值泛函组的适定性问题进行了研究。

2. 基本定义和定理

定义 1 (空间代数曲线上的 Birkhoff 插值问题)

设 l 和 k 为自然数，r 为非负整数，l 次代数曲面 $p(x,y,z)=0$ 与 k 次代数曲面 $q(x,y,z)=0$ 横截相交与空间代数曲线。$P_{n,r}^{(3)}[C]$ 代表定义于空间代数曲线 $C=z(p,q)$ 上且有 r 阶方向导数的全次数不超过 n 的三元多项式空间。定义 $d_{n,r}(l,k)$ 如下：

$$d_{n,r}(l,k)=\binom{n+3}{3}-\binom{n-l(\mu+1)+3}{3}-\binom{n-k(\mu+1)+3}{3}+\binom{n-l(\mu+1)-k(\mu+1)+3}{3}$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3), n<k(\mu+1) \text{或} n<l(\mu+1)\\ \frac{1}{6}lk(\mu+1)(2n+4-l-k(\mu+1)), n\ge k(\mu+1) \text{或} n\ge l(\mu+1)\end{cases}$$

$$\text{而}\, e_{n,r}(l,k)=n-rlk(l+k)-\frac{1}{2}lk(k+l-4)$$

则有 $\dim P_{n,r}^{(3)}[C]=d_{n,r}(l,k)$。

设 $A=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(l,k)\right\}$ 为曲线一个 Birkhoff 插值泛函组，对于任给的实数组 $\left\{f_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(l,k)\right\}$，寻找一个多项式 $g(x,y,z)\in P_n^{(3)}$，使得满足如下 Birkhoff 插值条件：

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r}g\left(Q_i^{(r)}\right)=f_i^{(r)},i=0,\cdots,e_{n,r}(l,k);r=0,\cdots,\mu \tag{1}$$

其中表示 $g(x,y,z)$ 在 $C=z(p,q)$ 上点 $Q_i\left(i=1,\cdots,e_{n,r}(l,k)\right)\in A$ 处在 $C=z(p,q)$ 上的法向导矢。

定义 2 (空间代数曲线上的 Birkhoff 插值适定泛函组)

假设空间代数曲线 $C=z(p,q)$，若对每个任意给定的数组 $\left\{f_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(l,k)\right\}$，上述(1)总有一组解，则称 $A=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(l,k)\right\}$ 为沿空间代数曲线 $C=z(p,q)$ 的 n 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组。简记为 $A\in I_{n,r}^{(3)}C$ (这里 $I_{n,r}^{(3)}C$ 代表所有位于曲线 $C=z(p,q)$ 的 n 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组所构成的集合)。

注 1：如下两个命题等价

(1) 如果对于每个任给数组 $\left\{f_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(l,k)\right\}$，总是有一组解；

(2) 若 $\exists g(x,y,z)\in P_n^{(3)}$ 符合 Birkhoff 插值条件：

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r}g\left(Q_i^{(r)}\right)=f_i^{(r)},i=0,\cdots,e_{n,r}(l,k);r=0,\cdots,\mu$$

可推出在 $C=z(p,q)$ 上总是有 $g(x,y,z)\equiv 0$。

定义 3 (代数曲面上的 Birkhoff 插值问题)

令 $k\in N_+$，$r\in N$，$P_{n,r}^{(3)}\left[q(k)\right]$ 表示定义于 k 次代数曲面 $q(x,y,z)=0$ 上且有 r 阶方向导数的全次数不超过 n 次的三元实系数多项式空间。定义 $d_{n,\mu}(k)$。

如下：

$$d_{n,\mu}(k)=\binom{n+3}{3}-\binom{n-(\mu+1)\cdot k+3}{3}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3),n<(\mu+1)k\\ \frac{1}{6}(\mu+1)k\left(3n\left(n-(\mu+1)k\right)+12n+(\mu+1)^2k^2-6(\mu+1)k+11\right),n\ge(\mu+1)k\end{cases}$$

$$l_{n,r}(k)=\frac{1}{2}(n-rk)k\left(n-(r+1)k+4\right)+\binom{k-1}{3}+1$$

则 $\dim P_{n,r}^{(3)}\left[q(k)\right]=d_{n,\mu}(k)$。

设 $q(x,y,z)=0$ 为一个 k 次无重复分量的代数曲面，$B=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,l_{n,r}(k)\right\}$ 为 $q(x,y,z)=0$ 上的一个 Birkhoff 插值泛函组，对任给的数组 $\left\{f_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,l_{n,r}(k)\right\}$，找到 $p(x,y,z)\in P_n^{(3)}$，使得

$$\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}p\left(Q_i^{(r)}\right)=f_i^{(r)},i=0,\cdots,l_{n,r}(k);r=0,\cdots,\mu \tag{2}$$

其中 $\frac{\partial^r}{\partial n^r}p\left(Q_i^{(r)}\right)$ 表示 $p(x,y,z)$ 在曲面 $q(x,y,z)=0$ 上点 $Q_i\left(i=1,\cdots,l_{n,r}(k)\right)\in B$ 处沿该曲面的 r 阶法向导数(也就是沿曲面在该点处的切平面的法矢方向的 r 阶方向导数)。

定义 4 (代数曲面上的 Birkhoff 插值适定泛函组)

设 $q(x,y,z)=0$ 为一个 k 次无重复分量的代数曲面，假设对每个任给实数集 $\left\{f_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,l_{n,r}(k)\right\}$，(2)总有一组解，则称泛函组 $B=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,l_{n,r}(k)\right\}$ 为沿 k 次曲线 $q(x,y,z)=0$ 的一个 n 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组，并简记为 $B\in I_{n,r}^{(3)}(q)$ (这里 $I_{n,r}^{(3)}(q)$ 代表所有沿曲面 $q(x,y,z)=0$ 的一个 n 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组的集合)。

注 2：以下两个命题等价：

(1) 对任给实数集 $\left\{f_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,l_{n,r}(k)\right\}$，(2) 总有一组解；

(2) 如果存在一个多项式 $p(x,y,z)\in P_n^{(3)}$ 满足齐次 Birkhoff 插值条件：$\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}p\left(Q_i^{(r)}\right)=0$，$i=1,\cdots,l_{n,r}(k);r=0,\cdots,\mu$，则沿曲面 $q(x,y,z)=0$ 有 $p(x,y,z)\equiv 0$。

定义 5 (强 H-基)假设 $f_i\in K[x_1,\cdots,x_t]$，$\deg(f_i)=l_i,i=1,\cdots,s$ 且 $I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle^\mu$，如果对于任意一个多项式，总 $p\in I\cap P_n^{(t)}$ 能找到多项式 $\alpha_i\in K[x_1,\cdots,x_t]$，使得 $p=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i f_i^{\mu+1}$，且 $\deg(\alpha_i)\le n-(\mu+1)l_i$，由此，称集合 $\{f_1,\cdots f_s\}$ 为 μ 阶理想 $I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle^\mu$ 的一个强 H-基。

本文所获得研究结果如下：

定理 1 (构造空间代数曲线上 Birkhoff 插值适定泛函组的添加曲线交点法)

设 m,k,l 和 n 均为自然数，$l\ge\max\{m,k\}$，次数为 m 的代数曲面 $p(x,y,z)=0$ 与次数为 k 的代数曲面 $q(x,y,z)=0$ 横截相交于空间代数曲线 $C=z(p,q)$，l 次代数曲面 $r(x,y,z)=0$ 与曲线 $C=z(p,q)$ 相交于个 mkl 相异点，由此可以确定一个 Birkhoff 插值适定泛函组 $A=\left\{Q_i^{(r)}\mid i=1,\cdots,mkl;r=0,\cdots,\mu\right\}$ (这里求导方向指沿曲面 $p(x,y,z)=0$ 和 $q(x,y,z)=0$ 的两个法方向)。$\{p,q,r\}$ 是 $\langle p,q,r\rangle$ 的一个强 H-基，假若 $B\in I_{n,r}^{(3)}(C)\left(n\ge(\mu+1)(m+k)-3\right)$ 且 $B\cap A=\varnothing$，则

$$A\cup B\in I_{n+l(\mu+1),r}^{(3)}(C)。$$

3. 定理的证明

为了证明本文的主要结果，首先给出如下引理。

引理 1：空间代数曲线 C 上的 n 次 r 阶 Birkhoff 插值泛函组 $B=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(l,k)\right\}$ 能够在 $C=z(p,q)$ 上是适定的等价条件是：对任意符合零 Birkhoff 插值条件的 $\frac{\partial^r}{\partial n^r}g\left(Q_i^{(r)}\right)=0$，$\forall Q_i^{(r)}\in B$ 的 $g(x,y,z)\in P_n^3$，存在如下形式分解：

$$g(x,y,z)=\alpha(x,y,z)\left[p(x,y,z)\right]^{\mu+1}+\left[\beta(x,y,z)q(x,y,z)\right]^{\mu+1}。$$

引理 1 证明：根据注 1 可知，引理充分性显然得证，所以只证必要性。

不妨设 $l\le k$，则当 $n<l$ 时，必要性显然正确，故我们只证明 $n\ge l$ 的情况。

由文献[5]中构造代数曲面上 Birkhoff 插值适定泛函组的添加平面代数曲线法，我们可以在曲面 $q(x,y,z)=0$ 上构造出一个沿该曲面一个 0 阶 $n-l$ 次 Birkhoff 插值适定泛函组 $B=\{Q_i\}_{i=1}^{d_{n-l,0}(k)}$，令

$A=\{Q_i\}_{i=1}^{e_{n,0}(l,k)}\in I_{n,0}^{(3)}(C)$ 并且 $B\cap A=\varnothing$，则可证明 $B\cup A=I_{n,0}^{(3)}(q)$。

证明如下：

对任意给定的 $\{f_i\}_{i=1}^{d_{(n-l),0}(k)+e_{n,0}(l,k)}$，因为 $A=\{Q_i\}_{i=1}^{e_{n,0}(l,k)}\in I_{n,0}^{(2)}(C)$，所以对实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{e_n(l,k)}\subset\{f_i\}_{i=1}^{d_{n-l}(k)+e_n(l,k)}$，存在一个多项式 $\tilde{g}(X)\in P_n^{(3)}$，使之满足插值条件：

$$\tilde{g}(Q_i)=f_i,i=1,\cdots,e_{n,0}(l,k)\text{。}$$

现在我们构造一个多项式 $\tilde{\tilde{g}}(x,y,z)$ 如下

$$\tilde{\tilde{g}}(x,y,z)=\tilde{g}(x,y,z)+p(x,y,z)r(x,y,z)\text{。}$$

其中 $r(x,y,z)\in P_{n-l}^{(3)}$，使其满足对任意的 $Q_i\in B$，有

$$\tilde{\tilde{g}}(Q_i)=\tilde{g}(Q_i)+p(Q_i)r(Q_i)\text{。}$$

即

$$r(Q_i)=\frac{\tilde{\tilde{g}}(Q_i)-\tilde{g}(Q_i)}{p(Q_i)},\forall Q_i\in B\text{。}$$

由于 $B\in I_{n-l}^{(3)}(q)$，而 $r(x,y,z)\in P_{n-l}^{(3)}$ 且 $P(Q_i)\neq 0,\forall Q_i\in B$，则由定义 4 知，满足上式的多项式 $r(x,y,z)$ 一定存在.这表明，存在多项式 $\tilde{\tilde{g}}(x,y,z)\in P_n^{(3)}$，满足对任意的 $Q_i\in B\cup A$ 有

$$\tilde{\tilde{g}}(Q_i)=f_i\text{。}$$

从而由定义 4 知，$B\cup A\in I_{n,0}^{(3)}(q)$.又由于 $B\in I_{n-l,0}^{(3)}(q)$，则对于数组 $\{g(Q_i)/p(Q_i)\}_{i=1}^{d_{n-l}(k)}$ 一定存在满足插值条件

$$\alpha(Q_i)=\frac{g(Q_i)}{p(Q_i)},\forall Q_i\in B\text{。}$$

的多项式 $\alpha(x,y,z)\in P_{n-l}^{(3)}$。我们再构造一个多项式 $f(X)\in P_n^{(3)}$ 如下

$$f(x,y,z)=g(x,y,z)-\alpha(x,y,z)p(x,y,z) \tag{3}$$

显然(3)式满足对任何 $Q_i\in B\cup A$ 有 $f(Q_i)=0$.又由于 $B\cup A\in I_n^{(3)}(q)$，故存在多项式 $\beta(x,y,z)\in P_{n-k}^{(3)}$，使得

$$f(x,y,z)=\beta(x,y,z)q(x,y,z) \tag{4}$$

结合(3)，(4)式得

$$g(x,y,z)=\alpha(x,y,z)p(x,y,z)+\beta(x,y,z)q(x,y,z)\text{。}$$

其中 $\alpha(x,y,z)\in P_{n-l}^{(3)};\beta(x,y,z)\in P_{n-k}^{(3)}$。

假定结论对整数 $r=t$ 成立，也就是说对任何满足零 Birkhoff 插值条件 $\frac{\partial^t}{\partial n^t}g\left(Q_i^{(t)}\right)=0,\forall Q_i^{(t)}\in B$ 的多项式 $g(x,y,z)\in P_n^{(3)}$，存在如下分解：

$$g(x,y,z)=\alpha(x,y,z)\left[p(x,y,z)\right]^{t+1}+\beta(x,y,z)\left[q(x,y,z)\right]^{t+1} \tag{5}$$

往证 $r=t+1$ 时结论成立.对(5)式两端求直至 $t+1$ 阶法向导数($\forall Q_i^{(r)}\in B$)，使用 leibniz 微分公式，并

使用引理条件得

$$\alpha(x,y,z)=\tilde{\alpha}(x,y,z)p(x,y,z) \tag{6}$$

$$\beta(x,y,z)=\tilde{\beta}(x,y,z)q(x,y,z) \tag{7}$$

结合(5)~(7)式得

$$g(x,y,z)=\alpha(x,y,z)\left[p(x,y,z)\right]^{t+2}+\beta(x,y,z)\left[q(x,y,z)\right]^{t+2}。$$

引理 4.1 证完。

定理 4 证明

全部条件数为

$$\begin{aligned}&(\mu+1)^2 mkl+\frac{1}{2}mk(\mu+1)\left(2n+4-(\mu+1)(m+k)\right)\\&=\frac{1}{2}(\mu+1)mk\left(2\left(n+(\mu+1)l\right)+4-(\mu+1)(m+k)\right)\end{aligned}。$$

这准确地等于 $\dim P^{(3)}_{n+(\mu+1)l,r}[C]$。设存在多项式 $g(x,y,z)\in I\cap P^{(3)}_{n+(\mu+1)l}$，满足条件

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r}g\left(Q_i^{(r)}\right)=0,\forall Q_i^{(r)}\in B\cup A。$$

往证：$g(x,y,z)=\alpha(x,y,z)\left[p(x,y,z)\right]^{\mu+1}+\beta(x,y,z)\left[q(x,y,z)\right]^{\mu+1}$。

由于 $\{p,q,r\}$ 是关于 $\langle p,q,r\rangle$ 的强 H-基，则由定义 5 知，存在多项式 $\alpha(x,y,z)\in P^{(3)}_{n+(\mu+1)(l-m)}$，$\beta(x,y,z)\in P^{(3)}_{n+(\mu+1)(l-k)}$，$\gamma(x,y,z)\in P^{(3)}_{n}$，使得

$$g(x,y,z)=\alpha(x,y,z)\left[p(x,y,z)\right]^{\mu+1}+\beta(x,y,z)\left[q(x,y,z)\right]^{\mu+1}+\gamma(x,y,z)\left[r(x,y,z)\right]^{\mu+1} \tag{8}$$

将上式两端求至 $\mu+1$ 阶导矢，且 $r\left(Q_i^{(r)}\right)\neq 0$，有

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r}\gamma\left(Q_i^{(r)}\right)=0,\forall Q_i^{(r)}\in B。$$

但 $\gamma(x,y,z)\in P_n^{(3)}$，而 $B\in I_n^{(3)}(C)$，则

$$\gamma(x,y,z)=\tilde{\alpha}(x,y,z)\left[p(x,y,z)\right]^{\mu+1}+\tilde{\beta}(x,y,z)\left[q(x,y,z)\right]^{\mu+1} \tag{9}$$

将(9)代入(8)式有

$$g(x,y,z)=\tilde{\tilde{\alpha}}(x,y,z)\left[p(x,y,z)\right]^{\mu+1}+\tilde{\tilde{\beta}}(x,y,z)\left[q(x,y,z)\right]^{\mu+1}。$$

则由引理 4.1 知：

$$A\cup B\in I^{(3)}_{n+(\mu+1)l,r}(C)。$$

定理 1 证完.

4. 实验算例

下面给出关于定理 1 的例子。

例 1：取被插值函数 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，(*xoy* 平面) $p(x,y,z)=z=0$ 与(*yoz* 平面)

$q(x,y,z)=x=0$ 均为一次代数曲面，两曲面横截相交于 $C=z(p,q)$，C 为 y 轴，在 y 轴取一点 $Q_0(0,0,0)$，则该点为 C 上一个插值适定泛函组，球面 $r(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ 与 C 交于两个点 $Q_1(0,1,0)$，$Q_2(0,-1,0)$，那么这三个点 Q_0,Q_1,Q_2 构成了定义于 C 上 2 次 0 阶 Birkhoff 插值适定泛函组。

设插值多项式为

$$q(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}\text{。}$$

由 $\frac{\partial^r}{\partial n^r}g\left(Q_i^{(r)}\right)=f_i^{(r)},i=0,1,2;r=0$，得到如下方程组：

$$\begin{aligned}&g(0,0,0)=a_{10}=0=f(0,0,0),\\&g(0,1,0)=a_2+a_8+a_{10}=1=f(0,1,0),\quad\text{。}\\&g(0,-1,0)=a_2-a_8+a_{10}=1=f(0,-1,0)\end{aligned}$$

解得 $a_2=1,a_8=0,a_{10}=0$，从而得到插值多项式

$$g(x,y,z)=y^2.$$

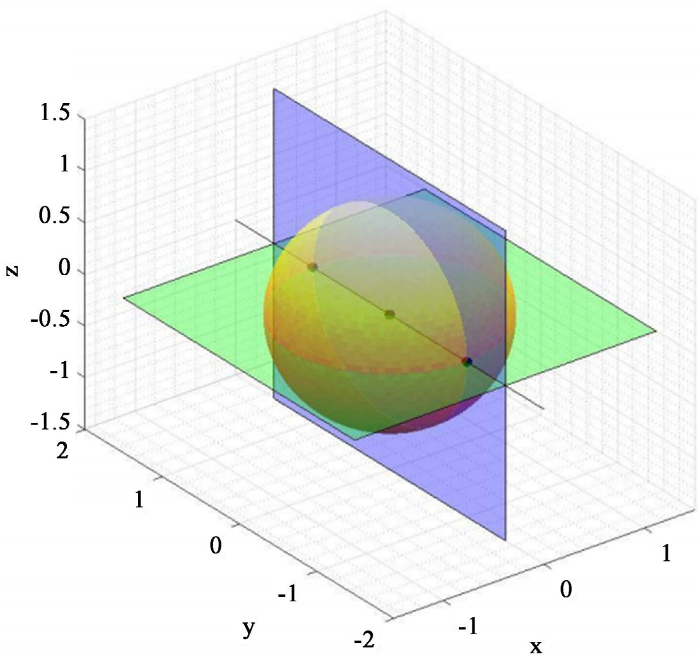

Figure 1. Points of the *y*-axis
图 1. *y* 轴取点效果图

在空间代数曲线 y 轴上取 3 个点，y 轴上取点效果图如图 1 所示。

取两点 $(1,1,0),\left(0,1,\sqrt{2}\right)$，按照上述方式计算，得出插值结果分别是 1，1，而精确值分别是 $\sqrt{2},\sqrt{3}$，误差值分别是 $t_1=\left|\sqrt{2}-1\right|\approx0.4142,t_2=\left|\sqrt{3}-1\right|\approx0.7321$。

5. 结论

本文首先介绍了空间代数曲线上 Birkhoff 插值适定泛函组和代数曲面上 Birkhoff 插值适定泛函组的的相关定义与基本定理，同时重点研究了空间代数曲线上 Birkhoff 插值适定泛函组，提出构造空间代数

曲线上 Birkhoff 插值适定泛函组添加空间代数曲线交点法，最后给出实验算例说明并验证有关结论。本文创新点为给出空间代数曲线上 Birkhoff 插值适定泛函组添加空间代数曲线交点法，其对生产生活有着重要的实用价值。

参考文献

[1] Birkhoff, G.D. (1906) General Mean Value and Remainder Theorems with Applications to Mechanical Differentiation and Quadrature. *Transactions of the American Mathematical Society*, **7**, 107-136. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1906-1500736-1

[2] Schoenberg, I.J. (1966) On Hermite-Birkhoff Interpolation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **16**, 538-543. https://doi.org/10.1016/0022-247x(66)90160-0

[3] Lorentz, R.A. (1992) Multivariate Birkhoff Interpolation. Springer Verlag.

[4] 崔利宏, 杨爽. 二元 Birkhoff 插值泛函组适定性问题[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2008(4): 14-17.

[5] 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与多元 Kergin 插值[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2003.