

几类图的 A_α -能量

黄梦琪, 买吐肉孜·买司地克*

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2024年9月16日; 录用日期: 2024年10月9日; 发布日期: 2024年10月18日

摘要

2017年Nikiforov提出的 A_α -矩阵是 A 矩阵和 Q 矩阵的一般形式, 由于 A_α -矩阵的结果随着参数的变化而变化, A_α -矩阵具备很多 A 矩阵和 Q 矩阵没有的性质。本文计算了完全图, 完全二部图, 完全等多部图, 友谊图, 风车图的 A_α -特征值和能量, 并给出删除任一条边后完全平衡二部图能量的变化。

关键词

A_α -能量, 完全图, 完全二部图, 完全等多部图, 友谊图, 风车图

A_α -Energy of Some Classes of Graphs

Mengqi Huang, Metsidik·Metrose*

College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 16th, 2024; accepted: Oct. 9th, 2024; published: Oct. 18th, 2024

Abstract

The A_α -matrix proposed by Nikiforov in 2017 is a general form of both A and Q matrices. Due to the fact that the results of the A_α -matrix vary with the parameters, the A_α -matrix possesses many properties that are not present in A and Q matrices. In this paper, we calculate A_α -eigenvalues and energies of the complete graph, complete bipartite graph, complete equal multi-partite graph, friendship graph and windmill graph, and give the energy changes of complete balanced bipartite graphs after deleting an arbitrary edge.

Keywords

A_α -Energy, Complete Graph, Complete Bipartite Graph, Complete Equal Multi-Partite Graph, Friendship Graph, Windmill Graph

*通讯作者。

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $A(G), D(G), Q(G)$ 分别表示图 G 的邻接矩阵, 对角矩阵和无符号拉普拉斯矩阵, 2017 年, Nikiforov [1] 定义了 A_α -矩阵和 A_α -特征多项式如下, 对于任意实数 $\alpha \in [0, 1]$:

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha) A(G),$$

$$\phi(A_\alpha(G), \lambda) = \det(\lambda I_n - A_\alpha(G)),$$

其中 I_n 是 n 阶单位阵。显然, $A_0(G) = A(G)$, $A_1(G) = D(G)$ 和 $2A_{1/2}(G) = Q(G)$ 。

简单图 G 的能量 $E(G) = \sum_{j=1}^N |\mu_j|$ 由 Gutman 在 [2] 提出, 其中 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 为 G 的邻接矩阵的特征值。

随后有各种各样的图矩阵的特征值被类似地用来计算图能量, 例如, 拉普拉斯能量 [3], A_α -能量 [4] 和 ABC 能量 [5], 路能量 [6]。[7] 中给出了完全二部图的邻接谱, [8] 中给出了每个部分有相同点数的完全等多部图的邻接谱, [9] 中给出了路, 完全图, 完全二部图, 友谊图, 风车图的 ABC 能量。

本文从 A_α -矩阵和多项式的定义出发, 计算了完全图, 完全二部图, 每个部分有相同点数的完全等多部图, 友谊图, 风车图等几类特殊图的 A_α -特征值和能量, 并给出了删除任一边后完全平衡二部图的 A_α -能量的大小变化。

2. 完全图 K_n 的 A_α -特征值

定理 1. 完全图 K_n 的 A_α -特征多项式是

$$\phi_{A_\alpha}(K_n, \lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda - n\alpha + 1)^{n-1}.$$

证明: 完全图 K_n 的度矩阵和邻接矩阵是

$$D(K_n) = (n-1)I_n, \quad A(K_n) = J_n - I_n,$$

由 A_α -矩阵和多项式的定义得到

$$\begin{aligned} \phi_{A_\alpha}(K_n, \lambda) &= \left| \left[\lambda - (n-1)\alpha \right] I_n - (1-\alpha)(J_n - I_n) \right| \\ &= \left| (\lambda - n\alpha + 1)I_n - (1-\alpha)J_n \right|, \end{aligned}$$

其中 J_n 表示全 1 的 n 阶方阵, 通过简单计算 J_n 的特征值是单根 n 和 $n-1$ 重 0, 所以

$$\begin{aligned} \phi_{A_\alpha}(K_n, \lambda) &= (\lambda - n\alpha + 1)^{n-1} \left[(\lambda - n\alpha + 1) - (1-\alpha)n \right] \\ &= (\lambda - n\alpha + 1)^{n-1} (\lambda - n + 1). \end{aligned}$$

推论 1.

$$\text{Spec}_{A_\alpha}(K_n) = \{[n\alpha - 1]^{n-1}, [n-1]^1\},$$

K_n 的 A_α -能量是

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(K_n) &= n-1+|n\alpha-1|(n-1) \\ &= (n-1)(|n\alpha-1|+1). \end{aligned}$$

推论 2.

$$\text{Spec}(K_n) = \{[-1]^{n-1}, [n-1]^1\},$$

K_n 的能量是 $E(K_n) = 2(n-1)$ 。

3. 完全二部图 $K_{m,n}$ 的 A_{α} -特征值

定理 2. 完全二部图 $K_{m,n}$ 的 A_{α} -特征多项式是

$$\phi_{A_{\alpha}}(K_{m,n}, \lambda) = (\lambda - n\alpha)^m (\lambda - m\alpha)^n [\lambda^2 - (m+n)\alpha\lambda - mn(1-2\alpha)].$$

证明: 完全二部图 $K_{m,n}$ 的度矩阵和邻接矩阵是

$$D(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} nI_m & 0 \\ 0 & mI_n \end{bmatrix}, A(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} 0 & J_{m \times n} \\ J_{n \times m} & 0 \end{bmatrix},$$

由 A_{α} -矩阵和多项式的定义得到

$$\begin{aligned} \phi_{A_{\alpha}}(K_{m,n}, \lambda) &= \begin{vmatrix} (\lambda - n\alpha)I_m & -(1-\alpha)J_{m \times n} \\ -(1-\alpha)J_{n \times m} & (\lambda - m\alpha)I_n \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - n\alpha)^m \det \left[(\lambda - m\alpha)I_n - \frac{m}{\lambda - n\alpha} (1-\alpha)^2 J_n \right] \\ &= (\lambda - n\alpha)^{m-n} \det \left[(\lambda - m\alpha)(\lambda - n\alpha)I_n - m(1-\alpha)^2 J_n \right] \\ &= (\lambda - n\alpha)^{m-1} (\lambda - m\alpha)^{n-1} [(\lambda - m\alpha)(\lambda - n\alpha) - mn(1-\alpha)]^2 \\ &= (\lambda - n\alpha)^{m-1} (\lambda - m\alpha)^{n-1} [\lambda^2 - (m+n)\alpha\lambda - mn(1-2\alpha)]. \end{aligned}$$

推论 3.

$$\text{Spec}_{A_{\alpha}}(K_{m,n}) = \left\{ [m\alpha]^{n-1}, [n\alpha]^{m-1}, \left[\frac{(m+n)\alpha \pm \sqrt{(m+n)^2 \alpha^2 + 4mn(1-2\alpha)}}{2} \right]^1 \right\},$$

$K_{m,n}$ 的 A_{α} -能量是

$$E_{\alpha}(K_{m,n}) = 2mn\alpha - (m+n)\alpha + \sqrt{(m+n)^2 \alpha^2 + 4mn(1-2\alpha)}.$$

推论 4 [5].

$$\text{Spec}(K_{m,n}) = \{[0]^{m+n-2}, [\pm\sqrt{mn}]^1\},$$

$K_{m,n}$ 的能量是

$$E(K_{m,n}) = 2\sqrt{mn}.$$

星图作为特殊的二部图 $S_n = K_{1,n-1}$, 可以通过上述定理得到其 A_{α} -特征值和能量。

推论 5. 星图 S_n 的 A_{α} -特征多项式, A_{α} -特征值是

$$\phi_{A_\alpha}(S_n, \lambda) = (\lambda - \alpha)^{n-2} [\lambda^2 - n\alpha\lambda - (n-1)(1-2\alpha)],$$

$$\text{Spec}_{A_\alpha}(S_n) = \left\{ [\alpha]^{n-2}, \left[\frac{n\alpha \pm \sqrt{n^2\alpha^2 + 4(n-1)(1-2\alpha)}}{2} \right]^1 \right\},$$

S_n 的 A_α -能量是 $E_\alpha(S_n) = (n-2)\alpha + \sqrt{n^2\alpha^2 + 4(n-1)(1-2\alpha)}$ 。

推论 6.

$$\text{Spec}(S_n) = \left\{ [0]^{n-2}, [\pm\sqrt{n-1}]^1 \right\},$$

S_n 的能量是 $E(S_n) = 2\sqrt{n-1}$ 。

定理 2. 如果 e 是完全平衡二部图 $K_{n,n}$ 的任一条边, 并且 $K_{n,n} - e$ 通过删除 $K_{n,n}$ 的边 e 得到, 我们有

$$E_\alpha(K_{n,n}) > E_\alpha(K_{n,n} - e).$$

证明: $K_{n,n} - e$ 的 A_α -特征多项式

$$\begin{aligned} \phi_{A_\alpha}(K_{n,n} - e, \lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - (n-1)\alpha & 0 & 0_{1 \times n-1} & -(1-\alpha)J_{1 \times n-1} \\ 0 & \lambda - (n-1)\alpha & -(1-\alpha)J_{1 \times n-1} & 0_{1 \times n-1} \\ 0_{n-1 \times 1} & -(1-\alpha)J_{n-1 \times 1} & (\lambda - n\alpha)I_{n-1} & -(1-\alpha)J_{n-1} \\ -(1-\alpha)J_{n-1 \times 1} & 0_{n-1 \times 1} & -(1-\alpha)J_{n-1} & (\lambda - n\alpha)I_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - (n-1)\alpha & 0 & 0 & -(1-\alpha)J_{1 \times n-1} \\ 0 & \lambda - (n-1)\alpha & -(1-\alpha)J_{1 \times n-1} & 0 \\ [(n-1)\alpha - \lambda]I_{n-1 \times 1} & -(1-\alpha)J_{n-1 \times 1} & (\lambda - n\alpha)I_{n-1} & 0 \\ -(1-\alpha)J_{n-1 \times 1} & [(n-1)\alpha - \lambda]_{n-1 \times 1} & 0 & (\lambda - n\alpha)I_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ [(n-1)\alpha - \lambda]I_{n-1 \times 1} & -(1-\alpha)J_{n-1 \times 1} & (\lambda - n\alpha)I_{n-1} & 0 \\ -(1-\alpha)J_{n-1 \times 1} & [(n-1)\alpha - \lambda]_{n-1 \times 1} & 0 & (\lambda - n\alpha)I_{n-1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$\text{Spec}_{A_\alpha}(K_{n,n} - e) = \left\{ [n\alpha]^{2(n-2)}, \left[\frac{(n\alpha + n-1)\alpha \pm \sqrt{(n\alpha + n-1)^2 - 4(n-1)(n\alpha + \alpha - 1)}}{2} \right]^2 \right\},$$

$K_{n,n} - e$ 的 A_α 能量是

$$E_\alpha(K_{n,n} - e) = 2n\alpha(n-2) + 2\sqrt{(n\alpha + n-1)^2 - 4(n-1)(n\alpha + \alpha - 1)}.$$

由推论 2. 我们有

$$\begin{aligned} &E_\alpha(K_{n,n}) - E_\alpha(K_{n,n} - e) \\ &= 2n^2\alpha - 2n - 2n\alpha(n-2) - 2\sqrt{(n\alpha + n-1)^2 - 4(n-1)(n\alpha + \alpha - 1)} \\ &= 4n\alpha - 2\alpha - 2\sqrt{n^2\alpha^2 - 2(n+2)(n-1)\alpha + (n+3)(n-1)}, \end{aligned}$$

因为

$$(n+3)(n-1) - \frac{(n+2)(n-1)}{n^2} = \frac{3n^2 + 2n - 4}{n^2} > 0,$$

所以

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n^2\alpha^2 - 2(n+2)(n-1)\alpha + (n+3)(n-1)} &< 2\sqrt{n^2\left[\alpha - \frac{(n+2)(n-1)}{n^2}\right]^2} \\ &= 2n\left[\alpha - \frac{(n+2)(n-1)}{n^2}\right] \\ &< 2n\alpha - 2(n+1) \\ &< 4n\alpha - 2\alpha, \end{aligned}$$

即 $E_\alpha(K_{n,n}) > E_\alpha(K_{n,n} - e)$ 。

4. 完全等 m 部图 $K_{m(r)}$ 的 A_α -特征值

用 $K_{m(r)}$ 表示每个部分有相同点数 r 的完全等 m 部图。

定理 3. 完全等 m 部图 $K_{m(r)}$ 的 A_α -特征多项式是

$$\phi_{A_\alpha}(K_{m(r)}, \lambda) = [\lambda - (m-1)r\alpha]^{m(r-1)} [\lambda - (m-1)r] [\lambda - (m-1)r\alpha + (1-\alpha)r]^{m-1}.$$

证明: 完全等 m 部图 $K_{m(r)}$ 的度矩阵和邻接矩阵是

$$D(K_{m(r)}) = \begin{bmatrix} (m-1)rI_r & & & & \\ & (m-1)rI_r & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (m-1)rI_r & \\ & & & & (m-1)rI_r \end{bmatrix},$$

$$A(K_{m(r)}) = \begin{bmatrix} 0 & J_r & J_r & \cdots & J_r \\ J_r & 0 & J_r & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & J_r & 0 & J_r \\ J_r & & \cdots & J_r & 0 \end{bmatrix}.$$

由 A_α -矩阵和多项式的定义得到

$$\phi_{A_\alpha}(K_{m(r)}, \lambda) = \begin{vmatrix} [\lambda - (m-1)r\alpha]I_r & -(1-\alpha)J_r & -(1-\alpha)J_r & \cdots & -(1-\alpha)J_r \\ -(1-\alpha)J_r & [\lambda - (m-1)r\alpha]I_r & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & -(1-\alpha)J_r & [\lambda - (m-1)r\alpha]I_r & -(1-\alpha)J_r \\ -(1-\alpha)J_r & & \cdots & -(1-\alpha)J_r & [\lambda - (m-1)r\alpha]I_r \end{vmatrix},$$

记 $\phi_{A_\alpha}(K_{m(r)}, \lambda) = |A_m|$,

$$|A_m| = \begin{vmatrix} -(1-\alpha)J_r + [\lambda - (m-1)r\alpha]I_r + (1-\alpha)J_r & -(1-\alpha)J_r & \cdots & -(1-\alpha)J_r \\ [-(1-\alpha) + 0]J_r & [\lambda - (m-1)r\alpha]I_r & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -(1-\alpha)J_r \\ [-(1-\alpha) + 0]J_r & & -(1-\alpha)J_r & [\lambda - (m-1)r\alpha]I_r \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r + (1-\alpha) J_r \right] |A_{m-1}| - (1-\alpha) \\
&\quad \begin{vmatrix} J_r & -(1-\alpha)J_r & -(1-\alpha)J_r & -(1-\alpha)J_r & \cdots & -(1-\alpha)J_r \\ J_r & \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r & -(1-\alpha)J_r & -(1-\alpha)J_r & \cdots & -(1-\alpha)J_r \\ J_r & -(1-\alpha)J_r & \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r & -(1-\alpha)J_r & \cdots & -(1-\alpha)J_r \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ J_r & -(1-\alpha)J_r & \cdots & -(1-\alpha)J_r & -(1-\alpha)J_r & \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r \\ J_r & -(1-\alpha)J_r & \cdots & -(1-\alpha)J_r & -(1-\alpha)J_r & \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r \end{vmatrix} \\
&= \left[\left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r + (1-\alpha) J_r \right] |A_{m-1}| - (1-\alpha) \\
&\quad \begin{vmatrix} J_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ J_r & \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r - (1-\alpha) J_r & & \cdots & 0 \\ J_r & & \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r - (1-\alpha) J_r & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ J_r & 0 & \cdots & 0 & \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r - (1-\alpha) J_r \end{vmatrix} \\
&= \left[\left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r + (1-\alpha) J_r \right] |A_{m-1}| - (1-\alpha) J_r \left[\left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r - (1-\alpha) J_r \right]^{m-1},
\end{aligned}$$

即

$$|A_m| = \left[\left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r + (1-\alpha) J_r \right] |A_{m-1}| - (1-\alpha) J_r \left[\left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r - (1-\alpha) J_r \right]^{m-1}.$$

由递推关系可得

$$\begin{aligned}
\phi_{A_\alpha}(K_{m(r)}, \lambda) &= \left[\left(\left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r - (m-1)(1-\alpha) J_r \right) \left[\left(\left[\lambda - (m-1)r\alpha \right] I_r + (1-\alpha) J_r \right)^{m-1} \right] \right. \\
&= \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right]^{r-1} \left[\lambda - (m-1)r\alpha - (m-1)(1-\alpha)r \right] \\
&\quad \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right]^{(m-1)(r-1)} \left[\lambda - (m-1)r\alpha + (1-\alpha)r \right]^{m-1} \\
&= \left[\lambda - (m-1)r\alpha \right]^{m(r-1)} \left[\lambda - (m-1)r \right] \left[\lambda - (m-1)r\alpha + (1-\alpha)r \right]^{m-1}.
\end{aligned}$$

推论 7.

$$\text{Spec}_{A_\alpha}(K_{m(r)}) = \left\{ \left[(m-1)r\alpha \right]^{m(r-1)}, \left[(r-1)r \right]^1, \left[(m-1)r\alpha - (1-\alpha)r \right]^{m-1} \right\},$$

$K_{m(r)}$ 的 A_α -能量是

$$\begin{aligned}
E_\alpha(K_{m(r)}) &= (m-1)r\alpha m(r-1) + (m-1)r + \left| (m-1)r\alpha - (1-\alpha)r \right| (m-1) \\
&= (m-1)r \left[m\alpha(r-1) + 1 + |m\alpha - 1| \right].
\end{aligned}$$

推论 8. [9].

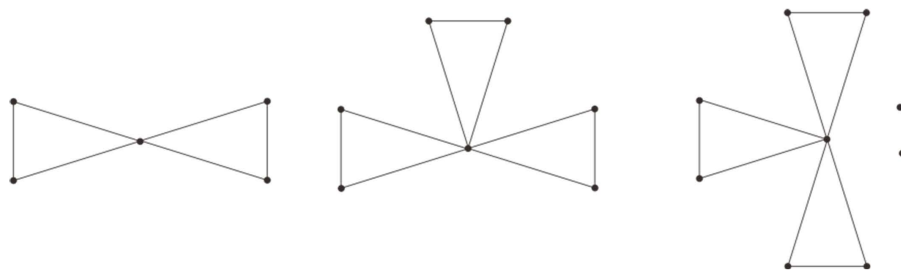
$$\text{Spec}(K_{m(r)}) = \left\{ \left[0 \right]^{m(r-1)}, \left[(m-1)r \right]^1, \left[-r \right]^{m-1} \right\},$$

$K_{m(r)}$ 的能量是

$$E(K_{m(r)}) = 2(m-1)r.$$

5. 友谊图 F_n 的 A_α -特征值

友谊图 F_n 是通过 n 个 3 长圈图 C_3 与一个顶点合并得到, 有 $2n+1$ 个顶点和 $3n$ 条边, 如图 1 是友谊

图 F_2, F_3, F_n 。**Figure 1.** F_2, F_3, F_n **图 1.** F_2, F_3, F_n

定理 4. 友谊图 F_n 的 A_α -特征多项式是

$$\phi_{A_\alpha}(F_n, \lambda) = [(\lambda - 2\alpha) + (1 - \alpha)][(\lambda - 2n\alpha)(\lambda - \alpha - 1) - n][(\lambda - 2\alpha)^2 - (1 - \alpha)^2]^{n-1}.$$

证明: 友谊图 F_n 的度矩阵和邻接矩阵是

$$D(F_n) = \begin{bmatrix} 2n & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \end{bmatrix}, A(F_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

由 A_α -矩阵和多项式的定义得到

$$\phi_{A_\alpha}(F_n, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2n\alpha & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & \cdots & -(1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha & -(1-\alpha) & & & & \\ -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha & & & & \\ -(1-\alpha) & & & \lambda - 2\alpha & -(1-\alpha) & & \\ -(1-\alpha) & & & -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda - 2\alpha & -(1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & & & & & & -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha \end{vmatrix}_{2n+1}$$

将上面的行列式展开第一行, $\lambda - 2n\alpha$ 的余子式是

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2\alpha & -(1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - 2\alpha & -(1-\alpha) \\ & & & -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha \end{vmatrix}_{2n},$$

其他的是 $2n$ 个分别是 n 个

$$\begin{vmatrix} -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & & & \\ -(1-\alpha) & \lambda-2\alpha & & & \\ & & \lambda-2\alpha & -(1-\alpha) & \\ & & -(1-\alpha) & \lambda-2\alpha & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda-2\alpha & -(1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & & & & & -(1-\alpha) & \lambda-2\alpha \end{vmatrix}_{2n},$$

和 n 个

$$\begin{vmatrix} -(1-\alpha) & \lambda-2\alpha & & & \\ -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & & & \\ & & \lambda-2\alpha & -(1-\alpha) & \\ & & -(1-\alpha) & \lambda-2\alpha & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda-2\alpha & -(1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & & & & & -(1-\alpha) & \lambda-2\alpha \end{vmatrix}_{2n}$$

因此,

$$\begin{aligned} \phi_{A_\alpha}(F_n, \lambda) &= (\lambda - 2n\alpha) [(\lambda - 2\alpha)^2 - (1-\alpha)^2]^n - 2n(1-\alpha) [(\lambda - 2\alpha) + (1-\alpha)] [(\lambda - 2\alpha)^2 - (1-\alpha)^2]^{n-1} \\ &= [(\lambda - 2\alpha) + (1-\alpha)] [(\lambda - 2n\alpha)(\lambda - \alpha - 1) - 2n(1-\alpha)] [(\lambda - 2\alpha)^2 - (1-\alpha)^2]^{n-1}. \end{aligned}$$

推论 9.

$$\text{Spec}_{A_\alpha}(F_n) = \left\{ [3\alpha - 1]^{n+1}, [\alpha + 1]^n, \left[2n\alpha + \alpha + 1 \pm \sqrt{\frac{(2n\alpha + \alpha + 1)^2 - 8n(\alpha^2 + 2\alpha - 1)}{2}} \right]^1 \right\},$$

F_n 的 A_α -能量是

$$E_\alpha(F_n) = 2n - 2n\alpha - 3\alpha + 1 + \sqrt{(2n\alpha + \alpha + 1)^2 - 8n(\alpha^2 + 2\alpha - 1)}.$$

推论 10.

$$\text{Spec}(F_n) = \left\{ [-1]^{n+1}, [1]^n, [1 \pm \sqrt{1+8n}]^1 \right\},$$

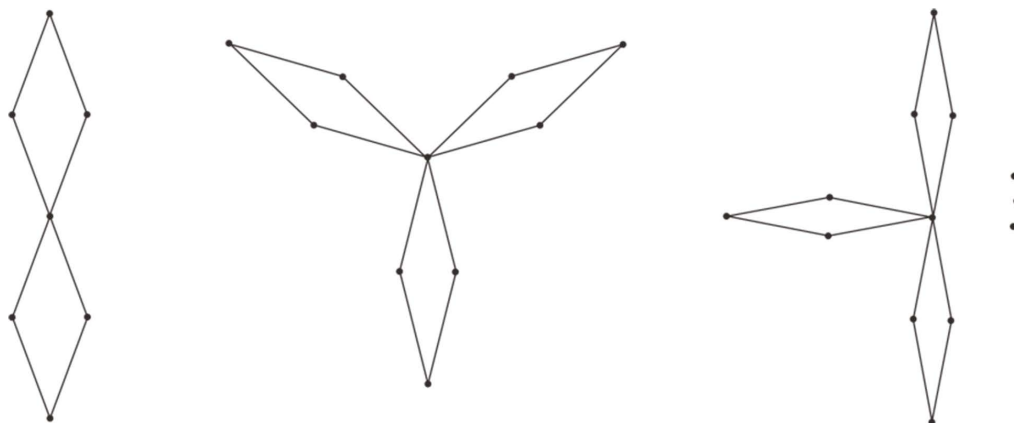
F_n 的能量是 $E(F_n) = 2n + 1 + \sqrt{1+8n}$ 。

6. 风车图 F_n 的 A_α -特征值

风车图 D_4^n 是通过 n 个 4 长圈图 C_4 与一个顶点合并得到, 有 $3n+1$ 个顶点和 $4n$ 条边, 如图 2 是风车图 D_4^2, D_4^3, D_4^n 。

定理 5. 风车图 D_4^n 的 A_α -特征多项式是

$$\phi_{A_\alpha}(D_4^n, \lambda) = [(\lambda - 2\alpha) + (1-\alpha)] [(\lambda - 2n\alpha)(\lambda - \alpha - 1) - n] [(\lambda - 2\alpha)^2 - (1-\alpha)^2]^{n-1}.$$

Figure 2. D_4^2, D_4^3, D_4^n 图 2. D_4^2, D_4^3, D_4^n

证明: 风车图 D_4^n 的度矩阵和邻接矩阵是

$$D(D_4^n) = \begin{bmatrix} 2n & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}, A(D_4^n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由 A_x -矩阵和多项式的定义得到

$$\phi_{A_x}(D_4^n, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2n\alpha & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & 0 & \cdots & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & 0 \\ -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha & 0 & -(1-\alpha) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -(1-\alpha) & 0 & \lambda - 2\alpha & -(1-\alpha) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(1-\alpha) & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - 2\alpha & 0 & -(1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - 2\alpha & -(1-\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha \end{vmatrix}_{3n+1}$$

令

$$A = \begin{bmatrix} \lambda - 2\alpha & 0 & -(1-\alpha) \\ 0 & \lambda - 2\alpha & -(1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -(1-\alpha) & 0 & 0 \\ -(1-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -(1-\alpha) & 0 & -(1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha & -(1-\alpha) \\ 0 & -(1-\alpha) & \lambda - 2\alpha \end{bmatrix}.$$

可以得到

$$\det(A) = (\lambda - 2\alpha)[(\lambda - 2\alpha)^2 - 2(1-\alpha)^2]; \det(B) = 0; \det(C) = -(1-\alpha)(\lambda - 2\alpha)^2,$$

因此,

$$\begin{aligned}
\phi_{A_\alpha}(D_4^n, \lambda) &= (\lambda - 2n\alpha) (\det(A))^n + 2n(1-\alpha) \det \begin{vmatrix} C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B & 0 & \cdots & A & 0 \\ B & 0 & \cdots & 0 & A \end{vmatrix} \\
&= (\det(A))^{n-1} [(\lambda - 2n\alpha) \det(A) + 2n(1-\alpha) \det(C)] \\
&= (\lambda - 2\alpha)^n [(\lambda - 2\alpha)^2 - 2(1-\alpha)^2]^{n-1} \\
&\quad [(\lambda - 2n\alpha) [(\lambda - 2\alpha)^2 - 2(1-\alpha)^2] - 2n(1-\alpha)^2] \\
&= (\lambda - 2\alpha)^n [(\lambda - 2\alpha)^2 - 2(1-\alpha)^2]^{n-1} \\
&\quad [\lambda^3 - 2\alpha(n+2)\lambda^2 + 2[(3n+1)\alpha^2 + 2(n-1)\alpha - (n+1)]\lambda - 8n\alpha(2\alpha-1)].
\end{aligned}$$

推论 11.

$$\text{Spec}_{A_\alpha}(D_4^n) = \left\{ [2\alpha]^n, [2\alpha \pm \sqrt{2(1-\alpha)}]^{n-1}, [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^1 \right\},$$

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}};$$

$$\lambda_2 = \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}};$$

$$\lambda_3 = \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$\text{其中 } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}; \quad p = \frac{6[(3n+1)\alpha^2 + 2(n-1)\alpha - (n+1)] - 4\alpha^2(n+2)^2}{2};$$

$$q = \frac{-216n\alpha(2\alpha-1) + 36\alpha(n+2)[(3n+1)\alpha^2 + 2(n-1)\alpha - (n+1)] - 16\alpha^3(n+2)^3}{27},$$

取 $\alpha = 0$ 时, $p = -2(n+1); q = 0$, 有 $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = \sqrt{2(n+1)}; \lambda_3 = -\sqrt{2(n+1)}$ 。

推论 12.

$$\text{Spec}(D_4^n) = \left\{ [0]^{n+1}, [\pm\sqrt{2}]^{n-1}, [\pm\sqrt{2(n+1)}]^1 \right\},$$

D_4^n 的能量是 $E(D_4^n) = 4\sqrt{2}n$ 。

7. 总结

本文从 A_α -矩阵和多项式的定义出发, 利用分块矩阵的性质, 通过对完全图, 完全二部图, 每个部分有相同点数的完全等多部图, 友谊图, 风车图等几类特殊图类的顶点分类, 利用分块矩阵的性质, 计算了它们的 A_α -特征值和能量, 并给出了删除任一边后完全平衡二部图的 A_α -能量的大小变化。但是由于对点的划分选取困难和部分分块矩阵不规律使得一般完全等多部图的结果无法给出, 由于风车图多项式的

复杂性, 其 A_α -能量的表达式尚未给出, 还可以继续研究。

参考文献

- [1] Nikiforov, V. (2017) Merging the A_α - and Q-Spectral Theories. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **11**, 81-107. <https://doi.org/10.2298/aadm1701081n>
- [2] Gutman, I. (1978) The Energy of a Graph. *Ber Math-Statist Sect Forsch Graz*, **103**, 2177-2187.
- [3] Gutman, I. and Zhou, B. (2006) Laplacian Energy of a Graph. *Linear Algebra and Its Applications*, **414**, 29-37. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.09.008>
- [4] Yuan, M.Y., Wen, F. and Wang, R.R. (2023) On the A_α -Characteristic Polynomials and the A_α -Spectra of Two Classes of Hexagonal Systems. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **43**, 266-276.
- [5] Chen, X. (2018) On ABC Eigenvalues and ABC Energy. *Linear Algebra and Its Applications*, **544**, 141-157. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.01.011>
- [6] Akbari, S., Ghodrati, A.H. and Gutman, I. (2019) On Path Energy of Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, **81**, 465-470.
- [7] 杨东, 王井玉. 完全二部图的邻接谱(英文) [J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2011, 47(3): 77-80.
- [8] 袁晓莉, 郭大昌. 完全 m 部图 $K_{m(r)}$ 的谱[J]. 广东工业大学学报, 2008, 25(2): 35-37.
- [9] 刘海琴, 邵燕灵. 几类特殊图的 ABC 能量[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2022, 56(3): 401-406.