Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(10), 4642-4658
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1310445

随机河流种群扩散模型的近优性控制

陈琳芳，许文清，巫东兰，黄梓轩

南宁师范大学数学与统计学院，广西 南宁

收稿日期：2024年9月25日；录用日期：2024年10月17日；发布日期：2024年10月25日

摘 要

本文研究了具有布朗运动的污染物对河流种群影响的时空模型的长期行为。首先在传统控制策略的基础上，创新性地引入了随机扰动，提出了一种新型的适应性控制策略，以应对环境变化带来的不确定性。证明了该模型具有全局正解和平稳分布的存在唯一性，确保了模型的理论基础，为后续分析奠定基础。然后，考虑到污染物对河流种群的影响，将河流种群扩散模型引入控制策略，利用庞特里亚金的随机极大值原理，得到了随机河流种群扩散模型的近优性控制的充要条件。

关键词

随机河流种群扩散模型，存在性，平稳分布，近优性控制

The Near-Optimal Control of the Stochastic River Population Diffusion Model

Linfang Chen, Wenqing Xu, Donglan Wu, Zixuan Huang

School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

Received: Sep. 25th, 2024; accepted: Oct. 17th, 2024; published: Oct. 25th, 2024

Abstract

This paper studies the long-term behavior of a spatiotemporal model concerning the impact of pollutants with Brownian motion on river populations. First, based on traditional control strategies, we innovatively introduce stochastic perturbations and propose a novel adaptive control strategy to address the uncertainties brought about by environmental changes. We prove the existence and uniqueness of global positive solutions and stationary distributions for the model, ensuring its theoretical foundation and laying the groundwork for subsequent analyses. Next, considering the impact of pollutants on river populations, we incorporate the river population diffusion model into control strategies and, using Pontryagin's stochastic maximum principle, derive the necessary and

文章引用: 陈琳芳, 许文清, 巫东兰, 黄梓轩. 随机河流种群扩散模型的近优性控制[J]. 应用数学进展, 2024, 13(10): 4642-4658. DOI: 10.12677/aam.2024.1310445

sufficient conditions for near-optimal control of the stochastic river population diffusion model.

Keywords

Stochastic River Population Diffusion Model, Existence, Stationary Distribution, Near-Optimal Control

1. 引言

水污染是一个全球性的环境问题，涉及多种污染物的排放，包括杀虫剂、塑料微粒、病原体和化学物质等。水体中的有毒物质不仅影响生态系统的健康，还对生物的行为、种群增长、群落结构和生态系统的完整性产生不良影响[1]-[8]。数学模型通过将个体水平上的毒性效应推断到种群水平上，开发了几种数学模型，包括矩阵种群模型[9]-[12]和常微分方程模型[12]-[15]，以研究环境毒物对受污染水生生态系统中暴露种群动态的影响。

在这些模型中，反应项描述了污染物的降解或生成；对流项表示污染物随河流向下游的传输，而扩散项描述了污染物在水体中的随机扩散。因此，这些模型的解析解和数值解可以用来解释污染物浓度在空间中的分布，以及在毒性转化和水流影响下这些浓度如何变化。Anderson [16] [17]等人提出“水流需求”这个概念，旨在确定维持生态系统完整性所需的流量的大小、时机和变异性。Lam [18] [19]等提出解决漂移悖论和水流需求的方法之一是，在扩散运动和平流之间找到平衡，从而使河流中的种群得以持续存在。在 2022 年，Zhou 和 Huang [20]等人考虑污染物对河流种群影响的时空模型，描述了在流动环境中种群与毒物之间的相互作用，他们探讨了该模型的稳态存在性和稳定性，此模型如下：

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} - a_1 u_x + u\left[r - cu - mw\right], & 0 < x < L, t > 0, \\ w_t = d_2 w_{xx} - a_2 w_x + \left[H(x) - puw - qw\right], & 0 < x < L, t > 0, \\ d_1 u_x(0,t) - a_1 u(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t > 0, \\ d_2 w_x(0,t) - a_2 w(0,t) = w_x(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \ge 0, & \\ w(x,0) = w_0(x) \ge 0, & \end{cases} \tag{1.1}$$

其中参数 d_1，d_2，a_1，a_2，r，c，m，p 和 q 都是正常数。$u(t)$ 代表种群密度，$w(t)$ 代表毒物浓度，r 代表自然生长率，m 代表毒物对种群生长长度的影响系数，c 代表竞争系数，a_1 和 a_2 分别表示种群和毒物的平流速率，d_1 和 d_2 分别表示种群和毒物的扩散系数，$H(x)$ 表示毒物输入速率，p 表示吸收系数长度，q 表示污染物的单位输出速率。

从流行病学和经济学的角度来看，必须尽量减少控制成本和污染物。Akella 等人[21]发现具有跳跃马尔可夫扰动的连续时间系统的最优控制，具有无限时域贴现成本准则，在随机情况下不易得到最优解，需要结合随机耦合、线性系统参数、稳定和不稳定特征空间、更新理论、参数优化等理论方法，才能解决之前被忽视的与具有不连续右手边的微分方程、最优控制问题的奇异性、动态规划方程的平滑性和有效性等相关的数学困难。因此，在实际环境中，找到准确的最优控制是不易的。此外，最优控制可以通过伴随方程和状态方程得到，但其精确解可能不容易得到。这使得很难实现对河流种群扩散的准确控制。

因此，我们将研究控制毒物传播的接近最优的控制策略，同时考虑随机扰动和空间异质性的情况下，推导出一种新的随机河流种群扩散模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t)=\left(d_1u_{xx}-a_1u_x+u(t)\left[r-cu(t)-mw(t)\right]\right)\mathrm{d}t+\zeta_1u(t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}w(t)=\left(d_2w_{xx}-a_2w_x+\left[H(x)-pu(t)w(t)-qw(t)\right]\right)\mathrm{d}t+\zeta_2w(t)\mathrm{d}B_2(t), \\ u(x,0)=u_0(x)\geq 0, \\ w(x,0)=w_0(x)\geq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

为简单起见，令 $M(x,t)=\left(X_1(x,t),X_2(x,t)\right)=\left(u(x,t),w(x,t)\right)$，模型(1.2)也可以重写为

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(x,t)=\left(d_1X_{1xx}-a_1X_{1x}+X_1(x,t)\left[r-cX_1(x,t)-mX_2(x,t)\right]\right)\mathrm{d}t+\zeta_1X_1(x,t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}X_2(x,t)=\left(d_2X_{2xx}-a_2X_{2x}+\left[H(x)-pX_1(x,t)X_2(x,t)-qX_2(x,t)\right]\right)\mathrm{d}t+\zeta_2X_2(x,t)\mathrm{d}B_2(t), \\ X_i(x,0)=X_i^0(x)\geq 0, i=1,2,\ x\in\Gamma. \end{cases} \tag{1.3}$$

假设 $\mathcal{F}$ 是一个非线性算子，由

$$\mathcal{F}\begin{pmatrix} X_1(x,t) \\ X_2(x,t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1X_{1xx}-a_1X_{1x}+X_1(x,t)\left[r-cX_1(x,t)-mX_2(x,t)\right]+\zeta_1X_1(x,t)\mathrm{d}B_1(t) \\ d_2X_{2xx}-a_2X_{2x}+\left[H(x)-pX_1(x,t)X_2(x,t)-qX_2(x,t)\right]+\zeta_2X_2(x,t)\mathrm{d}B_2(t) \end{pmatrix}.$$

令

$$M(x,t):=\begin{pmatrix} X_1(x,t) \\ X_2(x,t) \end{pmatrix}, M_0:=M(x,0)=\begin{pmatrix} X_1^0(x) \\ X_2^0(x) \end{pmatrix}.$$

然后，系统(1.3)可以写成以下抽象的柯西问题：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M(x,t)=\mathcal{F}M(x,t)。$$

2. 正解的唯一性

本小节，主要考虑随机河流种群扩散模型(1.3)的解是唯一的，正的且是有界的解。

设 $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T},P\right)$ 是一个完整的过滤概率空间，它定义了标准布朗运动 $B_i(t)(i=1,2)$，其中 $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ 是 $B(t)$ 的自然过滤，让

$$\mathbb{K}=\mathcal{H}^{-1}(\Gamma)=\left\{\varphi\,|\,\varphi\in L^2(\Gamma),\frac{\partial\varphi}{\partial x}\in L^2(\Gamma)\right\}.$$

其中 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ 是广义偏导数，符号 $\mathbb{K}'=\mathcal{H}^{-1}(\Gamma)$ 是 $\mathbb{K}$ 的对偶空间；我们用 $\mathbb{K}$ 中的 $\|\cdot\|$ 表示范数；$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{K}$ 和 $\mathbb{K}'$ 之间的对偶性乘积。$|\cdot|$ 表示欧几里得空间的范数。设 $\mathcal{C}_b(\mathbb{K})$ 表示 $\mathbb{K}$ 上所有有界连续实值函数的集合；$\mathcal{P}(\mathbb{K})$ 是所有概率在 $\left(\Gamma,\mathfrak{B}(\mathbb{K})\right)$ 上的空间，其中 $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 Borel 代数。f_x 表示 f 对 x 的偏导数；$\mathcal{X}$ 表示集合 S 的指示函数，$X+Y$ 表示集合 $x+y$，对于任意集合 $X+Y, x\in X, y\in Y$。

为了证明我们的结果，我们给出了以下定义，引理和定理。我们首先引入一个引理来建立系统(1.3)解的存在唯一性。

引理 2.1. 对于任何初始值 $\left(X_1^0,X_2^0\right)$，则随机河流种群扩散模型(1.3)的解 $\left(X_1(x,t),X_2(x,t)\right)$ 存在，且满足

$$\limsup_{t\to\infty}\int_\Gamma\left[X_1(x,t)+X_2(x,t)\right]\mathrm{d}x<C.$$

证明：首先定义

$$W(t)=\int_\Gamma\left[X_1(x,t)+X_2(x,t)\right]\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W(t)}{\partial t}=\int_\Gamma\left[\frac{\partial X_1(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial X_2(x,t)}{\partial t}\right]\mathrm{d}x\\&\le\int_\Gamma\left(rX_1(x,t)+H(x)-qX_2(x,t)+\zeta_1X_1(x,t)\mathrm{d}B_1(t)+\zeta_2X_2(x,t)\mathrm{d}B_2(t)\right)\mathrm{d}x\\&\le H(x)|\Gamma|+AW(t)+\int_\Gamma\left(\zeta_1X_1(x,t)\mathrm{d}B_1(t)+\zeta_2X_2(x,t)\mathrm{d}B_2(t)\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $A=\min\{-r,q\}$，$|\Gamma|$ 表示 Γ 的体积。$N(x)$ 是以下随机微分方程的解

$$\mathrm{d}N(x)=\left[H(x)|\Gamma|-AN(t)\right]\mathrm{d}t+\int_\Gamma\zeta_1X_1(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}B_1(t)+\int_\Gamma\zeta_2X_2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}B_2(t),\tag{2.1}$$

并设 $N(0)=W(0)$，通过常数变易法，得到方程(2.1)的解为

$$N(t)=\frac{H(x)|\Gamma|}{A}+\left(N(0)-\frac{H(x)|\Gamma|}{A}\right)e^{-At}+L(t),$$

其中

$$L(t)=\int_0^t e^{-A(t-s)}\int_\Gamma\zeta_1X_1(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}B_1(s)+\int_0^t e^{-A(t-s)}\int_\Gamma\zeta_2X_2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}B_2(s).$$

通过随机比较定理，得到 $L(0)=0$，并且 $L(t)$ 是一个连续的局部鞅；可以得到 $W(t)\le N(t)$。接下来，$N(t)$ 的定义如下：

$$N(t)=N(0)+\frac{H(x)|\Gamma|}{A}\left(1-e^{-At}\right)+N(0)A\left(1-e^{-At}\right)+L(t).$$

当 $t=0$ 时，则有

$$\frac{H(x)|\Gamma|}{A}\left(1-e^{-At}\right)=0,\ \ N(0)\left(1-e^{-At}\right)=0,$$

且它们是连续适应增加过程对于 $t\ge0$。应用非负半鞅收敛定理[22]，可以得到 $\lim_{t\to\infty}N(t)<\infty$。因此，存在一个正常数 C，使 $\limsup_{t\to\infty}W(t)<C$。$C$ 表示一个通用的正实常数，其值在不同的情况下可能会发生变化。下面的情况也是如此。

通过引理 2.1 保证了系统(1.3)解的存在性。这对于证明正解的唯一性很重要，我们在定理 2.1 中证明了这一点。

定理 2.1. 对于任意初始值 $\left(X_1^0,X_2^0\right)$，则随机河流种群扩散模型(1.3)存在唯一的正解 $\left(X_1(x,t),X_2(x,t)\right)$。

证明：随机河流种群扩散模型(1.3)的系数满足局部 Lipschitz 条件，因此，对于任意初始值 $\left(X_1^0,X_2^0\right)$ 在 $t\in[0,\tau_e)$ 处存在一个唯一的局部解 $\left(X_1(x,t),X_2(x,t)\right)\in R_+^3$，其中 τ_e 为爆炸时间。假设 h_0 足够大和 $h_0>1$，使得 $|M(x,t)|$ 位于 $t\in[0,\tau_e)$ 的区间 $\left[\frac{1}{h},h_0\right]$ 内。

对于每个整数 $h>h_0$，定义停止时间

$$\tau_h=\inf\left\{t\in[0,\tau_e):\min_{x\in\Gamma}\left\{X_1(x,t),X_2(x,t)\right\}\le\frac{1}{h}\text{ or }\max_{x\in\Gamma}\left\{X_1(x,t),X_2(x,t)\right\}\ge h\right\}.$$

τ_h 是随着 $h\to\infty$ 增加，让 $\tau_\infty=\lim_{h\to\infty}\tau_h$，然后 $\tau_\infty\le\tau_e$。接下来，我们只需要证明 $\tau_\infty=\infty$ a.s..因此，让我们考虑一个函数 $H(M(x,t))=\|X_1(x,t)\|^2+\|X_2(x,t)\|^2$，根据伊藤公式，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left(\|X_1(x,t)\|^2+\|X_2(x,t)\|^2\right)\\
&=2\langle X_1(x,t),\mathrm{d}X_1(x,t)\rangle+2\langle X_2(x,t),\mathrm{d}X_2(x,t)\rangle+\zeta_1^2(t)\|X_1(x,t)\|^2\mathrm{d}t+\zeta_2^2(t)\|X_2(x,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\quad+\left\{2\langle X_1(x,t),d_1X_{1xx}-a_1X_{1x}+X_1(x,t)[r-cX_1(x,t)-mX_2(x,t)]\rangle\right.\\
&\quad+2\langle X_2(x,t),d_2X_{2xx}-a_2X_{2x}+[H(x)-pX_2(x,t)X_1(x,t)-qX_2(x,t)]\rangle\\
&\quad\left.+\zeta_1^2(t)\|X_1(x,t)\|^2+\zeta_2^2(t)\|X_2(x,t)\|^2\right\}\mathrm{d}t\\
&\quad+2\langle X_1(x,t),\zeta_1(t)X_1(x,t)\mathrm{d}B_1(t)\rangle+2\langle X_2(x,t),\zeta_2(t)X_2(x,t)\mathrm{d}B_2(t)\rangle.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

然后让 $h>h_0$ 和 $T>0$，将(2.2)的两边从 0 积分到 $\tau_h\wedge T$，并取期望，利用引理 2.1 和基本不等式，得到

$$\begin{aligned}
&E\left[\|X_1(x,\tau_h\wedge T)\|^2+\|X_2(x,\tau_h\wedge T)\|^2\right]-\left[\|X_1^0\|^2+\|X_2^0\|^2\right]\\
&\le E\int_0^{\tau_h\wedge T}\left\{2\left[rX_1^2(x,t)-cX_1^3(x,t)-m(X_1(x,t),X_1(x,t)X_2(x,t))\right.\right.\\
&\quad\left.+H(x)X_2(x,t)-p(X_2(x,t),X_1(x,t)X_2(x,t))-qX_2^2(x,t)\right]\\
&\quad\left.+\zeta_1^2(t)\|X_1(x,t)\|^2+\zeta_2^2(t)\|X_2(x,t)\|^2\right\}\mathrm{d}t\\
&\le M_1+M_2E\int_0^{\tau_h\wedge T}\left[\|X_1(x,\tau_h\wedge T)\|^2+\|X_2(x,\tau_h\wedge T)\|^2\right]\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

其中 $M_1=\max\left\{H(x)^2\tau_n\right\}$，$M_2=\max\left\{C_1+\zeta_1^2,1+\zeta_2^2\right\}$，运用格朗沃尔不等式，可获得

$$E\left(\|X_1(x,\tau_h\wedge T)\|^2+\|X_2(x,\tau_h\wedge T)\|^2\right)\le\left[\|X_1^0\|^2+\|X_2^0\|^2+M_1\right]e^{M_2T}.\tag{2.3}$$

当 $h\to\infty$ 时，有

$$E\left(\|X_1(x,t)\|^2+\|X_2(x,t)\|^2\right)\le\left[\|X_1^0\|^2+\|X_2^0\|^2+M_1\right]e^{M_2T}.$$

定义

$$\mu_h=\inf_{\|M(x,t)\|>h,0<t<\infty}\left[\|X_1(x,t)\|^2+\|X_2(x,t)\|^2\right],\forall h>h_0,$$

结合(2.3)和(2.4)，可得

$$\mu_hP(\tau_h\le T)\le\left[\|X_1^0\|^2+\|X_2^0\|^2+M_1\right]e^{M_2T}.$$

由于 $\lim_{h\to\infty}\mu_h=\infty$，让 $h\to\infty$，可以得到 $P(\tau_h\le T)=0$，则

$$P(\tau_\infty>T)=1。$$

因此，定理 2.1 得证。

3. 平稳分布

本小节，主要研究随机河流种群扩散模型(1.3)的解平稳分布的存在性和唯一性。

定义 3.1 [23]方程(1.3)的 $M(x,t), t\ge 0$ 的平稳分布被定义为一个概率测度 $\lambda\in\mathcal{P}(\mathbb{K})$ 满足

$$\lambda(f)=\lambda(P_t f),\ t\ge 0,$$

其中

$$\lambda(f):=\int_{\mathbb{K}} f(\phi)\lambda(\mathrm{d}\phi),\ P_t f(\phi):=Ef\left(M(x,t,\phi)\right),\ f\in\mathcal{C}_b(\mathbb{K}).$$

对于 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathcal{P}(\mathbb{K})$，在 $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ 上定义一个度量为

$$\tilde{d}(\lambda_1,\lambda_2)=\sup_{f\in\mathcal{M}}\left|\int_{\mathbb{K}} f(\phi)\lambda_1(\mathrm{d}\phi)-\int_{\mathbb{K}} f(\phi)\lambda_2(\mathrm{d}\phi)\right|,$$

其中

$$\mathcal{M}:=\left\{f:\mathbb{K}\to\mathcal{R},\left|f(\phi)-f(\varphi)\right|\le|\phi-\varphi| \text{ for any } \phi,\varphi\in\mathbb{K} \text{ and } \left|f(\cdot)\right|\le 1\right\}.$$

因此，$\mathcal{P}(\mathbb{K})$ 在度量 $\tilde{d}(\cdot,\cdot)$ 下是完备的。

引理 3.1 [23]假设对于 $(\mathbb{K})$ 的任意有界子集 U，$m\ge 1$，

(i) $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{\phi,\varphi\in U} E\left\|M(x,t,\phi)-M(x,t,\varphi)\right\|_{\mathbb{K}}^m=0$；

(ii) $\limsup\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{\varphi\in U} E\left\|M(x,t,\varphi)\right\|_{\mathbb{K}}^m<\infty$。

对于任何初始值 ϕ,φ，系统(1.3)的 $M(x,t,\varphi)$ 过程具有平稳分布。

定理 3.1 对于任何 $\eta>0$，则随机河流种群扩散模型(1.3)的解满足

$$E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1(x,t)\right\|^\eta+\left\|X_2(x,t)\right\|^\eta\right)\le C_1,$$

式中 $C_1=2\left(\left\|X_1^0\right\|^\eta+\left\|X_2^0\right\|^\eta+m^\eta T\right)e^{2m_1T}$ 是一个常数，其中 $m=\max\left\{r,H(x)\right\}$，

$$m_1=\max\left\{r\eta+\eta-1+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2+8\eta^2\zeta_1^2,\eta-1+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2+8\eta^2\zeta_2^2\right\}.$$

证明： 令 $\eta\ge 1$，运用伊藤公式，则有

$$\begin{aligned}&\left\|X_1(x,t)\right\|^\eta+\left\|X_2(x,t)\right\|^\eta\le\left\|X_1^0\right\|^\eta+\left\|X_2^0\right\|^\eta\\&+\int_0^t\Big\{\eta\left\|X_1(x,s)\right\|^{\eta-2}\left\langle X_1(x,s),d_1X_{1xx}-a_1X_{1x}+X_1(x,s)\left[r-cX_1(x,s)-mX_2(x,s)\right]\right\rangle\\&+\eta\left\|X_2(x,s)\right\|^{\eta-2}\left\langle X_2(x,s),d_2X_{2xx}-a_2X_{2x}+H(x)-pX_1(x,s)X_2(x,s)-qX_2(x,s)\right\rangle\\&+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2\left\|X_1(x,t)\right\|^\eta+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\left\|X_2(x,s)\right\|^\eta\Big\}\mathrm{d}s\\&+\int_0^t\eta\zeta_1(s)\left\|X_1(x,s)\right\|^\eta\mathrm{d}B_1(s)+\int_0^t\eta\zeta_2(s)\left\|X_2(x,s)\right\|^\eta\mathrm{d}B_2(s),\end{aligned}\tag{3.1}$$

对式子(3.1)取期望，并运用杨式不等式，获得

$$\begin{aligned}&E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1(x,t)\right\|^\eta+\left\|X_2(x,t)\right\|^\eta\right)\\&\le E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1^0\right\|^\eta+\left\|X_2^0\right\|^\eta\right)+E\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\Big\{\eta\left\|X_1(x,s)\right\|^{\eta-2}\left\langle X_1(x,s),rX_1(x,s)\right\rangle\end{aligned}$$

$$+\eta\left\|X_2(x,s)\right\|^{\eta-2}\left\langle X_2(x,s),H(x)\right\rangle+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2\left\|X_1(x,s)\right\|^{\eta}$$
$$+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\left\|X_2(x,s)\right\|^{\eta}\Big\}\mathrm{d}s+E\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\eta\zeta_1(s)\left\|X_1(x,s)\right\|^{\eta}\mathrm{d}B_1(s)$$
$$+E\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\eta\zeta_2(s)\left\|X_2(x,s)\right\|^{\eta}\mathrm{d}B_2(s),$$

从而，有

$$\begin{aligned}&E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1(x,t)\right\|^{\eta}+\left\|X_2(x,t)\right\|^{\eta}\right)\\&\le E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1^0\right\|^{\eta}+\left\|X_2^0\right\|^{\eta}\right)+E\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\left\{\left(r\eta+\eta-1+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2\right)\left\|X_1(x,s)\right\|^{\eta}\right.\\&\left.+\left(m^{\eta}+\left(\eta-1+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\right)\right)\left\|X_2(x,s)\right\|^{\eta}\right\}\mathrm{d}s\\&+E\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\eta\zeta_1(s)\left\|X_1(x,s)\right\|^{\eta}\mathrm{d}B_1(s)+E\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\eta\zeta_2(s)\left\|X_2(x,s)\right\|^{\eta}\mathrm{d}B_2(s),\end{aligned}$$

此外，运用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，可获得

$$\begin{aligned}&E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1(x,t)\right\|^{\eta}+\left\|X_2(x,t)\right\|^{\eta}\right)\\&\le E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1^0\right\|^{\eta}+\left\|X_2^0\right\|^{\eta}\right)+E\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\left\{\left(r\eta+\eta-1+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2\right)\left\|X_1(x,s)\right\|^{\eta}\right.\\&\left.+\left(m^{\eta}+\left(\eta-1+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\right)\right)\left\|X_2(x,s)\right\|^{\eta}\right\}\mathrm{d}s\\&+4E\sup_{0\le t\le T}\left\|X_1(x,t)\right\|^{\frac{\eta}{2}}\left(\int_0^t\eta^2\zeta_1^2(s)\left\|X_1(x,s)\right\|^{\eta}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\\&+4E\sup_{0\le t\le T}\left\|X_2(x,t)\right\|^{\frac{\eta}{2}}\left(\int_0^t\eta^2\zeta_2^2(s)\left\|X_2(x,s)\right\|^{\eta}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

再次运用杨氏不等式，得到

$$\begin{aligned}&E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1(x,t)\right\|^{\eta}+\left\|X_2(x,t)\right\|^{\eta}\right)\\&\le E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1^0\right\|^{\eta}+\left\|X_2^0\right\|^{\eta}\right)+m_1E\sup_{0\le t\le T}\int_0^T\left\{\left\|X_1(x,t)\right\|^{\eta}+\left\|X_2(x,t)\right\|^{\eta}\right\}\mathrm{d}s\\&+m^{\eta}T+\frac{1}{2}E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1(x,t)\right\|^{\eta}+\left\|X_2(x,t)\right\|^{\eta}\right),\end{aligned}$$

其中

$$m=\max\left\{r,H(x)\right\},m_1=\max\left\{r\eta+\eta-1+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2+8\eta^2\zeta_1^2,\eta-1+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2+8\eta^2\zeta_2^2\right\}.$$

运用格朗沃不等式，获得

$$E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1(x,t)\right\|^{\eta}+\left\|X_2(x,t)\right\|^{\eta}\right)\le 2\left(\left\|X_1^0\right\|^{\eta}+\left\|X_2^0\right\|^{\eta}+m^{\eta}T\right)e^{2m_1T}:=C_1,$$

对于 $0<\eta<1$，根据柯西－施瓦茨不等式，有

$$E\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1(x,t)\right\|^{\eta}+\left\|X_2(x,t)\right\|^{\eta}\right)\le\left(E1^{\frac{2}{2-\eta}}\right)^{\frac{2-\eta}{2}}\left(E\left(\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|X_1(x,t)\right\|^{\eta}+\left\|X_2(x,t)\right\|^{\eta}\right)\right)^{\frac{2}{\eta}}\right)^{\frac{\eta}{2}}\le C_1.$$

定理证明完毕。

定理 3.2. 假设存在一个常数 $\eta>0$，使得 $m_2<0$，则对于 $M(x,t)=\left(X_1(x,t),X_2(x,t)\right),t\ge 0$，随机河流种群扩散模型(1.3)存在一个唯一的平稳分布 $\lambda\in\mathcal{P}(\mathbb{K})$，其中

$$m_2=\max\left\{-\underline{C}(2c+m)-\bar{C}p\eta+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2,-\bar{C}p\eta-q\eta+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\right\},$$

$$\underline{C}=\min_{t>0,x\in\Gamma}\left\{X_1(x,t,\varphi),X_2(x,t,\varphi)\right\},\bar{C}=\max_{t>0,x\in\Gamma}\left\{X_1(x,t,\varphi),X_2(x,t,\varphi)\right\}.$$

证明：对于 $\eta>1,t>0$，和初始值 $\varphi,\phi\in\Gamma$，让

$$\begin{aligned}F(x,t,\varphi,\phi)&=e^{\iota t}\left(\left\|X_1(x,t,\varphi)-X_1(x,t,\phi)\right\|^{\eta}\right)+\left(\left\|X_2(x,t,\varphi)-X_2(x,t,\phi)\right\|^{\eta}\right)\\&=e^{\iota t}\left(\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}+\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\right)=e^{\iota t}\left\|e(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}.\end{aligned}$$

利用引理 2.1，结合伊藤公式，得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}F(x,t,\varphi,\phi)\le\iota e^{\iota t}\left\|e(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t\\&+e^{\iota t}\left\{\eta\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta-2}e_1(x,t,\varphi,\phi),re_1(x,t,\varphi,\phi)-c\left(X_1^2(x,t,\varphi)-X_1^2(x,t,\phi)\right)\right\rangle\\&\left\langle-m\left(X_1(x,t,\varphi)X_2(x,t,\varphi)-X_1(x,t,\phi)X_2(x,t,\phi)\right)\mathrm{d}t\right.\\&+\eta\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta-2}e_2(x,t,\varphi,\phi),-p\left(X_1(x,t,\varphi)X_2(x,t,\varphi)-X_1(x,t,\phi)X_2(x,t,\phi)\right)\right\rangle\\&\left\langle-qe_2(x,t,\varphi,\phi)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t\right.\\&+\eta\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta-2}\left\langle e_1(x,t,\varphi,\phi),\zeta_1e_1(x,t,\varphi,\phi)\mathrm{d}B_1(t)\right\rangle\\&\left.+\eta\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta-2}\left\langle e_2(x,t,\varphi,\phi),\zeta_2e_2(x,t,\varphi,\phi)\mathrm{d}B_2(t)\right\rangle\right\}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

因此，对上式(3.2)取期望，获得

$$\begin{aligned}&E\mathrm{d}F(x,t,\varphi,\phi)\le E\iota e^{\iota t}\left\|e(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t\\&+Ee^{\iota t}\left\{\eta\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta-2}e_1(x,t,\varphi,\phi),re_1(x,t,\varphi,\phi)-c\left(X_1^2(x,t,\varphi)-X_1^2(x,t,\phi)\right)\right.\\&-m\left(X_1(x,t,\varphi)X_2(x,t,\varphi)-X_1(x,t,\phi)X_2(x,t,\phi)\right)\mathrm{d}t\\&+\eta\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta-2}e_2(x,t,\varphi,\phi),-p\left(X_1(x,t,\varphi)X_2(x,t,\varphi)-X_1(x,t,\phi)X_2(x,t,\phi)\right)\\&-qe_2(x,t,\varphi,\phi)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t\\&\left.+\frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t\right\}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

根据柯西–施瓦茨不等式，有

$$
\begin{aligned}
E\mathrm{d}F(x,t,\varphi,\phi) \le{}& E\iota e^{\iota t}\left\|e(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t + Ee^{\iota t}\Big\{ r\eta\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t - 2\underline{C}c\eta\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t \\
& - m\underline{C}\eta\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta-1}\left(\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\| + \left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|\right)\mathrm{d}t \\
& - \bar{C}p\eta\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta-1}\left(\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\| + \left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|\right)\mathrm{d}t - q\eta\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\mathrm{d}t \Big\}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

其中初始值为 $\varphi,\phi \in \Omega, t > 0, x \in \Omega$，

$$
\underline{C} = \min_{t>0,x\in\Gamma}\left\{X_1(x,t,\varphi), X_2(x,t,\varphi)\right\}, \bar{C} = \max_{t>0,x\in\Gamma}\left\{X_1(x,t,\varphi), X_2(x,t,\varphi)\right\}.
$$

然后，取上确界，结合应用杨氏不等式，得到

$$
\begin{aligned}
& E\sup_{0\le t\le T} dF(x,t,\varphi,\phi) \\
& \le E\sup_{0\le t\le T} e^{\iota t}\left[\left(\iota - \underline{C}\eta(2c+m) - \bar{C}p\eta + \frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2\right)\left\|e_1(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\right. \\
& \left. + \left(\iota - \bar{C}p\eta - q\eta + \frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\right)\left\|e_2(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

对式(3.5)的两边进行积分，运用格朗沃不等式，获得

$$
E\sup_{0\le t\le T}\left\|e(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta} \le E\sup_{0\le t\le T}\left[\left\|e(x,0,\varphi,\phi)\right\|^{\eta}\right]e^{m_2 t},
$$

其中

$$
m_2 = \max\left\{-\underline{C}(2c+m) - \bar{C}p\eta + \frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_1^2, -\bar{C}p\eta - q\eta + \frac{1}{2}\eta(\eta-1)\zeta_2^2\right\}.
$$

如果 $m_2 < 0$，则有

$$
\lim_{t\to\infty} E\sup_{0\le t\le T}\left\|e(x,t,\varphi,\phi)\right\|^{\eta} = 0.
$$

因此，条件(i)成立。平稳分布的唯一性得证。

如果 $\bar{\lambda} \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ 也是 $M(x,t) = (X_1(x,t), X_2(x,t)), t \ge 0$ 的平稳分布。将 $f \in C_{LB}(\mathbb{K})$ 指定为 $\mathbb{K}$ 上所有有界函数和利普希茨连续函数的族，由此得到

$$
\left|\lambda(f) - \bar{\lambda}(f)\right| \le \int_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}\left|P_t f(\varphi) - P_t f(\phi)\right|\lambda(\mathrm{d}\varphi)\bar{\lambda}(\mathrm{d}\phi) \le Ce^{-\iota t}, t \ge 0,
$$

对于某些常数 $C > 0$。它表示当 $t \to \infty$ 时平稳分布的唯一性。

4. 近优性控制

在本节中，主要研究随机河流种群扩散模型(1.3)的近优性控制问题。控制毒物的费用给社会造成了巨大的经济负担。然而，精确的近优性控制可能只存在于某些特殊情况下，

研究近优性控制问题具有重要的现实意义。下面将 $u(x,t)$ 作为控制变量。$|\cdot|$ 表示欧几里得空间的范数。系统(1.3)可以改写为：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(x,t) = \left(d_1 X_{1xx} - a_1 X_{1x} + X_1(x,t)\left[r - cX_1(x,t) - mX_2(x,t)\right]\right)\mathrm{d}t + \zeta_1 X_1(x,t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}X_2(x,t) = \left(d_2 X_{2xx} - a_2 X_{2x} + \left[H(x) - pX_1(x,t)X_2(x,t) - qX_2(x,t)\right]\right. \\ \qquad \left. - u(x,t)X_2(x,t)\right)\mathrm{d}t + \zeta_2 X_2(x,t)\mathrm{d}B_2(t), \\ X_i(x,0) = X_i^0(x), i = 1,2, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $u(x,t)$ 表示在一个单位时间内被消除的病毒的比例。目标函数为

$$J\left(0,M_0;u(x,t)\right) = E\left\{\int_0^T \int_\Gamma \left(A_1 u^2(x,t) + A_2 X_2(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}, \tag{4.2}$$

其中，$A_i(i=1,2)$ 被视为一个权重因子。$\int_0^T \int_\Gamma \left(A_1 u^2(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 给出了使用控制策略的总成本，而 $\int_0^T \int_\Gamma \left(A_2 X_2(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 表示该时间段内被感染病毒的总数。最优控制问题是找到一个允许的控制，使目标函数 $J\left(0,M_0;u(x,t)\right)$ 最小化的允许控制，其中任意 $u(x,t) \in \mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma \times [0,T]\right)$。该值函数被定义为

$$V\left(0,M_0\right) = \min_{u(x,t)} \in \upsilon_{ad} J\left(0,M_0;u(x,t)\right). \tag{4.3}$$

定义 4.1. (近优性控制[25])由 ε 参数化的可允许对族 $\left\{u^\varepsilon(x,t)\right\}$ 和家族中的任何元素 u (x, t)都被称为邻近最优，如果

$$\left|J\left(0,M_0;u^\varepsilon(x,t)\right) - V\left(0,M_0;u(x,t)\right)\right| \le r(\varepsilon),$$

对于足够小的 ε 成立，其中 r 是满足 $r(\varepsilon) \to 0$ 的 $\varepsilon \to 0$ 的 ε 函数。估计 $r(\varepsilon)$ 称为误差界。

定义 4.2. 设 $\Xi \in \mathbb{R}^n$ 是一个区域，$\varphi : \Xi \in \mathbb{R}^n$ 是一个局部利普希茨连续函数。ϕ 在 $\xi \in \Xi$ 处的广义梯度定义为

$$\partial\varphi(\xi) = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^n \mid \langle \zeta, \theta \rangle \le \overline{\lim_{y \to \xi, y \in \Xi, h \downarrow 0}} \frac{\varphi(y + h\theta) - \varphi(y)}{h}\right\}.$$

4.1. 伴随方程和一些先验估计

在本节中，为了给出具有随机河流种群扩散模型(1.3)的近优性控制的充要条件。首先，让我们定义一个哈密顿函数 $H : R_+^3 \times \mathcal{U}_{ad} \times R_+^3 \times R_+^3 \to \mathbb{R}$，如下：

$$\begin{aligned} & H\left(X(u,t), u(x,t), p(u,t), q(x,t)\right) \\ & = \left(d_1 X_{1xx} - a_1 X_{1x} + X_1(x,t)\left[r - cX_1(x,t) - mX_2(x,t)\right]\right) p_1(x,t) \\ & \quad + \left(d_2 X_{2xx} - a_2 X_{2x} + \left[H(x) - pX_1(x,t)X_2(x,t) - qX_2(x,t) - u(x,t)X_2(x,t)\right]\right) p_2(x,t) \\ & \quad - \zeta_1 X_1(x,t) q_1(x,t) - \zeta_2 X_2(x,t) q_2(x,t) + A_1 u^2(x,t) + A_2 X_2(x,t). \end{aligned} \tag{4.4}$$

给出了度量 d

$$d\left(u(x,t), \tilde{u}(x,t)\right) = E\left\{\int_0^T \int_\Gamma y^\varepsilon(x,t)\left|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}, \tag{4.5}$$

其中

$$y^\varepsilon(x,t) = 1 + \sum_{i=1}^{2}\left|p_i^\varepsilon(x,t)\right| + \sum_{i=1}^{2}\left|q_i^\varepsilon(x,t)\right| > 1. \tag{4.6}$$

为了证明 H_u 可以用 ε 估计，我们在 $\mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma \times [0,T]\right)$ 上定义了一个新的度量 d，用来推导出模型(4.1)近优性控制的充分条件。由于控制区域是封闭的，在度量被赋予后，$\mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma \times [0,T]\right)$ 成为一个完整的矩阵空

间。为了得到必要的具有模型(4.1)的近优性控制条件，新的度量 d' 在 $\mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$ 上被定义：

$$d'\left(u(x,t),\tilde{u}(x,t)\right)=E\left[mes\left\{(x,t)\in\Gamma\times[0,T]:u(x,t)\neq\tilde{u}(x,t)\right\}\right],$$

其中，mes 代表勒贝格测度。与参考文献[26]类似，我们知道 $\upsilon_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$ 是 d' 下的一个完备空间。

引理 4.1. 对于任何 $\eta>0$，如果 $u(x,t)\in\upsilon_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$，则

$$E\sup_{0\le t\le T}\left\{\int_\Gamma\left|X_1(x,t)\right|^\eta+\left|X_2(x,t)\right|^\eta\mathrm{d}x\right\}\le C,$$

其中 C 是一个常数。

证明：引理 4.1 的证明方法与引理 2.1 相似，此处省略。

伴随方程对推导近优性控制的充要条件起着至关重要的作用。接下来，我们介绍伴随方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}p_1(x,t)=-\Big[\big(r(x)-2c(x)X_1(x,t)-m(x)X_2(x,t)\big)p_1(x,t)\\ \qquad\qquad -p(x)X_2(x,t)p_2(x,t)-\zeta_1q_1(x,t)\Big]\mathrm{d}t+q_1(x,t)\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}p_2(x,t)=-\Big[-m(x)X_1(x,t)p_1(x,t)+\big(-p(x)X_1(x,t)-q(x)-u(x,t)\big)p_2(x,t)\\ \qquad\qquad -\zeta_2q_2(x,t)\Big]\mathrm{d}t+q_2(x,t)\mathrm{d}B_2(t),\\ P_i(T,x)=0,\quad i=1,2.\end{cases}\tag{4.7}$$

引理 4.2. 对于任何 $u(x,t)\in\upsilon_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$，则存在

$$\left\{\sum_{i=1}^{2}E\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_\Gamma\left|p_i(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\right\}+\sum_{i=1}^{2}E\left\{\int_0^T\int_\Gamma\left|q_i(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}\le C,\right.\tag{4.8}$$

其中 C 是一个常数。

证明：引理 4.2 的证明类似于参考文献[27]中的证明；因此，在这里省略。

下面的引理将表示在度量 d' 下的状态过程 $\left(X_1(x,t),X_2(x,t)\right)$ 的连续性。

引理 4.3. 对于 $\eta\ge0$ 和 $0<\mathcal{K}<1$，且满足 $\mathcal{K}\eta<1$，存在一个常数的 $C=C(\eta,\mathcal{K})$，使得对于任何 $u(x,t),\tilde{u}(x,t)\in\upsilon_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$ 以及相应的轨迹 $X(x,t),\tilde{X}(x,t)$，则满足

$$E\sup_{0\le t\le r}\left\{\int_\Gamma\left|X_1(x,t)-\tilde{X}_1(x,t)\right|^{2\eta}+\left|X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\right|^{2\eta}\mathrm{d}x\right\}\le C\left[d'\left(u(x,t),\tilde{u}(x,t)\right)^{\mathcal{K}\eta}\right].$$

证明：当 $\eta>1$ 时，对于任何 $r>0$，$\left|X_1(x,t)-\tilde{X}_1(x,t)\right|^{2\eta}$ 的估计值如下：

$$E\left\{\sup_{0\le t\le r}\left|X_1(x,t)-\tilde{X}_1(x,t)\right|^{2\eta}\right\}\mathrm{d}x\le CE\left\{\int_0^r\int_\Gamma\left(\left|X_1(x,t)-\tilde{X}_1(x,t)\right|^{2\eta}+\left|X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\right|^{2\eta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\},$$

同理，可得

$$\begin{aligned}&E\left[\sup_{0\le t\le r}\left|X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\right|^{2\eta}\right]\mathrm{d}x\\&\le CE\int_0^r\int_\Gamma\left(\left|X_1(x,t)-\tilde{X}_1(x,t)\right|^{2\eta}+\left|X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\right|^{2\eta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+Cd'\left(u(x,t),\tilde{u}(x,t)\right)^{\mathcal{K}\eta}.\end{aligned}$$

运用柯西－施瓦兹不等式，有

$$E\int_0^r\chi_{u\neq\tilde{u}}\mathrm{d}t\le C\left[E\int_0^r1\mathrm{d}t\right]^{1-\mathcal{K}\eta}\left[E\int_0^r\chi_{u\neq\tilde{u}}\mathrm{d}t\right]^{\mathcal{K}\eta}\le Cd'\left(u(x,t),\tilde{u}(x,t)\right)^{\mathcal{K}\eta},$$

从而，得到

$$E\sup_{0\le t\le r}\int_\Gamma\left\{\left|X_1(x,t)-\tilde{X}_1(x,t)\right|^{2\eta}+\left|X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\right|^{2\eta}\right\}\mathrm{d}x$$
$$\le C\left[\int_0^r\int_\Gamma E\left(\left|X_1(x,t)-\tilde{X}_1(x,t)\right|^{2\eta}+\left|X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\right|^{2\eta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+d'\left(u(x,t),\tilde{u}(x,t)\right)^{\mathcal{K}\eta}\right].$$

如果 $0<\eta<1$，根据柯西－施瓦茨不等式，可获得

$$E\sup_{0\le t\le r}\int_\Gamma\left\{\left|X_1(x,t)-\tilde{X}_1(x,t)\right|^{2\eta}+\left|X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\right|^{2\eta}\right\}\mathrm{d}x\le C\left[d'\left(u(x,t),\tilde{u}(x,t)\right)^{\mathcal{K}\eta}\right].$$

结合不等式和格朗沃不等式，可以得到引理 4.3 的证明。

上述引理证明了随机河流种群扩散模型(4.1)的状态方程具有最优解。接下来，我们将给出伴随方程的最优解。

引理 4.4. 对于 $1<\eta<2,0<\mathcal{K}<1$，且 $(1+\mathcal{K})\eta<2$，存在一个常数的 $C=C(\eta,\mathcal{K})$，使得对于任意 $u(x,t),\tilde{u}(x,t)\in\upsilon_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$ 以及相应的轨迹 $M(x,t),\tilde{M}(x,t)$，以及相应的伴随方程的解，则有

$$\sum_{i=1}^{2}E\left\{\int_0^T\int_\Gamma\left(\left|p_i(x,t)-\tilde{p}_i(x,t)\right|^{\eta}+\left|q_i(x,t)-\tilde{q}_i(x,t)\right|^{\eta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}\le C\left[d'\left(u(x,t),\tilde{u}(x,t)\right)^{\frac{\mathcal{K}\eta}{2}}\right].$$

证明： 设 $\bar{p}_i(x,t)=p_i(x,t)-\tilde{p}_i(x,t)(i=1,2)$，$\bar{q}_i(x,t)=q_i(x,t)-\tilde{q}_i(x,t)(i=1,2)$，根据伴随方程(4.7)，则得到

$$\begin{cases}\mathrm{d}\bar{p}_1(x,t)=-\Big[\big(r(x)-2c(x)X_1(x,t)-m(x)X_2(x,t)\big)\bar{p}_1(x,t)\\ \qquad -p(x)X_2(x,t)\bar{p}_2(x,t)+\bar{f}_1(x,t)-\zeta_1\bar{q}_1(x,t)\Big]\mathrm{d}t+\bar{q}_1(x,t)\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}\bar{p}_2(x,t)=-\Big[-m(x)X_1(x,t)\bar{p}_1(x,t)+\big(-p(x)X_1(x,t)-q(x)-u(x,t)\big)\bar{p}_2(x,t)\\ \qquad +\bar{f}_2(x,t)-\zeta_2\bar{q}_2(x,t)\Big]\mathrm{d}t+\bar{q}_2(x,t)\mathrm{d}B_2(t),\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{f}_1(x,t)=\big(m(x)-p(x)\big)\big(X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\big)\big(\tilde{p}_2(x,t)-\tilde{p}_1(x,t)\big),\\ \bar{f}_2(x,t)=\big(m(x)-p(x)\big)\big(X_1(x,t)-\tilde{X}_1(x,t)\big)\big(\tilde{p}_2(x,t)-\tilde{p}_1(x,t)\big)+\tilde{p}_2(x,t)\big(\tilde{u}(x,t)-u(x,t)\big).\end{cases}$$

假设 $\phi(x,t)=\big(\phi_1(x,t),\phi_2(x,t)\big)^{\mathrm{T}}$ 是以下线性微分方程的解：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\phi_1(x,t)=\Big[\big(r(x)-c(x)X_1(x,t)-m(x)X_2(x,t)\big)\phi_1(x,t)+\big(-m(x)X_1(x,t)\big)\phi_2(x,t)\\ \qquad +\left|\bar{p}_1(x,t)\right|^{\eta-1}\mathrm{sgn}\big(\bar{p}_1(x,t)\big)\Big]\mathrm{d}t+\Big[-\zeta_1\phi_1(x,t)+\left|\bar{q}_1(x,t)\right|^{\eta-1}\mathrm{sgn}\big(\bar{q}_1(x,t)\big)\Big]\mathrm{d}B_1,\\ \mathrm{d}\phi_2(x,t)=\Big[-p(x)X_2(x,t)\phi_1(x,t)+\big(-p(x)X_1(x,t)-q(x)-u(x,t)\big)\phi_2(x,t)\\ \qquad +\left|\bar{p}_2(x,t)\right|^{\eta-1}\mathrm{sgn}\big(\bar{p}_2(x,t)\big)\Big]\mathrm{d}t+\Big[-\zeta_2\phi_2(x,t)+\left|\bar{q}_2(x,t)\right|^{\eta-1}\mathrm{sgn}\big(\bar{q}_2(x,t)\big)\Big]\mathrm{d}B_2,\end{cases}\tag{4.9}$$

其中，$\mathrm{sgn}(\cdot)$ 是一个符号函数。根据假设和引理 4.3，我们知道方程(4.9)存在一个唯一解，并有

$$E\int_0^T\int_\Gamma\Bigg(\left|\left|\bar{p}_1(x,t)\right|^{\eta-1}\mathrm{sgn}\big(\bar{p}_1(x,t)\big)\right|^2+\left|\left|\bar{p}_2(x,t)\right|^{\eta-1}\mathrm{sgn}\big(\bar{p}_2(x,t)\big)\right|^2$$
$$+\left|\left|\bar{q}_1(x,t)\right|^{\eta-1}\mathrm{sgn}\big(\bar{q}_1(x,t)\big)\right|^2+\left|\left|\bar{q}_2(x,t)\right|^{\eta-1}\mathrm{sgn}\big(\bar{q}_2(x,t)\big)\right|^2\Bigg)\mathrm{d}x\mathrm{d}t<+\infty.$$

因为 $1<\eta<2$，所以存在 $\eta_1>2$ 使得 $\dfrac{1}{\eta_1}+\dfrac{1}{\eta}=1$。运用柯西－施瓦茨不等式，并将伊藤公式应用于

$p_1(x,t)\phi_1(x,t)+p_2(x,t)\phi_2(x,t)$，得到

$$E\left\{\sup_{0\le t\le T}\left(\left|\phi_1(x,t)\right|^{\eta_1}+\left|\phi_2(x,t)\right|^{\eta_1}\right)\right\}\le C\int_0^T\int_\Gamma\left(\left|\overline{f}_1(x,t)\right|^{\eta}+\left|\overline{f}_2(x,t)\right|^{\eta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

结合柯西－施瓦茨不等式和初等不等式，有

$$\begin{aligned}E\left\{\int_0^T\int_\Gamma\left|\overline{f}_1(x,t)\right|^{\eta}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}&\le CE\left[\int_0^T\int_\Gamma\left|X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\right|^{\eta}\left(\left|\overline{p}_1(x,t)\right|^{\eta}+\left|\overline{p}_2(x,t)\right|^{\eta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]\\&\le CE\left[\left(\int_0^T\int_\Gamma\left|X_2(x,t)-\tilde{X}_2(x,t)\right|^{\frac{2\eta}{2-\eta}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1-\frac{\eta}{2}}\right]\left(\int_0^T\int_\Gamma\left(\left|\overline{p}_1(x,t)\right|^{2}+\left|\overline{p}_2(x,t)\right|^{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{\eta}{2}}.\end{aligned}$$

注意到，$\dfrac{2\eta}{1-\eta}<1$，$1-\dfrac{\eta}{2}>\kappa\dfrac{\eta}{2}$，和 $d'(u_i,\tilde{u}_i)<1$。类似的方法，易知，有

$$E\int_0^T\int_\Gamma\left|\overline{f}_2(x,t)\right|^{\eta}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le Cd'\left(u_1(x,t),\tilde{u}_1(x,t)\right)^{\kappa\frac{\eta}{2}}.$$

从而，获得

$$E\int_0^T\int_\Gamma\left(\left|\overline{p}_1(x,t)\right|^{\eta}+\left|\overline{p}_2(x,t)\right|^{\eta}+\left|\overline{q}_1(x,t)\right|^{\eta}+\left|\overline{q}_2(x,t)\right|^{\eta}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\left[d'\left(u(x,t),\tilde{u}(x,t)\right)^{\frac{\kappa\eta}{2}}\right].$$

引理 4.4 证明完毕。

4.2. 近优性控制的充分必要条件

在本小节中，我们首先推导了模型(4.1)近优性控制的充分条件。如果得到充分条件，就可以得到存在条件下的最优控制。

定理 4.1. 设 $\left(X_1^\varepsilon(x,t),X_2^\varepsilon(x,t),u^\varepsilon(x,t)\right)$ 为容许对，$\left(p_1^\varepsilon(x,t),p_2^\varepsilon(x,t)\right)$ 为对应于 $\left(X_1^\varepsilon(x,t),X_2^\varepsilon(x,t),u^\varepsilon(x,t)\right)$ 的解。如果对于某些 $\varepsilon>0$，满足

$$\begin{aligned}&E\int_0^T\int_\Gamma\left(A\left(u^\varepsilon(x,t)\right)^2-u^\varepsilon(x,t)X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\varepsilon\\&\le\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}}E\int_0^T\int_\Gamma\left(A\left(u(x,t)\right)^2-u(x,t)X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

则有

$$\int_0^T\int_\Gamma\left(A\left(u^\varepsilon(x,t)\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}}\int_0^T\int_\Gamma\left(A\left(u(x,t)\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.\tag{4.10}$$

证明： 根据哈密顿函数(4.4)和目标函数(4.2)，可以得到

$$\begin{aligned}&J\left(0,M_0;u^\varepsilon(x,t)\right)-J\left(0,M_0;u(x,t)\right)\\&\le E\left\{\int_0^T\int_\Gamma H_u\left(X^\varepsilon(x,t),u^\varepsilon(x,t),p^\varepsilon(x,t),q^\varepsilon(x,t)\right)\left(u^\varepsilon(x,t)-u(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\},\end{aligned}$$

则，为了估计 $H_u\left(X^\varepsilon(x,t),u^\varepsilon(x,t),p^\varepsilon(x,t),q^\varepsilon(x,t)\right)$。首先，定义一个新的函数 $W(\cdot):\mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)\to\mathbb{R}$，如下：

$$W\left(u(x,t)\right)=E\left\{\int_0^T\int_\Gamma\left(A\left(u(x,t)\right)^2-u(x,t)X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\},$$

从而，我们有

$$\left|W\left(u(x,t)\right)-W\left(\tilde{u}(x,t)\right)\right|\le CE\left\{\int_0^T\int_\Gamma 2A\left(u(x,t)-\tilde{u}(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}.$$

因此，$W(u)$ 在 $\mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$ 上是连续的。根据参考文献[28]中的定理 4.1 和 Ekeland 原理，存在 $u^\varepsilon(x,t)\in\mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$，使得

$$d\left(u^\varepsilon(x,t),\tilde{u}^\varepsilon(x,t)\right)\le\varepsilon^{1/2},W\left(\tilde{u}^\varepsilon(x,t)\right)\le W\left(u(x,t)\right)+\varepsilon^{1/2}d\left(u(x,t),\tilde{u}^\varepsilon(x,t)\right),\quad\forall u(x,t)\in\mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right).$$

则，获得

$$\begin{aligned}&E\int_0^T\int_\Gamma\left(A\left(\tilde{u}^\varepsilon(x,t)\right)^2-\tilde{u}^\varepsilon(x,t)X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\min\nolimits_{u\in\mathcal{U}_{ad}}E\int_0^T\int_\Gamma\left\{A\left(u(x,t)\right)^2-u(x,t)X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)+\varepsilon^{1/2}y^\varepsilon(x,t)\left|u(x,t)-\tilde{u}^\varepsilon(x,t)\right|\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

根据参考文献[26]，可以得到：

$$0\in 2A\tilde{u}^\varepsilon(x,t)-X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)\subset 2A\tilde{u}^\varepsilon(x,t)-X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)+\left[-\varepsilon^{1/2}y^\varepsilon(x,t),\varepsilon^{1/2}y^\varepsilon(x,t)\right].$$

由于哈密顿函数 H 关于 u 是可微的，系统(4.1)意味着存在一个 $\theta^\varepsilon\in\left[-\varepsilon^{1/2}y^\varepsilon(x,t),\varepsilon^{1/2}y^\varepsilon(x,t)\right]$，使得

$$2A\tilde{u}^\varepsilon(x,t)-X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)+\theta^\varepsilon=0\tag{4.11}$$

成立，因此，我们获得

$$\left|2Au^\varepsilon(x,t)-X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)\right|\le C\left(y^\varepsilon(x,t)\left|u_1^\varepsilon(x,t)-\tilde{u}_1^\varepsilon(x,t)\right|\right)+2\varepsilon^{1/2}y^\varepsilon(x,t).\tag{4.12}$$

根据引理 4.2 和式子(4.5)中对 d 的定义，运用 Holder 不等式，结合(4.1)和(4.12)，得到定理 4.1 的结论。定理证明完毕。

定理 4.2. 设 $\left(p^\varepsilon(x,t),q^\varepsilon(x,t)\right)$ 为控制 $u^\varepsilon(x,t)$ 下的伴随方程(4.7)的解，存在一个常数 C 使得对于任何 $\eta\in[0,1),\varepsilon>0$ 和任何 ε 最优对 $\left(X_1^\varepsilon(x,t),X_2^\varepsilon(x,t),u^\varepsilon(x,t)\right)$，以下结论成立：

$$\begin{aligned}&\inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}}E\left\{\int_0^T\int_\Gamma\left(A\left(u(x,t)\right)^2-u(x,t)X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}\\&\ge E\left\{\int_0^T\int_\Gamma\left(A\left(u^\varepsilon(x,t)\right)^2-u^\varepsilon(x,t)X_2^\varepsilon(x,t)p_2^\varepsilon(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}-C\varepsilon^{\frac{\eta}{3}}.\end{aligned}\tag{4.13}$$

证明：假设 $J\left(0,M_0,u_1,u_2\right):\mathcal{U}_{ad}\to\mathbb{R}$ 在度量 d' 下是连续的。根据参考文献[28]中的 Ekeland 原理，并选择 $\lambda=\varepsilon^{\frac{2}{3}}$，存在一个容许对 $\left(M_\varepsilon,u_i^\varepsilon\right)$，使得以下不等式成立：

$$d'\left(u^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon\right)\le\varepsilon^{\frac{2}{3}},\text{且 }\tilde{J}\left(0,M_0;\tilde{u}^\varepsilon\right)\le\tilde{J}\left(0,M_0;u^\varepsilon\right),\text{对于所有的 }u\in\mathcal{U}_{ad},\tag{4.14}$$

其中

$$\tilde{J}\left(0,M_0;u^\varepsilon\right)=J\left(0,M_0;u^\varepsilon\right)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}d'\left(u,u^\varepsilon\right).\tag{4.15}$$

这表明 $\left(M_\varepsilon,u^\varepsilon\right)$ 对于系统(4.7)是最优的。接下来，使用变易系数法推导出 $\left(M_\varepsilon,u^\varepsilon\right)$ 的必要条件。让 $t\in[0,T]$，$\zeta>0$ 和 $u(x,t)\in\mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$，然后定义 $u^\zeta(x,t)\in\mathcal{U}_{ad}\left(\Gamma\times[0,T]\right)$，如下：

$$u^{\zeta}(x,t)=\begin{cases}u(x,t) & \text{if } (x,t)\in[\bar{t},\bar{t}+\zeta]\times\Gamma,\\ \tilde{u}^{\varepsilon}(x,t) & \text{if } (x,t)\in[0,T]\setminus[\bar{t},\bar{t}+\zeta]\times\Gamma.\end{cases}$$

根据式子(4.3)，得到

$$J\left(0,M_0;\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\right)=J\left(0,M_0;u^{\zeta}(x,t)\right) \text{ and } d'\left(u^{\zeta}(x,t),\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\right)\le\zeta.$$

根据式子(4.2)和泰勒展开式，有

$$\begin{aligned}-\zeta\varepsilon^{\frac{1}{3}}&\le J\left(0,M_0;u^{\zeta}(x,t)\right)-\tilde{J}\left(0,M_0;\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\right)\\&\le E\int_0^T\int_\Gamma\left(A_2(X_2^{\zeta}(x,t)-\tilde{X}_2^{\varepsilon}(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+E\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\zeta}\int_\Gamma\left(A_1\left(u_1^{\varepsilon}(x,t)\right)^2-A_1\left(\tilde{u}_1^{\varepsilon}(x,t)\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+o(\zeta).\end{aligned}\tag{4.16}$$

运用伊藤公式到$\sum_{i=1}^{2}p_i^{\varepsilon}(x,t)\left(X_i^{\zeta}(x,t)-\tilde{X}_i^{\varepsilon}(x,t)\right)$，我们有

$$\begin{aligned}&E\int_0^T\int_\Gamma\left(A_2\left(X_2^{\zeta}(x,t)-\tilde{X}_2^{\varepsilon}(x,t)\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le E\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\zeta}\int_\Gamma\left[\left(\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\tilde{X}_2^{\varepsilon}(x,t)-u^{\zeta}(x,t)X_2^{\zeta}(x,t)\right)\tilde{p}_2^{\varepsilon}(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.17}$$

把(4.17)代入(4.16)，两边除以ζ，让$\zeta\to0$，得到

$$\begin{aligned}-\varepsilon^{\frac{1}{3}}&\le J\left(0,M_0;u^{\zeta}(x,t)\right)-\tilde{J}\left(0,M_0;\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\right)\\&\le E\int_0^T\int_\Gamma\left[\left(\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\tilde{X}_2^{\varepsilon}(x,t)-u^{\zeta}(x,t)X_2^{\zeta}(x,t)\right)\tilde{p}_2^{\varepsilon}(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+E\int_0^T\int_\Gamma\left(A_1\left(u^{\varepsilon}(x,t)\right)^2-A_1\left(\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.18}$$

此外，式子(4.18)右侧的项$\left(M_{\varepsilon},u_i^{\varepsilon}\right)$被$\left(\tilde{M}_{\varepsilon},\tilde{u}_i^{\varepsilon}\right)$替换，且利用(4.17)证明方法去估计其他项，

$$\begin{aligned}&E\int_0^T\int_\Gamma\left[\left(\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\tilde{X}_2^{\varepsilon}(x,t)-u^{\zeta}(x,t)X_2^{\zeta}(x,t)\right)\tilde{p}_2^{\varepsilon}(x,t)\right.\\&\left.-\left(u^{\varepsilon}(x,t)X_2^{\varepsilon}(x,t)-u^{\zeta}(x,t)X_2^{\zeta}(x,t)\right)p_2^{\varepsilon}(x,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=E\int_0^T\int_\Gamma\left(\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\tilde{X}_2^{\varepsilon}(x,t)-u^{\varepsilon}(x,t)X_2^{\varepsilon}(x,t)\right)\tilde{p}_2^{\varepsilon}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+E\int_0^T\int_\Gamma\left(u^{\varepsilon}(x,t)X_2^{\varepsilon}(x,t)-u^{\zeta}(x,t)X_2^{\zeta}(x,t)\right)\left(\tilde{p}_2^{\varepsilon}(x,t)-p_2^{\varepsilon}(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4.19}$$

根据引理 4.4 和$d'\left(u_i^{\varepsilon},u_i^{\varepsilon}\right)\le\varepsilon^{\frac{2}{3}}$，对于任何$0<\kappa<1$，$1<\eta<2$，且满足$(1+\kappa)\eta<2$，得到

$$E\int_0^T\int_\Gamma\left(u^{\varepsilon}(x,t)X_2^{\varepsilon}(x,t)-u^{\zeta}(x,t)X_2^{\zeta}(x,t)\right)\left(\tilde{p}_2^{\varepsilon}-p_2^{\varepsilon}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\varepsilon^{\frac{\eta}{3}},$$

和

$$E\int_0^T\int_\Gamma\left(\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\tilde{X}_2^{\varepsilon}(x,t)-u^{\varepsilon}(x,t)X_2^{\varepsilon}(x,t)\right)\tilde{p}_2^{\varepsilon}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\varepsilon^{\frac{\eta}{3}},$$

同理，可以得到

$$E\int_0^T\int_\Gamma\left(A\left(u^{\varepsilon}(x,t)\right)^2-A\left(\tilde{u}^{\varepsilon}(x,t)\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\varepsilon^{\frac{\eta}{3}}.$$

结合哈密顿函数(4.4)的表达式，定理 4.2 结论成立。定理 4.2 证明完毕。

参考文献

[1] Pastorok, R., Bartell, S., Ferson, S. and Ginzburg, L. (2001) Ecological Modeling in Risk Assessment: Chemical Effects on Populations, Ecosystems, and Landscapes. Lewis Publishers.

[2] Camargo, J.A. and Alonso, Á. (2006) Ecological and Toxicological Effects of Inorganic Nitrogen Pollution in Aquatic Ecosystems: A Global Assessment. *Environment International*, **32**, 831-849. https://doi.org/10.1016/j.envint.2006.05.002

[3] Clements, W.H. and Kotalik, C. (2016) Effects of Major Ions on Natural Benthic Communities: An Experimental Assessment of the US Environmental Protection Agency Aquatic Life Benchmark for Conductivity. *Freshwater Science*, **35**, 126-138. https://doi.org/10.1086/685085

[4] Fleeger, J.W., Carman, K.R. and Nisbet, R.M. (2003) Indirect Effects of Contaminants in Aquatic Ecosystems. *Science of The Total Environment*, **317**, 207-233. https://doi.org/10.1016/s0048-9697(03)00141-4

[5] Hanazato, T. (2001) Pesticide Effects on Freshwater Zooplankton: An Ecological Perspective. *Environmental Pollution*, **112**, 1-10. https://doi.org/10.1016/s0269-7491(00)00110-x

[6] Smith, A.J. and Tran, C.P. (2010) A Weight-of-Evidence Approach to Define Nutrient Criteria Protective of Aquatic Life in Large Rivers. *Journal of the North American Benthological Society*, **29**, 875-891. https://doi.org/10.1899/09-076.1

[7] Yang, S., Xu, F., Wu, F., Wang, S. and Zheng, B. (2014) Development of PFOS and PFOA Criteria for the Protection of Freshwater Aquatic Life in China. *Science of the Total Environment*, **470**, 677-683. https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2013.09.094

[8] Zabel, T.F. and Cole, S. (1999) The Derivation of Environmental Quality Standards for the Protection of Aquatic Life in the UK. *Water and Environment Journal*, **13**, 436-440. https://doi.org/10.1111/j.1747-6593.1999.tb01082.x

[9] Erickson, R.A., Cox, S.B., Oates, J.L., Anderson, T.A., Salice, C.J. and Long, K.R. (2014) A Daphnia Population Model That Considers Pesticide Exposure and Demographic Stochasticity. *Ecological Modelling*, **275**, 37-47. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2013.12.015

[10] Hayashi, T.I., Kamo, M. and Tanaka, Y. (2008) Population-Level Ecological Effect Assessment: Estimating the Effect of Toxic Chemicals on Density-Dependent Populations. *Ecological Research*, **24**, 945-954. https://doi.org/10.1007/s11284-008-0561-6

[11] Spromberg, J.A. and Birge, W.J. (2005) Modeling the Effects of Chronic Toxicity on Fish Populations: The Influence of Life-History Strategies. *Environmental Toxicology and Chemistry*, **24**, 1532-1540. https://doi.org/10.1897/04-160.1

[12] Spromberg, J.A. and Meador, J.P. (2006) Relating Chronic Toxicity Responses to Population-Level Effects: A Comparison of Population-Level Parameters for Three Salmon Species as a Function of Low-Level Toxicity. *Ecological Modelling*, **199**, 240-252. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2006.05.007

[13] Freedman, H.I. and Shukla, J.B. (1991) Models for the Effect of Toxicant in Single-Species and Predator-Prey Systems. *Journal of Mathematical Biology*, **30**, 15-30. https://doi.org/10.1007/bf00168004

[14] Hallam, T.G., Clark, C.E. and Jordan, G.S. (1983) Effects of Toxicants on Populations: A Qualitative Approach II. First Order Kinetics. *Journal of Mathematical Biology*, **18**, 25-37. https://doi.org/10.1007/bf00275908

[15] Hallam, T.G., Clark, C.E. and Lassiter, R.R. (1983) Effects of Toxicants on Populations: A Qualitative Approach I. Equilibrium Environmental Exposure. *Ecological Modelling*, **18**, 291-304. https://doi.org/10.1016/0304-3800(83)90019-4

[16] Anderson, K.E., Paul, A.J., McCauley, E., Jackson, L.J., Post, J.R. and Nisbet, R.M. (2006) Instream Flow Needs in Streams and Rivers: The Importance of Understanding Ecological Dynamics. *Frontiers in Ecology and the Environment*, **4**, 309-318. https://doi.org/10.1890/1540-9295(2006)4[309:ifnisa]2.0.co;2

[17] Poff, N.L., Allan, J.D., Bain, M.B., Karr, J.R., Prestegaard, K.L., Richter, B.D., *et al*. (1997) The Natural Flow Regime. *BioScience*, **47**, 769-784. https://doi.org/10.2307/1313099

[18] Lam, K., Liu, S. and Lou, Y. (2020) Selected Topics on Reaction-Diffusion-Advection Models from Spatial Ecology. *Mathematics in Applied Sciences and Engineering*, **1**, 150-180. https://doi.org/10.5206/mase/10644

[19] Lam, K., Lou, Y. and Lutscher, F. (2016) The Emergence of Range Limits in Advective Environments. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **76**, 641-662. https://doi.org/10.1137/15m1027887

[20] Zhou, P. and Huang, Q. (2022) A Spatiotemporal Model for the Effects of Toxicants on Populations in a Polluted River. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **82**, 95-118. https://doi.org/10.1137/21m1405629

[21] Akella, R. and Kumar, P. (1986) Optimal Control of Production Rate in a Failure Prone Manufacturing System. *IEEE*

Transactions on Automatic Control, **31**, 116-126. https://doi.org/10.1109/tac.1986.1104206

[22] Mao, X. (2007) Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd Edition, Horwood Publishing.

[23] Parthasarathy, K. (2005) Probability Measures on Metric Spaces. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/chel/352

[24] Liu, K. (2020) Stationary Distributions of Second Order Stochastic Evolution Equations with Memory in Hilbert Spaces. *Stochastic Processes and Their Applications*, **130**, 366-393. https://doi.org/10.1016/j.spa.2019.03.015

[25] Zhou, X.Y. (1998) Stochastic Near-Optimal Controls: Necessary and Sufficient Conditions for Near-Optimality. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **36**, 929-947. https://doi.org/10.1137/s0363012996302664

[26] Yong, J. and Zhou, X. (1999) Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer.

[27] Chang, K. and Zhang, Q. (2022) Sufficient and Necessary Conditions of Near-Optimal Controls for a Diffusion Dengue Model with Lévy Noise. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **514**, Article 126044. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126044

[28] Ekeland, I. (1974) On the Variational Principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **47**, 324-353. https://doi.org/10.1016/0022-247x(74)90025-0