

微元法在多元积分学中的灵活应用

文生兰*, 贾瑞玲, 韩艺兵

信息工程大学基础部, 河南 郑州

收稿日期: 2024年8月29日; 录用日期: 2024年9月23日; 发布日期: 2024年10月10日

摘要

微元法是分析解决物理问题的常用方法, 是一种从部分到整体的思维方法, 通过将问题分解为众多微小的“元过程”, 运用熟悉的物理规律解决问题, 从而使问题简单化。微元法中“元”的寻找是解决问题的关键, 对一些特殊的积分区域, 如圆柱面, 圆柱体, 球体, 本文打破常规的微元分割, 找到灵活的“微元(——弧棒, 柱壳, 球壳)”, 实现积分运算的简化。

关键词

微元法, 从部分到整体, 特殊分割, 简化

The Flexible Application of the Differential Element Method in Multivariate Integration Studies

Shenglan Wen*, Ruiling Jia, Yibing Han

The Basis Department of Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Aug. 29th, 2024; accepted: Sep. 23rd, 2024; published: Oct. 10th, 2024

Abstract

The differential element method is a commonly used method for analyzing and solving physical problems. It is a way of thinking that moves from part to whole by breaking down problems into numerous small “element processes” and applying familiar physical laws to solve them, simplifying the problem. The search for “elements” in the differential element method is the key to solving problems. For some special integration regions, such as cylindrical surfaces, cylinders, and spheres, this article breaks

*通讯作者。

文章引用: 文生兰, 贾瑞玲, 韩艺兵. 微元法在多元积分学中的灵活应用[J]. 应用数学进展, 2024, 13(10): 4459-4463.
DOI: 10.12677/aam.2024.1310425

away from conventional finite element segmentation and finds flexible “differential elements” (arc rods, cylindrical shells, spherical shells) to simplify integration operations.

Keywords

Differential Element Method, From Part to Whole, Special Segmentation, Simplify

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

运动和变化是绝对的，也是无处不在的，微积分就是解决运动和变化的物理过程，微元法是用微积分解决实际问题的主要方法，它的主要思路是：将一个复杂问题分解为若干个微小部分，将一个连续的变化过程分割成无数非常小的离散的部分，以常代变，每个微小的局部遵循相同的物理规律，然后通过积分将这些微小的部分累积起来，得到整体的结果[1]。

微元法的应用非常广泛，例如在几何学中计算不规则区域的面积，不规则立体的体积，在物理学中可以解决变力做功，水压力，不均匀物体的质量，通过曲面指定侧的通量[2]等。

对于微元法的研究，大部分老师停留在方法剖析及思政元素挖掘：李灵晓，黄元元，王锋叶[3]，李继猛[4]，薛长峰[5]，总结了微元法解决问题的步骤；梁东颖，晁锦涛[6]，通过对所求量求导的方法寻找微元；路璐等[7]讨论了定积分应用的思政教学设计。对于寻找非常规形式的新的“微元”，到目前为止，研究得不多。

下面章节中，本文将给出一些新的微元，实现积分运算的灵活性及简化。

2. 主要结果

微元法中元的选择是关键，既要保证能便利的求出物理量，又希望能尽可能的运算简便，下面讨论几种特殊区域特殊分割下的特殊微元的取法。

命题一 设曲面 Σ 是母线平行于 z 轴的柱面 $x = \varphi(y)$ ，介于 $z = 0$ 与 $z = g(x, y) \geq 0$ 之间的部分，则 $\iint_{\Sigma} f(x, y) dS = \int_l f(x, y) g(x, y) ds$ 。其中 $f(x, y), g(x, y)$ 连续， $x = \varphi(y)$ 有连续导数， l 是 Σ 在 xOy 面的投影曲线。

分析 从物理意义理解， $\iint_{\Sigma} f(x, y) dS$ 表示以 $f(x, y)$ 为密度的曲面片 Σ 的质量，整个柱面可看成垂直于 xOy 面的一个个细棒的累加，即 Σ 在 xOy 的投影曲线 l 分解成一个个小弧段 ds ，整个曲面的质量看作底是 ds 高为 $g(x, y)$ ，密度为 $f(x, y)$ 的不均匀细棒质量的叠加。

证明 设曲面 Σ 在 yOz 面的投影区域 $D_{yz} = \{(y, z) | a \leq y \leq b, 0 \leq z \leq g(\varphi(y), y)\}$ ，则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y) dS &= \iint_{D_{yz}} f(\varphi(y), y) \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy dz \\ \text{左端:} \quad &= \int_a^b f(\varphi(y), y) \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy \int_0^{g(\varphi(y), y)} dz \\ &= \int_a^b f(\varphi(y), y) \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} g(\varphi(y), y) dy \end{aligned}$$

$$\text{右端: } \int_l f(x, y) g(x, y) ds = \int_a^b f(\varphi(y), y) g(\varphi(y), y) \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy$$

$$\text{因此, } \iint_{\Sigma} f(x, y) dS = \int_l f(x, y) g(x, y) ds.$$

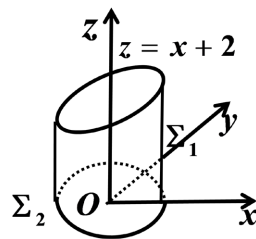
同理, 若曲面 Σ 是柱面 $y = \psi(x)$, 介于 $z = 0$ 与 $z = g(x, y)$ 之间的部分, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y) dS = \int_l f(x, y) g(x, y) ds. \text{ 其中 } f(x, y), g(x, y) \text{ 连续, } y = \psi(x) \text{ 有连续导数, } l \text{ 是 } \Sigma \text{ 在 } xOy \text{ 面的投影曲线.}$$

总结: 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y) dS$ 时, 若积分曲面是母线平行于 z 轴的柱面, 直接计算时, 有时需要

将曲面分前后或左右两片, 向 xOz 或 yOz 坐标面投影, 较复杂, 如果按命题一转化成 Σ 在 xOy 面的投影曲线上的曲线积分, 会使计算简便。

例 1 计算 $\iint_{\Sigma} x dS$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = x + 2$ 之间的部分。



解 【常规解法】 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 前后两片。

$\Sigma_1: y = \sqrt{1 - x^2}$, $\Sigma_2: y = -\sqrt{1 - x^2}$, 其在 xOz 面的投影区域为 $D_{xz} = \{(x, z) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x + 2\}$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x dS &= \iint_{\Sigma_1} x dS + \iint_{\Sigma_2} x dS \\ &= \iint_{D_{xz}} x \sqrt{1 + y_x^2} dx dz + \iint_{D_{xz}} x \sqrt{1 + y_x^2} dx dz \\ &= 2 \int_{-1}^1 x dx \int_0^{x+2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2} dz \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{x(x+2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

利用奇偶对称性化简,

$$\text{上式} = 4 \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \text{ 令 } x = \sin t,$$

$$\text{上式} = 4 \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

【按命题一】 Σ 在 xOy 面的投影 $l: x^2 + y^2 = 1$, 于是有 $\iint_{\Sigma} x dS = \int_l x(x+2) ds$,

积分弧段 l 关于 y 轴对称, 所以 $\int_l 2x ds = 0$, 变量 x, y 地位对称, 由轮换对称性

$$\int_l x^2 ds = \frac{1}{2} \int_l (x^2 + y^2) ds = \frac{1}{2} \int_l ds = \pi.$$

以上两种运算看出, 用命题一的方法运算较简便。

命题二 设 Ω 是圆柱体 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 介于 $z = 0$ 与 $z = g(x, y)$ 之间的部分, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y) dv = \int_0^R dr \oint_l f(x, y) g(x, y) ds, \text{ 其中 } f(x, y), g(x, y) \text{ 连续, } l \text{ 是 } xOy \text{ 面上的圆周: } x^2 + y^2 = r^2.$$

证明 三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y) dv$ 表示以被积函数 $f(x, y)$ 为密度的不均匀立体 Ω 的质量, 采用“柱壳法”, 在半径为 r 处, 取厚度为 dr 的薄圆柱面 Σ , 整个立体质量可看作一个个薄圆柱面质量的叠加, 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y) dv = \int_0^R dr \iint_{\Sigma} f(x, y) dS, \text{ 再结合命题一, 知结论成立.}$$

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是圆柱体 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 介于 $z = 0$ 与 $z = 1 + x^2 + y^2$ 之间的部分。

分析 本题可采用三重积分在柱坐标下的计算[8], 下面用命题二的方法求解。

解 记 xOy 面上的圆周 $l: x^2 + y^2 = r^2$, 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \int_0^R dr \oint_l (x^2 + y^2) \cdot (1 + x^2 + y^2) ds \\ &= \int_0^R dr \oint_l r^2 \cdot (1 + r^2) ds \\ &= \int_0^R r^2 \cdot (1 + r^2) \cdot 2\pi r dr \\ &= \left(\frac{R^4}{2} + \frac{R^6}{3} \right) \pi. \end{aligned}$$

说明: 本题若用柱坐标, 是不能将三重积分的被积函数 $x^2 + y^2$ 用 R^2 来代替的, 这也是本题的一个易错点, 但是按命题二转化后, 等号右边的曲线积分是可以将曲线方程代入被积函数的。

命题三 设 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^R dr \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 其中 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 。

证明 三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 表示密度为 $f(x, y, z)$ 的不均匀立体 Ω 的质量, 用“球壳法”, 在半径为 r 处取球面元 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, 该不均匀球面的质量为 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 整个不均匀球体可看作一个个不均匀球壳(“元”)的叠加, 于是

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^R dr \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS.$$

例 3 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 。

分析 本题是易错题, 有些同学常把重积分与线面积分弄混淆, 线面积分的被积函数定义在线上或面上, 可以将线或面的方程代入被积函数, 重积分的被积函数定义在区域内, 没办法代入, 但若按命题三, 将三重积分转化成先曲面积分再定积分, 其中的曲面积分是可以将曲面方程代入的。

解 在半径为 r 处取球面元 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, 原式转化为

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv &= \int_0^R dr \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \int_0^R dr \iint_{\Sigma} r^2 dS = \int_0^R r^2 \cdot \pi r^2 dr = \frac{\pi R^5}{5}. \end{aligned}$$

说明: 本题的特点是被积函数含 $x^2 + y^2 + z^2$, 积分区域是球体, 可选择在球坐标下计算[9]。

3. 结束语

在高等数学教材中,用微元法解决问题时,常选用的分割:将大曲边梯形分割为一个个小曲边梯形;对平面薄片,直角坐标下用平行于坐标轴的直线分割为一个个小矩形,极坐标下分割为一个个小环扇形;将空间立体在直角坐标,柱坐标,球坐标下分割成一个个小的长方体,扇环柱体,扇环球体;曲面积分按“一投影,二代入,三定号”的方法转化成二重积分,最终,重积分再转化成一个个定积分,这是通用方法,但有时计算量会很大。

本文通过对圆柱形曲面片,圆柱体,球体的“另类”分割方式,实现积分运算的简化,使解题更加灵活高效,通过这样的思考和训练,提升了同学们的发散性思维和创新思维,给同学们种下一颗多元化思考,多角度解决问题的种子,使同学们在遇到其它数学或科学问题时,能够不拘泥于教材,打破常规,别出心裁的解决问题。

参考文献

- [1] 同济大学数学科学学院. 高等数学(上册) [M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023: 267-286.
- [2] 王耀革, 郭从洲, 崔国忠. 高等数学(下册) [M]. 北京: 科学出版社, 2022: 210-217, 271-277.
- [3] 李灵晓, 黄元元, 王锋叶. 定积分微元法的教学探析与思考[J]. 科教论坛. 2024(1): 25-28.
- [4] 李继猛. 定积分应用中微元分析法探讨[J]. 科学技术创新, 2021(19): 67-68.
- [5] 薛长峰. 微元法在微积分学中的应用研究[J]. 盐城工学院学报(自然科学版), 2008, 21(4): 12-13.
- [6] 梁东颖, 晁锦涛. 微元法的一个理解与思考[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2187-2192.
- [7] 路璐, 沈杰, 冯素芬. 课程思政背景下定积分的应用教学设计[J]. 大学数学, 2024, 40(1): 119-124.
- [8] 杨罗辉, 张玲. 一类多元函数积分的简便算法[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2005, 18(2): 30-32.
- [9] 方汶铭. 三重积分计算浅析[J]. 高等数学研究, 2020, 23(2): 25-27.