Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(10), 4506-4511
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1310431

Hans汉斯

基于复合泊松过程的新疆火车站客流量分析

卢芸潇

伊犁师范大学教育科学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2024年9月9日；录用日期：2024年10月2日；发布日期：2024年10月12日

摘　要

本文利用客流量分析系统研究了新疆火车站在t时间内客流量的数学模型。火车依参数为λ的泊松过程$\{N(t), t \geq 0\}$进入车站，每辆火车承载的乘客数量作为一族独立同分布的随机变量$\{X_n, n = 1, 2\cdots\}$，在t时间内火车站的客流量是一个复合泊松过程。根据随机过程的相关知识分析新疆火车站在t时间内客流量的数字特征，所得结论可对新疆客运提供一定的借鉴与参考。

关键词

复合泊松过程，特征函数，数字特征

Passenger Flow Analysis of Xinjiang Railway Station Based on Compound Poisson Process

Yunxiao Lu

Institute of Educational Sciences, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Sep. 9th, 2024; accepted: Oct. 2nd, 2024; published: Oct. 12th, 2024

Abstract

This paper studies the mathematical model of the passenger flow of Xinjiang Railway Station in t time by using the passenger flow analysis system. The train enters the station according to the Poisson process $\{N(t), t \geq 0\}$ with parameter λ, and the number of passengers carried by each train is regarded as an independent and equally distributed random variable $\{X_n, n = 1, 2\cdots\}$. The passenger flow of the railway station in time t is a compound Poisson process. According to the relevant

文章引用: 卢芸潇. 基于复合泊松过程的新疆火车站客流量分析[J]. 应用数学进展, 2024, 13(10): 4506-4511.
DOI: 10.12677/aam.2024.1310431

knowledge of stochastic processes, the numerical characteristics of passenger flow at Xinjiang Railway Station in t time are analyzed, and the conclusions can provide some references for passenger transport at Xinjiang Prefecture.

Keywords

Compound Poisson Process, Eigenfunction, Digital Characteristics

1. 引言

火车站客流量是衡量火车站规模大小的重要指标。反映为火车站在一定时间内，乘客到达和离开的人数总量，一般以人次为单位。

地处中国西部的新疆铁路车站为出入新疆的旅客提供了便利的服务。通过对新疆火车站客流量的数据统计预测方法的介绍，进行客流量的科学预测，可为新疆火车站的各类消费服务，资源，车辆调度，安全保障提供可靠依据。

2. 基本假设

定义 1：称计数过程 $\{N(t),t\ge 0\}$，为具有参数 $\lambda>0$ 的泊松过程，如果 $\{N(t),t\ge 0\}$ 满足下列条件[1]：

(1) $N(0)=0$

(2) $N(t)$ 是独立平稳增量过程

(3) $P\{N(h)=1\}=\lambda h+o(h)$

(4) $P\{N(h)\ge 2\}=o(h)$

定义 2：设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 为参数是 λ 的泊松过程，如果 $Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X_n,t\ge 0$，其中 $\{X_n,n=1,2\cdots\}$ 为独立同分布随机序列且与 $\{N(t),t\ge 0\}$ 独立，则称 $\{Y(t),t\ge 0\}$ 为复合泊松过程[2]。

3. 主要结论

3.1. 火车到站为一个泊松过程

设 $N(t)$ 为 $[0,t]$ 内火车进站的数量，显然 $N(t)$ 只能取非负整数值，且 $N(0)=0$，$N(t)$ 具有如下性质：

(1) $N(t)$ 是独立平稳增量过程，其中 $N(t)$ 的大小只与区间的长度有关，而与时间起点无关。且在不相同的时间间隔内到达的车辆数是相互独立的。

(2) 在同一时刻车辆到达车站数量为两辆或两辆以上的概率为 0。

3.2. 火车站客流量为一个复合泊松过程

时间 t 内，火车站客流量是一个复合泊松过程 $Y(t)=X_1+X_2+\cdots+X_{N(t)}=\sum_{n=1}^{N(t)}X(n)\ (t\ge 0)$。

令 $X=X_i,i=1,2,\cdots,N(t)$ 表示一辆到站火车的载客量，假设 X_i 是具有相同分布的泊松分布的随机变

量，其中 $E(X_i)=V(X_i)=\mu$,$i=1,2,\cdots,N(t)$。

3.3. 火车站到站乘客消费量为一个二重复合泊松过程

时间 t 内，火车站内到站乘客的消费量可看作一个二重复合泊松过程，$Z(t)=\sum_{n=1}^{Y(t)}\eta_n,t\ge 0$ [3]。

其中 $Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X_n,t\ge 0$ 是一个复合泊松过程。令 $X=X_i,i=1,2,\cdots,N(t)$ 表示一辆火车到站时的载客数量。令 $\eta=\eta_i,i=1,2,\cdots,Y(t)$ 表示一辆火车上的一位乘客的消费量。假定 $\{\eta_n\}$ 是满足相同分布的泊松分布的随机变量序列。

3.4. 复合泊松过程的数字特征

定理 1 [1]-[5]：若 $N(t)$ 是参数为 λ 的泊松过程，则复合泊松过程 $Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X_n,t\ge 0$ 具有如下数字特征：

(1) 特征函数为 $g_{Y(t)}(u)=\exp\{\lambda t[g_X(u)-1]\}$

(2) 矩母函数为 $\varphi_{Y(t)}(u)=\exp\{\lambda t[\varphi_X(u)-1]\}$

(3) 均值函数为 $E[Y(t)]=\lambda tE(X_1)$

(4) 方差函数为 $D[Y(t)]=\lambda tE(X_1{}^2)$

证明：(1) $[0,t]$ 时间内新疆火车站客流量 $Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X(n)$。本文根据特征函数的性质来分析新疆火车站的数字特征。

$Y(t)$ 的特征函数为 $g_{Y(t)}(u)=\exp\{\lambda t[g_X(u)-1]\}$。其中 $g_X(u)$ 是随机变量 X_1 的特征函数；λ 是单位时间内火车到站的平均个数；

$$\begin{aligned} g_{Y(t)}(u)&=E\left[e^{iuY(t)}\right]\\ &=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}E\left[\frac{e^{iuY(t)}}{N(t)=n}\right]\cdot P\{N(t)=n\}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\frac{\exp\left(iu\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{N(t)=n}\right]\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{1}$$

由于 $\{N(t)\ge 0,t\ge 0\}$ 与 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$，是相互独立的，则：

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\frac{\exp\left(iu\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{N(t)=n}\right]\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\\ &=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}E\left[\exp\left(iu\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right]\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[g_X(u)\right]^n\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\\
&=e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda t g_X(u)\right]^n}{n!}\\
&=\exp\left\{\lambda t\left[g_X(u)-1\right]\right\}.
\end{aligned}\tag{2}
$$

(2) 同理可得矩母函数 $\varphi_{Y(t)}(u)=\exp\left\{\lambda t\left[\varphi_X(u)-1\right]\right\}$。

(3) 由特征函数与矩的关系可得数学期望为：

$$
E\left[Y(t)\right]=-j\left.\frac{\mathrm{d}g_Y(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0}=-j\lambda t\left.\frac{\mathrm{d}g_X(u)}{\mathrm{d}u}e^{\lambda t\left[g_X(u)-1\right]}\right|_{u=0}. \tag{3}
$$

因为 $-j\left.\frac{\mathrm{d}g_Y(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0}=E\left[X_1\right], g_Y(0)=1$，所以 $E\left[Y(t)\right]=\lambda tE\left[X_1\right]$。

(4) 均方值为：

$$
\begin{aligned}
E\left[Y^2(t)\right]&=-\left.\frac{\mathrm{d}^2g_Y(u)}{\mathrm{d}u^2}\right|_{u=0}\\
&=-\left.\left\{\left[\lambda t\frac{\mathrm{d}g_X(u)}{du}\right]^2e^{\lambda t\left[g_X(u)-1\right]}+\lambda t\frac{\mathrm{d}^2g_X(u)}{\mathrm{d}u^2}e^{\lambda t\left[g_X(u)-1\right]}\right\}\right|_{u=0}\\
&=(\lambda t)^2E^2\left[X\right]+\lambda tE\left[X^2\right].
\end{aligned}\tag{4}
$$

故 $\operatorname{var}\left[Y(t)\right]=E^2\left[Y(t)\right]+\lambda tE\left[Y^2(t)\right]=\lambda tE\left[X_1^2\right]$。

3.5. 新疆火车站客流量的特性

t 时间内新疆火车站客流量 $Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}X(n)$ 是一个复合泊松过程。火车进出车站为一个参数为 λ 的泊松过程，而每辆火车的载客量为随机变量 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$。

① $X_n=1$ 时，$Y(t)=N(t)$，$Y(t)$ 退化为一个齐次泊松过程。

② $X_n=n$ (n 为任意的自然数)，有 $Y(t)=nN(t)$，此时，复合泊松过程 $Y(t)$ 可看作一个广义泊松过程。

从中可见单一的泊松过程是复合泊松过程的一种特殊情况，在实际情况中，由于进出火车站的每辆火车的载客量不同，存在旅客是否按时上车和其他因素的影响，所以 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 取为随机变量是合理的。

定理 2 [1]：t 时间内新疆火车站客流量 $Y(t)$ 是一个复合泊松过程，有：$Y(t)$ 是独立增量过程。

证明：设 $0\le t_0<t_1<t_2$，由 $\{N(t), t\ge 0\}$ 和 $X_n,(n=1,2,\cdots)$ 相互独立，则 $\forall x_1,x_2\in R$，都有：

$$
\begin{aligned}
&P\left\{Y(t_1)-Y(t_0)<x_1, Y(t_2)-Y(t_1)<x_2\right\}\\
&=P\left\{\bigcup_{0\le i_0\le i_1\le i_2}\left\{N(t_0)=i_0, N(t_1)=i_1, N(t_2)=i_2\right\}, Y(t_1)-Y(t_0)<x_1, Y(t_2)-Y(t_1)<x_2\right\}\\
&=\sum_{0\le i_0\le i_1\le i_2}P\left\{N(t_0)=i_0, N(t_1)=i_1, \sum_{n=i_0+1}^{i_1}X_n<x_1, N(t_1)=i_1, N(t_2)=i_2, \sum_{n=i_1+1}^{i_2}X_n<x_2\right\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0\le i_0\le i_1\le i_2} P\left\{N(t_1)-N(t_0)=i_1-i_0,\ \sum_{n=i_0+1}^{i_1} X_n < x_1, N(t_2)-N(t_1)=i_2-i_1,\ \sum_{n=i_1+1}^{i_2} X_n < x_2\right\}\\
&= \sum_{0\le i_0\le i_1\le i_2} P\left\{N(t_1)-N(t_0)=i_1-i_0,\ \sum_{n=i_0+1}^{i_1} X_n < x_1\right\}\cdot P\left\{N(t_2)-N(t_1)=i_2-i_1,\ \sum_{n=i_1+1}^{i_2} X_n < x_2\right\}\\
&= \sum_{0\le i_0\le i_1} P\left\{N(t_1)-N(t_0)=i_1-i_0,\ \sum_{n=i_0+1}^{i_1} X_n < x_1,\right\}\cdot \sum_{0\le i_1\le i_2} P\left\{N(t_2)-N(t_1)=i_2-i_1,\ \sum_{n=i_1+1}^{i_2} X_n < x_2\right\}\\
&= P\left\{Y(t_1)-Y(t_0)<x_1,\right\}\cdot P\left\{Y(t_2)-Y(t_1)<x_2\right\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

同理，$\forall 0\le t_1<t_2<\cdots<t_n, \forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in R$，有：

$$\begin{aligned}
&P\left\{Y(t_1)-Y(t_0)<x_1,\right\}\cdot P\left\{Y(t_2)-Y(t_1)<x_2\right\}\\
&= P\left\{Y(t_1)-Y(t_0)<x_1, Y(t_2)-Y(t_1)<x_2,\dots,Y(t_n)-Y(t_{n-1})<x_n\right\}\\
&= P\left\{Y(t_1)-Y(t_0)<x_1\right\}\cdot P\left\{Y(t_2)-Y(t_1)<x_2\right\}\cdot\ldots\cdot P\left\{Y(t_n)-Y(t_{n-1})<x_n\right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

即得 $\{Y(t),t\ge 0\}$ 是独立增量过程。

定理 3 [1]：t 时间内新疆火车站客流量 $Y(t)$ 是一个复合泊松过程，$Y(t)$ 是平稳增量过程。

证明：$\{Y(t),t\ge 0\}$ 是平稳增量过程，只需证 $0\le s<t$，$Y(t)-Y(s)$ 的特征函数是 $t-s$ 的函数。

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= E\left(\mathrm{e}^{iu(Y(t)-Y(s))}\right)\\
&= E\left[E\left(\frac{\mathrm{e}^{iu(Y(t)-Y(s))}}{N(t)-N(s)}\right)\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\frac{\mathrm{e}^{iu(Y(t)-Y(s))}}{N(t)-N(s)=k}\right)\cdot P\left\{N(t)-N(s)=k\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\frac{\mathrm{e}^{iu\sum_{l=N(s)+1}^{N(t)} x_l}}{N(t)-N(s)=k}\right)\cdot P\left\{N(t)-N(s)=k\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\mathrm{e}^{iu\sum_{j=1}^{k} x_j}\right)\cdot P\left\{N(t)-N(s)=k\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} g^k(u)\frac{\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda g(u)(t-s)\right)^k}{k!}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\mathrm{e}^{\lambda g(u)(t-s)}\\
&= \mathrm{e}^{\lambda(t-s)(g(u)-1)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $g(u)$ 是 $X_n,(n=1,2,\cdots)$ 的特征函数，以上即可得到 $\{Y(t),t\ge 0\}$ 是平稳增量过程。

4. 结束语

本文通过对复合泊松过程的相关知识进行分析，将新疆火车站在 t 时间内的客流量看做一个复合泊

松过程模型，在给定参数 λ 的情况下，得到 t 时间内新疆火车站客流量的概率分布，从而预测新疆火车站客流量以及到站乘客消费总额。通过上述分析，可为车站工作人员对旅客等候时间的消费服务以及火车进出车站安排等提供参考依据。

参考文献

[1] S.M., 劳斯. 随机过程[M]. 北京: 中国统计出版社, 1997.

[2] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[3] 高世泽. 二重复合非齐次泊松过程[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 1993, 10(4): 9-14.

[4] 周晖杰, 沈蕾, 张玉倩, 等. 港口吞吐量的随机分析[J]. 中国水运月刊, 2009(11): 49-50.

[5] 冀云, 李厚朋, 付馨雨. 基于复合泊松过程的机场客流量分析[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2013(5): 9-10.