Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(10), 4512-4518
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1310432

含有较少非线性不可约特征标核的有限幂零群

钟佐琴，李亚利*

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南 昆明

收稿日期：2024年9月9日；录用日期：2024年10月2日；发布日期：2024年10月12日

摘 要

有限群不可约特征标核的性质对群结构有重要影响。本文分类了非线性不可约特征标核个数至多为3的有限幂零群。

关键词

***p*-群，幂零群，非线性不可约特征标，特征标核**

Finite Nilpotent Groups with Few Nonlinear Irreducible Characters

Zuoqin Zhong, Yali Li*

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Sep. 9th, 2024; accepted: Oct. 2nd, 2024; published: Oct. 12th, 2024

Abstract

The properties of irreducible character kernels heavily influence the structure of finite groups. Finite nilpotent groups having at most three nonlinear irreducible characters are classified.

Keywords

***p*-Group, Nilpotent Group, Nonlinear Irreducible Character, Character Kernel**

*通讯作者。

文章引用: 钟佐琴, 李亚利. 含有较少非线性不可约特征标核的有限幂零群[J]. 应用数学进展, 2024, 13(10): 4512-4518. DOI: 10.12677/aam.2024.1310432

1. 引言

设 G 为有限群，符号 $Irr(G)$ 和 $Irr_1(G)$ 分别表示群 G 的不可约特征标和非线性不可约特征标组成的集合。近年来，针对非线性不可约及非线性非忠实不可约特征标的研究在揭示群性质与结构方面取得了显著进展。这些研究深入探索了这些特征标如何影响群的本质属性，推动了相关领域的知识拓展。Berkovich 和 Zhmud 在[1]中用符号 $Kern(G)$ 表示群 G 的非线性不可约特征标核组成的集合，并提出了如何刻画满足条件 $|Kern(G)|\le 3$ 的群结构的问题。2008 年，钱国华和王燕鸣[2]分类了 $Kern(G)$ 中元素具有包含关系的链的有限 p-群。2012 年，Doostie 和 Saeidi [3]刻画了 $|Kern(G)|\le 3$ 的有限 p-群 G 的结构。2023 年，李璞金和张勤海[4]使用不同的方法也分类了 $|Kern(G)|\le 3$ 的有限 p-群，并且他们给出了任意有限群 G，集合 $Kern(G)$ 的一些性质。

此外，从另一个角度，群 G 的非线性非忠实不可约特征标的数量也影响着集合 $Kern(G)$ 的阶。例如，若群 G 仅含有 0 个非线性非忠实不可约特征标，即 G 的其余非线性不可约特征标均为忠实特征标，则 G 满足 $Kern(G)=\{1\}$，我们称之 J_0-群并对这类群进行了刻画。此外，由于群 G 的所有非线性非忠实不可约特征标核的交为 1，因此这进一步限定了 G 的性质。特别地，在 2014 年，Saeidi [5]研究了仅含有一个非线性非忠实不可约特征标的可解群，探讨了这类群的特殊性质。同理，如果群 G 含有 2，3 个非线性非忠实不可约特征标，则 $|Kern(G)|\le 3$，本文将继续探讨含有较少非线性不可约特征标核的有限群的结构。具体地，本文刻画了非线性不可约特征标核的个数至多为 3 的有限幂零群的结构，主要定理及证明见下文。

2. 相关引理

引理 1 [1] 设 G 是有限群，G 是 J_0-群当且仅当 G' 是 G 的唯一的极小正规子群，且下列结论成立：

(1) G 是一个 p-群，$Z(G)$ 循环，其中 p 是素数；

(2) G 是 Frobenius 群；

(3) G 是不可解群。

引理 2 [1] 设 p-群 G 只含有 3 个非线性不可约特征标当且仅当下列条件之一成立：

(1) $|G|=2^5$，$z_0=2$，$|G'|=4$，$z_1=6$；

(2) G 是 16 阶二面体群、16 阶广义四元数群或 16 阶半二面体群；

(3) G 是 2^{2m} 阶特殊 2-群，其中 m 是正整数，$z_1=0$ 且 $|Z(G)|=4$。

引理 3 [2] 设 G 是有限非交换 p-群，则下列条件等价：

(1) $Kern(G)$ 是一个具有包含关系的链；

(2) 如果 $N \lhd G$，$N < G'$，则 $N \in Kern(G)$；

(3) G 是下列群之一

(i) G 是极大类群；

(ii) G' 是 G 的唯一的极小正规子群；

(4) $Kern(G)\subseteq N(G)$ 且 $N(G)=\left\{\bigcap_{H\in T} \middle| T\subseteq Kern(G)\right\}$。

引理 4 [3] 设 G 是 p-群，令 $\left|Kern(G)\right| = t$，则下列结论成立：

(1) $t=1$ 当且仅当 $\left|G'\right| = p$，以及 $Z(G)$ 循环；

(2) $t=2$ 当且仅当下列陈述之一成立：

(i) G 是极大类 p^4 阶群；

(ii) $\left|G'\right| = 2$，$Z(G)\cong C_2\times C_{2^r}\ (r\geq 1)$，且当 $r\geq 1$ 时，成立 $G'\leq \Phi(Z(G))$，

$\Phi(Z(G))$ 是 $Z(G)$ 的 Frattini 子群。

引理 5 [4] 如果 $\left|Kern(G)\right| = m$，$\left|N(G)\right| = n$，称有限群为 $K(m, n)$-群，其中符号 $N(G)$ 表示 G 不含 G' 的正规子群组成的集合。

引理 6 [6] 令 G 为 p^n 阶群，$n\geq 2$。称群 G 为极大类 p-群，如果 G 的幂零类 $c(G) = n-1$。

3. 主要定理及证明

定理 1 设 G 是幂零群，则 $\left|Kern(G)\right| = 2$ 当且仅当以下情况之一发生：

(1) G 是 p^4 阶群，且 $c(G) = 3$。

(2) G 是 2-群，$\left|G'\right| = 2$ 且 $Z(G)\cong C_2\times C_{2^r}\ (r\geq 1)$，且当 $r\geq 1$，成立 $G'\leq \Phi(Z(G))$。

(3) $G = H\times K$，H 是一个 J_0-p-群，且 K 是 q 阶循环群，p,q 是不同素数。

$Kern(G) = \{1, K\} = N(G)$，$G$ 为 $K(2, 2)$-群。

证明：G 是 $\left|Kern(G)\right| = 2$ 的幂零群，如果 G 是一个 p-群，根据引理 4 可得(1)，(2)。反之，G 是一个幂零群。设 G 是一个非可换幂零群且 $G = H\times K$，G 非可换，则 H 和 K 不可能均可换，不妨设 H 不可换，任取 $\varphi\in Irr(H)$，可以得到 $1_K\times\varphi$ 是 G 的非线性非忠实不可约特征标，即 $ker(1_K\times\varphi)\neq 1$，且

$$ker\chi_1 = ker(1_K\times\varphi) = K\times ker\varphi\in Kern(G)$$

由于 $\left|Kern(G)\right| = 2$，则此时 $Kern(G) = \{ker(1_K\times\varphi), ker\chi_2\}$。

接下来考虑 K 不可换和 K 可换。

(I) 若 K 不可换，则任取 $\psi\in Irr(K)$，可以得到 $ker(1_H\times\varphi)\neq 1$，且

$$ker\chi_2 = ker(1_H\times\psi) = H\times ker\psi\in Kern(G)$$

又由 $G = H\times K$，得到 G 的非线性不可约特征标 $ker(\varphi\times\psi)\in Kern(G)$，且 $H\neq ker\varphi$，则此时 $Kern(G) = \{ker\chi_1 = K\times ker\varphi, ker\chi_2 = ker\psi\times H, ker(\varphi\times\psi)\}$。即 $\left|Kern(G)\right| = 3$，与 $\left|Kern(G)\right| = 2$ 矛盾，故此种情况不存在。

(II) 若 K 可换，已知 $K\times ker\varphi\in Kern(G)$，不妨设 $Kern(G) = \{K\times ker\varphi, ker\chi_2\}$，任取 K 的非主不可约特征标 α，得 $ker\chi_2 = ker(\alpha\times\varphi)\in Kern(G)$，则此时

$$Kern(G) = \{K\times ker\varphi, ker\chi_2 = ker(\alpha\times\varphi)\}。$$

接下来讨论 $ker(\alpha\times\varphi) = 1$ 和 $ker(\alpha\times\varphi)\neq 1$ 两种情况。

(i) 若 $ker(\alpha\times\varphi) = 1$

设 G 是幂零群。且 $(|H|,|K|) = 1$，则有 $ker(\alpha\times\varphi) = ker\alpha\times ker\varphi = 1$，迫使 $ker\alpha = 1$，$ker\varphi = 1$，则可得 φ 是 H 唯一的非线性不可约特征标。若否，令 $\varphi'\in Irr(H)$ 且 $\varphi'\neq\varphi$。由 $K\leq ker(\varphi\times 1_k)$，$K\leq ker(\varphi'\times 1_k)$，得 $ker(\varphi\times 1_k)\neq 1$，$ker(\varphi'\times 1_k)\neq 1$；由 $G = H\times K$，有 $\varphi\times\alpha, \varphi'\times\alpha$ 是群 G 的非线性不可约特征标，此时

$$ker(\varphi\times 1_k)\in Kern(G),\quad ker(\varphi'\times 1_k)\in Kern(G)$$

$$ker(\varphi\times\alpha)\in Kern(G)，\quad ker(\varphi'\times\alpha)\in Kern(G)。$$

若 $ker\varphi'\neq ker\varphi$；则

$$ker(\varphi\times 1_k)\neq ker(\varphi'\times 1_k)，\quad ker(\varphi'\times\alpha)\neq ker(\varphi\times\alpha)。$$

即 $|Kern(G)|=4$，与 $|Kern(G)|=2$，矛盾。故只能有 $ker\varphi=ker\varphi'=1$，因此 φ 是 H 唯一的非线性不可约特征标且忠实。且 K 任意的非主不可约特征标也是忠实的。若否，存在 K 的非主不可约特征标 β 是非忠实的，且 $\beta\neq\alpha$。则可以得到 $\beta\times\varphi$ 是群 G 的非线性不可约特征标，$ker(\beta\times\varphi)\in Kern(G)$，此时

$$Kern(G)=\{K\times ker\varphi, ker(\alpha\times\varphi), ker(\beta\times\varphi)\}。$$

即 $|Kern(G)|=3$，与 $|Kern(G)|=2$，矛盾。

综上可得，H 的非线性不可约特征标均忠实，即 $|Kern(H)|=1$，H 是 J_0-群，且 K 任意的非主不可约特征标也是忠实的，即 $K\cong C_q$，q 是素数。又因为 G 是幂零群，$(|H|,|K|)=1$，它的阶至少有两个不同的素数，及引理 1 可得 H 是一个 J_0-p-群，且 K 是 q 阶循环群，p,q 是不同素数；此时 $Kern(G)=\{1,K\}=N(G)$；G 是 $K(2, 2)$-群。

(ii) 若 $ker(\alpha\times\varphi)\neq 1$

可以断言出 φ 是 H 唯一的非线性不可约特征标，由于群的所有非线性不可约特征标核之交为 1，故 $ker\varphi=1$。此时

$$ker(\alpha\times\varphi)=ker\alpha\times ker\varphi=ker\alpha\neq 1，\quad Kern(G)=\{K, ker(\alpha\times\varphi)\}$$

即 K 的非主线性不可约特征标非忠实，由于 $1\neq ker\alpha\subseteq ker(\alpha\times\varphi)$ 且 $ker\alpha\vartriangleleft K$，所以 $ker(\alpha\times\varphi)$ 包含 K 中的非单位元，则 $ker(\alpha\times\varphi)\cap K\neq 1$。但由于 $|Kern(G)|=2$，G 的所有非线性不可约特征标核之交为 1，故 $ker(\alpha\times\varphi)\cap K=1$，矛盾。所以 K 的非主线性不可约特征标忠实，即 $ker\alpha=1$，此时 $ker(\alpha\times\varphi)=1$，矛盾。因此这种情况不存在。

定理 2 设 G 是幂零群，则 $|Kern(G)|=3$ 当且仅当以下情况之一发生

(1) G 是 p^5 阶极大类 p-群，且 $c(G)=4$。

(2) $G=H\times K$，$|Kern(G)|=3$，则有下列情况发生

(i) H 和 K 不可换，K 为 J_0-p-群，H 为 J_0-q-群，p,q 是不同的素数；$Kern(G)=\{1,H,K\}=N(G)$；G 为 $K(3, 3)$-群。

(ii) $1\in Kern(G)$，K 为 J_0-p-群，H 为 q^2 阶循环群，p,q 是不同的素数；$Kern(G)=\{1,H,N\}=N(G)$，其中 $1\neq N<H$；G 为 $K(3, 3)$-群。

证明(1)因为 G 是幂零群，故考虑 G 是 p-群时。设 G 是有限 p-群，由引理 3 知 G 是极大类群或 G' 是 G 的唯一的极小正规子群，根据引理 1 知若 G 是 G 的唯一的极小正规子群当且仅当 G 是 J_0-群，即 G 的所有非线性不可约特征标均忠实，$|Kern(G)|=1$，与 $|Kern(G)|=3$ 矛盾。故 G 是极大类 p-群。由引理 6 知 $c(G)=4$。

(2) 因为 $|Kern(G)|=3$，所以 G 不可换，则 H 和 K 不可能均可换。不妨设 K 不可换，任取 $\psi\in Irr(K)$，由 $H\leq ker(1_H\times\psi)$，可以得到 $1_H\times\psi$ 是群 G 的非线性非忠实不可约特征且 $ker(1_H\times\psi)=H\times ker\psi\in Kern(G)$。

接下来分别对 H 不可换和 H 可换进行讨论。

(I) 若 H 不可换，则任取 $\varphi\in Irr(H)$，由 $K\leq ker(1_K\times\varphi)$，得到 $ker(1_K\times\varphi)\neq 1$，且

$ker(1_K\times\varphi)=K\times ker\varphi\in Kern(G)$。又由 $G=H\times K$ 得到 $ker(\psi\times\varphi)\in Kern(G)$，且 G 幂零及 $(|K|,|H|)=1$，有 $ker(\psi\times\varphi)=ker\psi\times ker\varphi\in Kern(G)$ 且 $ker\psi\neq K, ker\varphi\neq H$ 。此时有 $Kern(G)=\{H\times ker\psi, K\times ker\varphi, ker(\psi\times\varphi)\}$。

接下来讨论 $ker(\psi\times\varphi)$。

(i) 若 $ker(\psi\times\varphi)=1$，由于 G 是幂零群，$(|K|,|H|)=1$，则

$$ker(\psi\times\varphi)=ker\psi\times ker\varphi=1.$$

这使得 $ker\psi=1$，$ker\varphi=1$，即 K 和 H 的非线性不可约特征标 ψ,φ 是忠实的，可以断言 K 和 H 的非线性不可约特征标均忠实。若否，设 $\psi'\in Irr(K)$ 且 $\psi\neq\psi'$，由于 $H\le ker(\psi\times 1_H)$，$H\le ker(\psi'\times 1_H)$，则可得 $ker(\psi\times 1_H)\neq 1$，$ker(\psi'\times 1_H)\neq 1$；由 $G=H\times K$，可以得到 $\psi\times\varphi,\psi'\times\varphi$ 是 G 的非线性不可约特征标，此时

$$ker(\psi\times\varphi)\in Kern(G),\quad ker(\psi'\times\varphi)\in Kern(G)$$

$$ker(\psi\times 1_H)\in Kern(G),\quad ker(\psi'\times 1_H)\in Kern(G)。$$

当 $ker\psi\neq ker\psi'$，有 $|Kern(G)|=4$，与 $|Kern(G)|=3$ 矛盾；故只能有 $ker\psi=ker\psi'$ 且 $ker\psi=1$，即 K 的任意非线性不可约特征标均忠实。同理可证，H 的任意非线性不可约特征标均忠实。故 K 为 J_0-群，H 为 J_0-群，且 G 幂零，由引理 1 可得 K 为 J_0-p-群，H 为 J_0-q-群，p,q 是不同的素数；此时 $Kern(G)=\{1,H,K\}=N(G)$；G 为 $K(3, 3)$-群。

(ii) 若 $ker(\psi\times\varphi)\neq 1$，可以断言 K 和 H 任意的非线性不可约特征标均忠实。若否，设 $\psi'\in Irr(K)$ 且 $\psi\neq\psi'$，由于 $H\le ker(\psi\times 1_H)$，$H\le ker(\psi'\times 1_H)$，则可得 $ker(\psi\times 1_H)\neq 1$，$ker(\psi'\times 1_H)\neq 1$；又由 $G=H\times K$，可以得到 $\psi\times\varphi,\psi'\times\varphi$ 是 G 的非线性不可约特征标，此时

$$ker(\psi\times\varphi)\in Kern(G),\quad ker(\psi'\times\varphi)\in Kern(G)$$

$$ker(\psi\times 1_H)\in Kern(G),\quad ker(\psi'\times 1_H)\in Kern(G)$$

若 $ker\psi\neq ker\psi'$，有 $|Kern(G)|=4$，与 $|Kern(G)|=3$ 矛盾；故只能有 $ker\psi=ker\psi'$ 且 $ker\psi=1$，即 K 的任意非线性不可约特征标均忠实。同理可证，H 的任意非线性不可约特征标均忠实。因此对 $\forall\psi\in Irr(K)$，$\forall\psi\in Irr(K),\forall\varphi\in Irr(H)$，有 $ker\psi=1$，$ker\varphi=1$，此时 $ker(\varphi\times\psi)=ker\varphi\times ker\psi=1$ 与 $ker(\psi\times\varphi)\neq 1$，矛盾。故此种情况不存在。

(II) H 可换，已知 $H\times ker\varphi\in Kern(G)$，不妨设

$$Kern(G)=\{ker\chi_1=H\times ker\psi, ker\chi_2, ker\chi_3\}$$

其中 $\chi_1,\chi_2,\chi_3\in Irr(G)$，接下来分别讨论 $1\in Kern(G)$ 和 $1\notin Kern(G)$。

(i) 若 $1\in Kern(G)$，不妨设 $ker\chi_2=1$。因为 H 可换，设 λ 是 H 的非主线性不可约特征标，记 $\chi_2=\lambda\times\psi$，可得 $\lambda\times\psi$ 是 G 的非线性忠实不可约特征标，则

$$ker(\lambda\times\psi)=ker\lambda\times ker\psi=1，有 ker\lambda=1，\ ker\psi=1，$$

可得 H 存在非主忠实线性特征标 λ；对 $\forall\psi\in Irr(K)$，K 的非线性不可约特征标均忠实。若否，设 $\psi'\in Irr(K)$ 且 $\psi\neq\psi'$，由于 $H\le ker(\psi\times 1_H)$，$H\le ker(\psi'\times 1_H)$，则可得 $ker(\psi\times 1_H)\neq 1$，$ker(\psi'\times 1_H)\neq 1$；由 $G=H\times K$，可以得到 $\psi\times\varphi,\psi'\times\varphi$ 是 G 的非线性不可约特征标，此时

$$ker(\psi\times\varphi)\in Kern(G),\quad ker(\psi'\times\varphi)\in Kern(G)$$

$$ker(\psi\times 1_H)\in Kern(G)，\ ker(\psi'\times 1_H)\in Kern(G)。$$

若 $ker\psi\neq ker\psi'$，有 $|Kern(G)|=4$，与 $|Kern(G)|=3$ 矛盾；故只能有 $ker\psi=ker\psi'$ 且 $ker\psi=1$，故 K 的任意非线性不可约特征标均忠实，即 $|Kern(K)|=1$，K 是 J_0-群，由引理 1 可得 K 为 J_0-p-群。因为 $|Kern(G)|=3$，所以 H 一定存在非主非忠实不可约特征标，且 H 的非主非忠实不可约特征标的核均相等。若否，设 H 的非主非忠实不可约特征标均 α_1,α_2，有 $ker\alpha_1\neq ker\alpha_2$，则可以得到 $\alpha_1\times\psi,\alpha_2\times\psi$ 是 G 的非线性非忠实不可约特征标，即

$$1\neq ker(\alpha_1\times\psi)\in Kern(G)，\ 1\neq ker(\alpha_2\times\psi)\in Kern(G)。$$

$$又\ ker(\alpha_1\times\psi)=ker\alpha_1\times ker\psi，\ ker(\alpha_2\times\psi)=ker\alpha_2\times ker\psi，$$

且 $ker\psi=1$，$ker\alpha_1\neq ker\alpha_2$，故 $ker(\alpha_1\times\psi)\neq ker(\alpha_2\times\psi)$，与 $|Kern(G)|=3$ 矛盾，因此 $ker\alpha_1=ker\alpha_2$。此时令 H 的线性不可约特征标的核组成的集合为 $\{H,ker\lambda,ker\alpha\}$，根据群的每个正规子群可表为若干个特征标核子群的交，因此有以下几种情况：$H\cap ker\lambda=1$，$H\cap ker\alpha=ker\alpha$，$ker\lambda\cap ker\alpha=1$。故可知 H 仅有一个非平凡子群，即 $ker\alpha$。由于 H 可换，$ker\lambda=1$，有忠实不可约特征标。根据定理 $\lambda\in Irr(G)$，$Z(\lambda)/ker\lambda=Z(H/ker\lambda)$，所以有 $H=Z(H)$，且 H 循环，则 $|H|=q^2$，其中 q 是素数，此时有 $Kern(G)=\{1,H,ker\chi_3\}$。已知 $ker\alpha$ 是 H 仅有的非平凡子群，令 $N=ker\alpha$。则由 H 的线性不可约特征标 α 和 K 的非线性不可约特征标 ψ 的乘积，可得 $\alpha\times\psi$ 是 G 的非线性非忠实不可约特征标且 $ker\psi=1$，即 $ker(\alpha\times\psi)=ker\alpha\in Kern(G)$。

综上可得，K 为 J_0-p-群，其中 H 是 q^2 阶循环群，p,q 是不同的素数；$Kern(G)=\{1,H,N\}=N(G)$，其中 $1\neq N<H$；此时 G 为 $K(3, 3)$-群。

(ii) 若 $1\notin Kern(G)$，$|Kern(G)|=3$，此时

$$Kern(G)=\{ker\chi_1=H\times ker\psi,ker\chi_2,ker\chi_3\}。$$

先确定 K 的非线性不可约特征标核的个数。

若 K 的非线性不可约特征标核互不相同的个数大于等于 2 时，记集合为 $\Omega=\{ker\psi_1,ker\psi_2\}$，$\psi_1,\psi_2\in Irr(K)$，先取 H 的主特征标 1_H，由 $H\leq ker(\psi_i\times 1_H)$，$i=1,2$，得到 $ker(\psi_i\times 1_H)\neq 1$，此时有 $ker(\psi_i\times 1_H)=ker\psi_i\times H\in Kern(G)$，$i=1,2$。$Kern(G)=\{ker\psi_1\times H,ker\psi_2\times H\}$，此时可确定 $|Kern(G)|=2$。其次取 H 非主线性不可约特征标 α，可以得到 $\psi_1\times\alpha,\psi_2\times\alpha$ 是群 G 的非线性不可约特征标，则 $ker(\psi_i\times\alpha)\in Kern(G)$，$i=1,2$。即 $|Kern(G)|\geq 4$，与 $|Kern(G)|=3$ 矛盾。因此，K 的非线性不可约特征标核的个数为 1，令 ψ 是 K 的非线性不可约特征标，根据群的所有非线性不可约特征标核之交为 1，故 $ker\psi=1$。

H 可换，接下来考虑 H 的线性特征标核的个数。

(a) 若 H 的线性特征标核互不相同的个数为 4，则设 H 的线性特征标的核组成的集合 $\Omega=\{ker(1_H),ker\alpha_1,ker\alpha_2,ker\alpha_3\}$，显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中至多有一个是忠实的，不妨设 α_3 是忠实的，则有

$$\begin{cases}ker(1_H\times\psi)=H\times ker\psi\in Kern(G)\\ ker(\alpha_i\times\psi)\in Kern(G),i=1,2,3\end{cases}。$$

此时 $|Kern(G)|>3$ 与 $|Kern(G)|=3$ 矛盾。同理，H 的线性特征标核的个数不可能大于 5。

接下来考虑 H 的线性特征标核互不相同的个数为 2 和 3。

(b) 若 H 的线性特征标核互不相同的个数为 2，则设 H 的线性特征标的核组成的集合 $\Omega=\{ker(1_H),ker\alpha\}$，则有

$$\begin{cases} ker(1_H\times\psi)=H\times ker\psi\in Kern(G) \\ ker(\psi\times\alpha)\in Kern(G) \end{cases}。$$

与 $|Kern(G)|=3$ 矛盾。

(c) 若 H 的线性特征标核互不相同的个数为 3，记为 $\Omega=\{ker(1_H),ker\alpha,ker\beta\}$。接下来分两种情况讨论：① H 无忠实不可约特征标；② H 有忠实不可约特征标。

① H 无忠实不可约特征标

设 H 的线性特征标核组成的集合为 $\Omega=\{H,ker\alpha\neq 1,ker\beta\neq 1\}$，使得 $ker\alpha\cap ker\beta=1$。所以可知 H 有两个非平凡子群，记为 A,B 且 $A\cap B=1$，所以 $|H|=pq$，不妨设 $|A|=p$，$|B|=q$，$p\neq q$，显然 $H=AB$；$A\cap B=1$；$A\lhd H,B\lhd H$，所以 $H=A\times B$，因为 A,B 分别是 p 阶循环群和 q 阶循环群，所以，A,B 中的所有非主线性特征标均忠实，又因为 $(p,q)=1$，所以 H 有忠实特征标，矛盾。

② H 有忠实不可约特征标

设 H 的线性特征标核组成的集合为 $\Omega=\{ker(1_H),ker\alpha\neq 1,ker\beta=1\}$，则 H 仅有一个非平凡子群，所以 $|H|=q^2$，H 为 q^2 阶循环群，q 是素数。断言 $ker(\alpha\times\psi)\neq ker(\beta\times\psi)$，$\psi\in Irr(K)$，若否，令 $ker(\alpha\times\psi)=ker(\beta\times\psi)$，则 $ker\alpha\times ker\psi=ker\beta\times ker\psi$，有 $ker\alpha=ker\beta$，矛盾。故 $ker(\alpha\times\psi)\neq ker(\beta\times\psi)$。此时

$$Kern(G)=\{H,ker(\alpha\times\psi),ker(\beta\times\psi)\}。$$

由于 $ker\beta=1$，$ker\psi=1$，则 $ker(\beta\times\psi)=1$，即 $1\in Kern(G)$，矛盾。故此种情况不存在。

由此便完成了定理 2 的证明。

基金项目

国家自然科学基金(12201553)；云南民族大学教学研究项目(2022JG-032)。

参考文献

[1] Berkovich, Y. and Zhmud, E. (1998) Characters of Finite Groups. Part 2. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/mmono/181

[2] Qian, G. and Wang, Y. (2008) A Note on Character Kernels in Finite Groups of Prime Power Order. *Archiv der Mathematik*, **90**, 193-199. https://doi.org/10.1007/s00013-007-2392-z

[3] Doostie, H. and Saeidi, A. (2012) Finite *p*-Groups with Few Nonlinear Irreducible Character Kernels. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **38**, 413-422.

[4] Li, P. and Zhang, Q. (2023) Finite *p*-Groups with Few Kernels of Nonlinear Irreducible Characters. *Frontiers of Mathematics*, **18**, 65-80. https://doi.org/10.1007/s11464-021-0307-0

[5] Saeidi, A. (2014) Classification of Solvable Groups Possessing a Unique Nonlinear Non-Faithful Irreducible Character. *Open Mathematics*, **12**, 79-83. https://doi.org/10.2478/s11533-013-0327-4

[6] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京: 科学出版社, 1999.