Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(11), 4813-4822**
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311463

Hans汉斯

范围固定二三混水平扩充设计的均匀性

熊烽景*，肖宇佳

吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2024年10月7日；录用日期：2024年11月1日；发布日期：2024年11月8日

摘　要

扩充设计在生物制药，化学化工等领域运用广泛。Gao在2020年构造了一类范围固定二三混水平扩充设计。本文从设计的均匀性角度出发，研究了范围固定水平扩充设计在可卷型L_2-偏差下的均匀型。首先建立水平扩充设计的可卷型L_2-偏差与二水平基石设计的相遇数之间的解析联系，并获得其下界。其次基于距离分布和字长型模式分别建立水平扩充设计与基石设计之间的解析联系。最后通过数值例子解释所获得理论结果。

关键词

范围固定水平扩充设计，均匀设计，可卷型L_2-偏差，字长型模式

Uniformity of the Range-Fixed Level-Augmented Designs of Mixed Two and Three Levels

Fengjing Xiong*, Yujia Xiao

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Oct. 7th, 2024; accepted: Nov. 1st, 2024; published: Nov. 8th, 2024

Abstract

Augmented designs are widely applied in biological pharmacy, chemistry and chemical engineering, and so on. Gao constructed a class of range-fixed level-augmented designs in 2020. The article, starting from the perspective of design uniformity, investigates the uniformity of range-fixed level-augmented designs under the condition of wrap L_2-discrepancy. Firstly, the analytical connection between the wrap L_2-discrepancy of the range-fixed level-augmented designs of mixed two and three

*通讯作者。

文章引用: 熊烽景, 肖宇佳. 范围固定二三混水平扩充设计的均匀性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 4813-4822.
DOI: 10.12677/aam.2024.1311463

levels and the coincidence number of the footstone-designs with two levels is established, and its lower bound is obtained. Secondly, based on distance distribution and wordlength pattern, the analytical connections between the level-augmented designs and the footstone-designs are built respectively. Finally, the obtained theoretical results are explained by some numerical examples.

Keywords

Range-Fixed Level-Augmented Design, Uniform Design, Wrap L_2-Discrepancy, Wordlength Pattern

1. 引言

在对复杂系统进行研究时，仅仅采用初始试验往往很难达到预期的目标，需要进行跟随试验，对原有的设计进行扩充，来获得更多信息。扩充设计的研究主要是在不同准则下对试验次数的扩充(行扩充)或因子数的扩充(列扩充)及相关性质进行研究。

均匀设计是一种空间填充设计，它要求试验点均匀地遍布在试验区域。因为试验次数的灵活性，均匀设计在各领域有着广泛的应用。偏差作为均匀性的度量，在许多文献中已进行了讨论，常见的偏差有中心化 L_2-偏差，可卷型 L_2-偏差，混合偏差和离散偏差等。文献[1]在超饱和设计的度量准则下，通过向二水平最优超饱和设计添加一些试验得到一类具有优良性质的二水平超饱和设计的扩充设计。文献[2]和文献[3]分别将文献[1]推广到任意水平的对称设计和非对称设计，并给出一类最优的对称和非对称超饱和设计的扩充设计。文献[4]基于贝叶斯 D 最优准则给出了二水平超饱和设计的列扩充方法。文献[5]首次在偏差准则下，通过行扩充的方式讨论了二水平均匀设计的扩充设计。文献[6]以及文献[7]将文献[3]的结论推广到三水平和二三混水平情形。文献[8]分别从行或列和行列同时扩充的方式在可卷型 L_2-偏差下讨论了二三混水平均匀设计的扩充设计。从均匀性角度讨论扩充设计的更多成果可参考文献[9] [10]。

在实施跟随试验时，其设计的试验域有时需要扩大，有时设计的试验域需要保持不变。文献[11]与文献[12]分别对应试验域范围扩大以及范围不变的两种情况，文献[13]根据试验域是否扩充，将设计分为范围扩充和范围固定的水平扩充设计，对于不同类型的初始设计，基于可卷型 L_2-偏差，分别讨论了对称和非对称水平扩充设计的均匀性。文献[14]给出了范围固定水平扩充设计的构造方法，讨论了所构造设计在最大最小 L_1-距离下的空间填充性，但没有对其他性质进行进一步的研究，所以本文基于可卷型 L_2-偏差研究文献[14]所构造的范围固定二三混水平扩充设计的均匀性并讨论相关性质。

本文余下部分结构如下：第二节给出了一些符号和准则；第三节讨论了范围固定二三混水平扩充设计与基石二水平设计基于可卷型 L_2-偏差的均匀性关系；第四节在距离分布和字长型模式下研究了范围固定二三混水平扩充设计与二水平基石设计之间的解析联系；第五节通过数值例子解释所获的理论结果；第六节对本文进行了总结。

2. 基本概念

2.1. 均匀设计

设 $D\left(n;q_1^{s_1}\times q_2^{s_2}\right)$ 表示一类具有 n 次试验，$s\left(=s_1+s_2\right)$ 个因子的非对称设计集合，s_i 个因子的水平取自集合 $\{0,\cdots q_k-1\},k=1,2$。若对于集合 $\{0,\cdots,q_k-1\},k=1,2.$ 中的任意一个设计 d 的每一列中各个水平出

现的次数相同，则称 d 为 U-型设计，这类 U-型设计的集合记为 $U\left(n;q_1^{s_1}\times q_2^{s_2}\right)$。当 $q_1=q_2=q$ 时，称其为对称的 U-型设计，$U\left(n;q^s\right)$，$U\left(n;q_1^{s_1}\times q_2^{s_2}\right)$ 分别表示对称 U-型设计和非对称 U-型设计的集合。

对任意设计 $d\in U\left(n;q_1^{s_1}\times q_2^{s_2}\right)$，其任意两行 u 和 v 可分别表示为 $u=\left(u_1,u_2\right)$，$v=\left(v_1,v_2\right)$；$u_k=\left(u_{k1},u_{k2},\cdots,u_{ks_k}\right)$，$v_k=\left(v_{k1},v_{k2},\cdots,v_{ks_k}\right)$，$u_{ks_k},v_{ks_k}\in\{0,\cdots,q_k-1\},k=1,2$。记 $d_H\left(u,v\right)$ 为第 u 行与第 v 行之间的 *Hamming* 距离，即两行之间对应位置元素不同的位置个数，显然，$d_H\left(u,v\right)=d_H\left(u_1,v_1\right)+d_H\left(u_2,v_2\right)$。记 $\lambda_{uv}\left(d\right)$ 为第 u 行与第 v 行之间的相遇数，即两行之间对应位置元素相同的位置个数。由 *Hamming* 距离与相遇数之间的关系可知 $\lambda_{uv}\left(d\right)=s_1+s_2-d_H\left(u,v\right)$。

2.2. 广义字长型

对于给定设计 $d\in U\left(n;q_1^{s_1}\times q_2^{s_2}\right)$，$j_1=0,\cdots,s_1$，$j_2=0,\cdots,s_2$。其距离分布定义为：

$$E_{j_1j_2}\left(d\right)=\frac{1}{n}\left|\left\{\left(u,v\right):d_H\left(u_1,v_1\right)=j_1,d_H\left(u_2,v_2\right)=j_2,u=\left(u_1,u_2\right)\in d,v=\left(v_1,v_2\right)\in d\right\}\right|, \tag{1}$$

其中 $|\Omega|$ 表示集合 Ω 中元素的个数。$E_{j_1j_2}\left(d\right)$ 的 MacWilliams 变换为：

$$A_{i_1i_2}\left(d\right)=\frac{1}{n}\sum_{j_1=0}^{s_1}\sum_{j_2=0}^{s_2}P_{i_1}\left(j_1;s_1,q_1\right)P_{i_2}\left(j_2;s_2,q_2\right)E_{j_1j_2}\left(d\right), \tag{2}$$

其中 $P_{i_t}\left(j_t;s_t,q_t\right)=\sum_{r=0}^{i_t}\left(-1\right)^r\left(q_t-1\right)^{i_t-r}\binom{j_t}{r}\binom{s_t-j_t}{i_t-r}$ 为 Krawtchouk 多项式之和，$i_t=0,\cdots,s_t,t=1,2$。

令

$$A_i^g\left(d\right)=\sum_{i_1+i_2=i}A_{i_1i_2}\left(d\right),\quad i=1,\cdots,s_1+s_2, \tag{3}$$

称 $A_i^g\left(d\right)$ 为设计 d 的广义字长型。广义最小低阶混杂(GMA)准则是序贯最小化字长型向量 $\left(A_1^g\left(d\right),\cdots,A_{s_1+s_2}^g\left(d\right)\right)$。

2.3. 可卷型 L_2-偏差

本文采用的均匀性度量为可卷型 L_2-偏差(简记 *WD*)。对于任意设计的 $d=\left(x_{ij}\right)_{n\times s}\in U\left(n;q_1^{s_1}\times q_2^{s_2}\right)$，其 *WD* 值的平方可以由下列式子计算，

$$\left[WD\left(d\right)\right]^2=-\left(\frac{4}{3}\right)^{s_1+s_2}+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\prod_{k=1}^{2}\prod_{l=1}^{s_k}\left[\frac{3}{2}-\left|u_{il}^{(k)}-u_{jl}^{(k)}\right|\left(1-\left|u_{il}^{(k)}-u_{jl}^{(k)}\right|\right)\right] \tag{4}$$

其中 $u_{il}^{(k)}=\frac{2x_{il}^{(k)}+1}{2q_k}$，$x_{il}^{(k)}\in\left\{0,1,\cdots,q_k-1\right\}$，$k=1,2$。

对于一个设计 d，若没有其他同规模的设计比它有更小的 *WD* 值，则称设计 d 为 *WD* 偏差下的均匀设计。

对于任意设计 $d\in U\left(n;q_1^{s_1}\times q_2^{s_2}\right)$，其效率定义为：

$$e=\frac{LB\left[WD\left(d\right)\right]}{\left[WD\left(d\right)\right]^2},$$

其中 $LB\left[WD\left(d\right)\right]$ 是 $\left[WD\left(d\right)\right]^2$ 的下界，当 $e=1$ 时，设计 d 被称为均匀设计。当 $q_1=q_2=2$ 时，文献[15]给出二水平设计的 *WD* 值平方及其下界，

$$\left[WD(d)\right]^2 = -\left(\frac{4}{3}\right)^s + \frac{1}{n^2}\left(\frac{5}{4}\right)^s \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{6}{5}\right)^{\lambda_{ij}(d)}, \tag{5}$$

$$LB\left[WD(d)\right] = -\left(\frac{4}{3}\right)^s + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^s + \frac{1}{n^2}\left(\frac{5}{4}\right)^s \left[p\left(\frac{6}{5}\right)^w + q\left(\frac{6}{5}\right)^{w+1}\right], \tag{6}$$

在其中，w 是 $s(n-2)/\left[2(n-1)\right]$ 的整数部分，$p = n(n-1)(w+1) - n(n-2)s/2$, 以及，$q = n(n-2)s/2 - n(n-1)w$。二水平设计 WD 值平方达到(6)式的充分必要条件是任意不同两行的相遇数的差不能超过 1。

2.4. 范围固定的水平扩充设计

文献[1]定义了范围固定水平扩充设计。设 n_1 为跟随阶段的试验次数，s_1，s_2 分别为水平不变和水平扩张的因子个数，$s_1 + s_2 = s$。如果 $d_0 \in U(n;2^s)$，将 d_0 中 s_2 个水平扩张因子的水平从 $\{0,1\}$ 水平变为 $\{0,q+1\}$ 水平。得到设计 $\widetilde{d_0}$，且 $d_1 \in D\left(n;2^{s_1}(2+q)^{s_2}\right)$。则称设计 $D = \left(\widetilde{d_0}^T, d_1^T\right)^{\mathrm{T}} \in U\left(n+n_1;2^{s_1}(2+q)^{s_2}\right)$ 为范围固定水平扩充设计。文献[1]给出了范围固定二三混水平扩充设计的构造方法，具体步骤如下：

第一步，给定一个二水平基石设计 $X \in U(n;2^s)$，初始设计为以下形式：$d_0 = \begin{pmatrix} 0 & X & X \\ 1 & X & X_f \end{pmatrix}$，其中 0,1 分别表示 n 个 0 和 n 个 1 的列向量，X_f 是 X 的折叠反转设计。即把 X 中的水平 0，1 变为 1，0 就得到折叠反转设计 X_f；

第二步，将初始设计 d_0 第一列中的向量 1 变为 2。得到 $\widetilde{d_0}$；

第三步，将扩充部分 $d_1 = \begin{pmatrix} 1 & X_f & X \end{pmatrix}$，添加到 $\widetilde{d_0}$；即 $d_{32} = \begin{pmatrix} \widetilde{d_0} \\ d_1 \end{pmatrix}$ 为最终所构造的范围固定的二三混水平扩充设计。

3. 主要结论

本节主要讨论范围固定水平扩充设计的均匀性及相关性质。

3.1. 范围固定二三混水平扩充设计的均匀性

本节主要讨论基于可卷型 L_2-偏差下范围固定二三混水平扩充设计的均匀性。记 $\delta_{ij}^{(a,b)}(X, X_f)$ 表示设计 X 的第 i 行与 X_f 的第 j 行出现数对 (a,b) 的个数，记 $\delta_{ij}^{(a,b)}(X)$ 表示设计 X 的第 i 行与第 j 行出现数对 (a,b) 的个数，下面引理给出了范围固定二三混水平扩充设计 d_{32} 的相遇数 $\lambda_{ij}(d_{32})$ 与二水平基石设计 X 的相遇数 $\lambda_{ij}(X)$ 之间的关系，这关系对研究后面的问题研究是必不可少的。

引理 3.1.1 设 $X \in U(n;2^s)$ 为二水平基石设计，$d_{32} \in U\left(3n;3^1 \times 2^{2s}\right)$ 是范围固定二三混水平扩充设计。则二者之间的相遇数具有以下关系，

$$\lambda_{(i+kn)(j+ln)}(d_{32}) = \begin{cases} 2\lambda_{ij}(X)+1, & k=l, k,l=0,1,2; \\ 2s-2\lambda_{ij}(X), & k \neq l, k=1, l=2; k=2, l=1; \\ s, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明： 当 $k = l = 0$ 时，

$$\lambda_{ij}(d_{32}) = 1 + \lambda_{ij}(X) + \lambda_{ij}(X) = 1 + 2\lambda_{ij}(X);$$

当 $k = 1$，$l = 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
\lambda_{i+n,j+2n}\left(d_{32}\right) &= \delta_{i+n,j+2n}^{(0,0)}\left(d_{32}\right)+\delta_{i+n,j+2n}^{(1,1)}\left(d_{32}\right) \\
&= \delta_{ij}^{(0,0)}\left(X,X_f\right)+\delta_{ij}^{(1,1)}\left(X,X_f\right)++\delta_{ij}^{(0,0)}\left(X_f,X\right)+\delta_{ij}^{(1,1)}\left(X_f,X\right) \\
&= \delta_{ij}^{(0,1)}\left(X\right)+\delta_{ij}^{(1,0)}\left(X\right)+\delta_{ij}^{(1,0)}\left(X\right)+\delta_{ij}^{(0,1)}\left(X\right) \\
&= 2s-2\lambda_{ij}\left(X\right);
\end{aligned}
$$

当 $k=0$， $l=1$ 时，

$$
\begin{aligned}
\lambda_{i,j+n}\left(d_{32}\right) &= \delta_{i,j+n}^{(0,0)}\left(d_{32}\right)+\delta_{i,j+n}^{(1,1)}\left(d_{32}\right) \\
&= \delta_{ij}^{(0,0)}\left(X,X\right)+\delta_{ij}^{(1,1)}\left(X,X\right)+\delta_{ij}^{(0,0)}\left(X,X_f\right)+\delta_{ij}^{(1,1)}\left(X,X_f\right) \\
&= \delta_{ij}^{(0,0)}\left(X\right)+\delta_{ij}^{(1,1)}\left(X\right)+\delta_{ij}^{(0,1)}\left(X\right)+\delta_{ij}^{(1,0)}\left(X\right) \\
&= s,
\end{aligned}
$$

引理 3.1.1 证毕。

下面的定理建立了范围固定二三混水平扩充设计 d_{32} 的 WD 值的平方与二水平基石设计相遇数 $\lambda_{ij}\left(X\right)$ 之间的解析联系。

定理 3.1.1 设 $X\in U\left(n;2^s\right)$ 为二水平基石设计， $d_{32}\in U\left(3n;3^1\times 2^{2s}\right)$ 是范围固定二三混水平扩充设计。则

$$
\begin{aligned}
\left[WD\left(d_{32}\right)\right]^2 = &-\left(\frac{4}{3}\right)^{2s+1}+\frac{1}{3n}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s+1}+\frac{23}{81n}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}+\frac{1}{2n^2}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\frac{6}{5}\right)^{2\lambda_{ij}(X)} \\
&+\frac{23}{81n^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{2\lambda_{ij}(X)}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

证明：根据(4)式与引理 3.1.1， d_{32} 的 WD 值的平方可表示为

$$
\begin{aligned}
\left[WD(d_{32})\right]^2 &= -\left(\frac{4}{3}\right)^{2s+1}+\frac{1}{(3n)^2}\sum_{i=1}^{3n}\sum_{j=1}^{3n}\prod_{l=1}^{2s+1}\left[\frac{3}{2}-\left|u_{il}-u_{jl}\right|\left(1-\left|u_{il}-u_{jl}\right|\right)\right] \\
&= -\left(\frac{4}{3}\right)^{2s+1}+\frac{1}{(3n)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}+\sum_{i=n+1}^{2n}+\sum_{i=2n+1}^{3n}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}+\sum_{j=n+1}^{2n}+\sum_{j=2n+1}^{3n}\right) \\
&\qquad\times\prod_{l=1}^{2s+1}\left[\frac{3}{2}-\left|u_{il}-u_{jl}\right|\left(1-\left|u_{il}-u_{jl}\right|\right)\right] \\
&= -\left(\frac{4}{3}\right)^{2s+1}+\frac{46}{81}\left(\frac{15}{8}\right)^{s}+\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{2\lambda_{ij}(X)}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s-2\lambda_{ij}(X)} \\
&\quad+\frac{1}{3n}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s+1}+\frac{23}{81n}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}+\frac{23}{81n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s-2\lambda_{ij}(X)}\left(\frac{5}{4}\right)^{2\lambda_{ij}(X)} \\
&= -\left(\frac{4}{3}\right)^{2s+1}+\frac{1}{3n}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s+1}+\frac{23}{81n}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}+\frac{46}{81}\left(\frac{15}{8}\right)^{s} \\
&\quad+\frac{1}{2n^2}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\frac{6}{5}\right)^{2\lambda_{ij}(X)}+\frac{23}{81n^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{2\lambda_{ij}(X)}.
\end{aligned}
$$

定理 3.1.1 证毕。

定理 3.1.1 表明范围固定二三混水平扩充设计 d_{32} 的 WD 值平方是由二水平基石设计 X 的相遇数确定。下面的定理给出了 d_{32} 的 WD 值平方的一个下界，该下界作为一个基准用于评价设计的均匀性和搜索均匀设计。

3.2. 范围固定二三混水平扩充设计在 *WD* 偏差的下界

定理 3.2.1 设 $X\in U\left(n;2^{s}\right)$ 为二水平基石设计，$d_{32}\in U\left(3n;3^{1}\times 2^{2s}\right)$ 是范围固定二三混水平扩充设计。则

$$\left[WD\left(d_{32}\right)\right]^{2}\geq LB\left[WD\left(d_{32}\right)\right] \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}LB\left[WD\left(d_{32}\right)\right]=&-\left(\frac{4}{3}\right)^{2s+1}+\frac{46}{81}\left(\frac{15}{8}\right)^{s}+\frac{1}{2n}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s}+\frac{23}{81n}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\\&+\frac{1}{2n^{2}}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\left(p\left(\frac{6}{5}\right)^{2w}+q\left(\frac{6}{5}\right)^{2w+2}\right)+\frac{23}{81n^{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s}\left(p\left(\frac{5}{6}\right)^{2w}+q\left(\frac{5}{6}\right)^{2w+2}\right),\end{aligned} \tag{9}$$

在其中，w 是 $s(n-2)/\left[2(n-1)\right]$ 的整数部分，$p=n(n-1)(w+1)-n(n-2)s/2$，以及，$q=n(n-2)s/2-n(n-1)w$。定理 3.2.1 中等号成立的条件是二水平基石设计的任意不同两行的相遇数之差不超过 1。

证明： 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n^{2}}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\frac{6}{5}\right)^{2\lambda_{ij}(X)}&=\frac{1}{2n^{2}}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\mathrm{e}^{\lambda_{ij}(X)2\ln\left(\frac{6}{5}\right)}\\&=\frac{1}{2n^{2}}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(2\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right)^{l}}{l!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\lambda_{ij}(X)^{l},\end{aligned}$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\lambda_{ij}(X)=\frac{n(n-2)s}{2}$，根据文献[15]有：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\lambda_{ij}(X)\right)^{l}\geq pw^{l}+q(w+1)^{l}$，

因此，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n^{2}}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\frac{6}{5}\right)^{2\lambda_{ij}(X)}&\geq\frac{1}{2n^{2}}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\sum_{l=0}^{\infty}\left[p\frac{\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)^{2w}\right)^{l}}{l!}+q\frac{\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)^{2(w+1)}\right)^{l}}{l!}\right]\\&\geq\frac{1}{2n^{2}}\left(\frac{5}{4}\right)^{2s}\left(p\left(\frac{6}{5}\right)^{2w}+q\left(\frac{6}{5}\right)^{2(w+1)}\right),\end{aligned}$$

类似地，有

$$\frac{23}{81n^{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j(\neq i)=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{2\lambda_{ij}(X)}\geq\frac{23}{81n^{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{2s}\left(p\left(\frac{5}{6}\right)^{2w}+q\left(\frac{5}{6}\right)^{2(w+1)}\right),$$

结合(7)式，可得到定理 3.2.1。

根据定理 3.1.1 和定理 3.2.1 可知，当二水平基石设计是 *WD* 下的均匀设计时，其范围固定二三混水平扩充设计也是 *WD* 的均匀设计。由于饱和设计的任意不同两行的相遇数是常数，很容易获得下面的推论。

推论 3.2.1 当二水平基石设计是饱和正交设计时，其范围固定二三混水平扩充设计是 *WD* 下的均匀设计。

3.3. 水平扩充设计与基石设计的字长型模式之间的联系

本节主要讨论范围固定二三混水平扩充设计与二水平基石设计的字长型模式之间的解析联系。根据引理 3.1.1，可得到范围固定二三混水平扩充设计 d_{32} 的 Hamming 距离 $d_H^*(i+kn, j+ln)$ 和二水平基石设计 X 的 Hamming 距离 $d_H(i,j)$ 之间的联系，见引理 3.2.1。

引理 3.3.1 设 $X \in U(n;2^s)$ 为二水平基石设计，$d_{32} \in U(3n;3^1 \times 2^{2s})$ 是范围固定二三混水平扩充设计，二者的 Hamming 距离有如下关系，

$$d_H^*(i+kn, j+ln)=\begin{cases}2d_H(i,j), & k=l,k,l=0,1,2;\\ 2s-2d_H(i,j)+1, & k\neq l,k=1,l=2;k=2,l=1;\\ s+1, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 Hamming 距离易知二水平基石设计与其二三混水平扩充设计的距离分布之间的关系如下。

引理 3.3.2 设 $X \in U(n;2^s)$ 为二水平基石设计，$d_{32} \in U(3n;3^1 \times 2^{2s})$ 是范围固定二三混水平扩充设计。则

(1) 当 $s \bmod 2=0$ 时，

(i) 当 $k_1=0$ 时，

$$E^*_{i_1(2i_2)}(d_{32})=E_{i_2}(X),\quad E^*_{i_1(2i_2+1)}(d_{32})=0,\quad i_2=0,1,\cdots,s;$$

(ii) 当 $k_1=1$ 时，

$$E^*_{i_1(2i_2)}(d_{32})=\begin{cases}\frac{2}{3}E_{s-i_2}(X), & i_2=0,1,\cdots,s,\text{且}i_2\neq\frac{s}{2};\\ \frac{2}{3}E_{s-i_2}(X)+\frac{4n}{3}, & i_2=\frac{s}{2};\end{cases}$$

$$E^*_{i_1(2i_2+1)}(d_{32})=0,\quad i_2=0,1,\cdots,s.$$

(2) 当 $s \bmod 2=1$ 时，

(i) 当 $k_1=0$ 时，

$$E^*_{i_1(2i_2)}(d_{32})=E_{i_2}(X),\quad E^*_{i_1(2i_2+1)}(d_{32})=0,\quad i_2=0,1,\cdots,s;$$

(ii) 当 $k_1=1$ 时，

$$E^*_{i_1(2i_2+1)}(d_{32})=\begin{cases}0, & i_2=0,1,\cdots,s.\text{且}i_2\neq\frac{s-1}{2};\\ \frac{4n}{3}, & i_2=\frac{s-1}{2};\end{cases}$$

$$E^*_{i_1(2i_2)}(d_{32})=\frac{2}{3}E_{s-i_2}(X),\quad i_2=0,1,\cdots,s.$$

证明： 若 $s \bmod 2=0$ 时，(i)当 $k_1=0$，根据(1)式和引理 3.2.1，

$$\begin{aligned}E_{i_1(2i_2)}(d_{32})&=\frac{1}{3n}\left|\left\{(i^*,j^*):d_H^*\left(i^{(1)*},j^{(1)*}\right)=0,d_H^*\left(i^{(2)*},j^{(2)*}\right)=2i_2\right\}\right|\\ &=\frac{1}{3n}\times 3\left|\left\{(i,j):d_H(i,j)=i_2\right\}\right|=\frac{1}{3n}\times 3nE_{i_2}(X)=E_{i_2}(X),\end{aligned}$$

$$E^*_{i_1(2i_2+1)}\left(d_{32}\right)=0.$$

其他情况类似证明，引理 3.3.2 成立。

下面定理给出了范围固定二三混水平扩充设计与基石设计的字长型模式之间的关系。

定理 3.3.1 设 $X\in U\left(n;2^s\right)$ 为二水平基石设计，$d_{32}\in U\left(3n;3^1\times 2^{2s}\right)$ 是范围固定二三混水平扩充设计。则

$$\begin{aligned}A_{j_1j_2}\left(d_{32}\right)=&\frac{1}{3\times 2^s}\sum_{i_2=0}^{s}\sum_{v=0}^{s}P_{j_1}(0;1,3)P_{j_2}\left(2i_2;2s,2\right)P_{i_2}\left(v;s,2\right)A_v\left(X\right)\\&+\frac{2}{9\times 2^s}\sum_{i_2=0}^{s}\sum_{v=0}^{s}P_{j_1}(1;1,3)P_{j_2}\left(2i_2;2s,2\right)P_{s-i_2}\left(v;s,2\right)A_v\left(X\right)\\&+\frac{4}{9}P_{j_1}(1;1,3)P_{j_2}\left(s;2s,2\right).\end{aligned}\tag{10}$$

证明： 当 $s \bmod 2=0$ 时，由(2)式和定理 3.2.1，

$$\begin{aligned}A_{j_1j_2}\left(d_{32}\right)&=\frac{1}{3n}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{2s}P_{j_1}\left(i_1;1,3\right)P_{j_2}\left(i_2;2s,2\right)E_{i_1i_2}\left(d_{32}\right)\\&=\frac{1}{3n}\sum_{i_2=0}^{2s}P_{j_1}(0;1,3)P_{j_2}\left(i_2;2s,2\right)E_{0i_2}\left(d_{32}\right)+\frac{1}{3n}\sum_{i_2=0}^{2s}P_{j_1}(1;1,3)P_{j_2}\left(i_2;2s,2\right)E_{1i_2}\left(d_{32}\right)\\&=\frac{1}{3n}\sum_{i_2=0}^{s}P_{j_1}(0;1,3)P_{j_2}\left(2i_2;2s,2\right)E_{0(2i_2)}\left(d_{32}\right)+\frac{1}{3n}\sum_{i_2=0}^{s}P_{j_1}(1;1,3)P_{j_2}\left(2i_2;2s,2\right)E_{1(2i_2)}\left(d_{32}\right)\\&=\frac{1}{3n}\sum_{i_2=0}^{s}P_{j_1}(0;1,3)P_{j_2}\left(i_2;2s,2\right)E_{i_2}\left(X\right)+\frac{2}{9n}\sum_{i_2=0}^{s}P_{j_1}(1;1,3)P_{j_2}\left(2i_2;2s,2\right)E_{s-i_2}\left(X\right)\\&\quad+\frac{4}{9}P_{j_1}(1;1,3)P_{j_2}\left(s;2s,2\right),\end{aligned}$$

再结合 $E_i\left(X\right)=\frac{n}{2^s}\sum_{v=0}^{s}P_i\left(v;s,2\right)A_v\left(X\right)$，可证(10)式成立。当 $s \bmod 2=1$ 时，可类似证明，定理 3.3.1 成立。

4. 数值例子

本节通过数值例子验证本文的理论结果。

例 1： 考虑下列两个二水平设计 $X_1, X_2\in U\left(8;2^7\right)$，其范围固定的二三混水平扩充设计分别记为 d_{32} 和 $\tilde{d}_{32}$

$$X_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&1&1\\1&0&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\quad X_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&1&1\\1&0&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&1&0&1\\1&1&0&1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由(5)~(9)式，分别可求出 $\left[WD\left(X_1\right)\right]^2$，$\left[WD\left(X_2\right)\right]^2$，$LB\left[WD\left(X_1\right)\right]$，$LB\left[WD\left(X_2\right)\right]$，$\left[WD\left(d_{32}\right)\right]^2$，$\left[WD\left(\tilde{d}_{32}\right)\right]^2$，$LB\left[WD\left(d_{32}\right)\right]$，$LB\left[WD\left(\tilde{d}_{32}\right)\right]$。具体数值结果见表 1。

Table 1. Numerical results for example 1
表 1. 例 1 的数值结果

设计	WD^2 值	下界	e
X_1	1.854	1.854	1
X_2	1.905	1.854	0.973
d_{32}	44.484	44.484	1
$\tilde{d}_{32}$	46.039	44.484	0.966

例 2：考虑下列两个二水平基石设计 $X_3, X_4 \in \mathcal{U}\left(4,2^6\right)$，其范围固定的二三混水平扩充设计分别记为 $\overline{d_{32}}$，$\widehat{d_{32}}$，

$$X_3=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1\\1&0&0&1&1&0\\0&1&1&1&1&1\end{bmatrix}\quad X_4=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1\\1&0&0&1&1&1\\0&1&1&1&1&0\end{bmatrix}.$$

由(3)式可知，二水平基石设计 X_3 和 X_4 的字长型模式分别为 $(0,1.5,4,1.5,0,0.5)$ 和 $\left(0,2,3,1.5,1,0\right)$，由(10)式可知，$X_3$ 和 X_4 的扩充设计 $\overline{d_{32}}$ 和 $\widehat{d_{32}}$ 的广义字长模式分别为 $\left(0,7.33,17.78,125.22,64,301.78,142.22,239,49.78,64.22,10.67,1,0\right)$ 以及 $\left(0,9.56,17.78,119.89,72.89,293.78,126.22,262.111,55.11,52.22,12.44,1,0\right)$。由此可知，在 GMA 准则下，设计 X_3 比 X_4 优良，其水平扩充设计 $\overline{d_{32}}$ 比 $\widehat{d_{32}}$ 优良。

5. 总结

本文主要从均匀性的角度讨论了范围固定二三混水平扩充设计在可卷型 L_2-偏差下的均匀性，理论结果表明当二水平基石设计是均匀设计时，其对应的二三混水平扩充设计也是均匀设计，并建立基石设计与扩充设计的广义字长型之间的解析联系。接下来要考虑的是其他范围固定非对称水平扩充设计的构造及性质研究。

参考文献

[1] Gupta, V.K., Singh, P., Kole, B. and Parsad, R. (2010) Addition of Runs to a Two-Level Supersaturated Design. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 2531-2535. https://doi.org/10.1016/j.jspi.2010.03.026

[2] Gupta, V.K., Chatterjee, K., Das, A. and Kole, B. (2012) Addition of Runs to an S-Level Supersaturated Design. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142**, 2402-2408. https://doi.org/10.1016/j.jspi.2012.02.020

[3] Qin, H., Chatterjee, K. and Ghosh, S. (2015) Extended Mixed-Level Supersaturated Designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **157**, 100-107. https://doi.org/10.1016/j.jspi.2014.08.004

[4] 郑春玮. 添加新因子情形下超饱和设计的扩充方法[D]: [硕士学位论文]. 天津: 南开大学, 2021.

[5] Qin, H., Gou, T. and Chatterjee, K. (2016) A New Class of Two-Level Optimal Extended Designs. *Journal of the Korean Statistical Society*, **45**, 168-175. https://doi.org/10.1016/j.jkss.2015.09.003

[6] Gou, T., Qin, H. and Chatterjee, K. (2017) A New Extension Strategy on Three-Level Factorials under Wrap-Around L_2-Discrepancy. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **46**, 9063-9074. https://doi.org/10.1080/03610926.2016.1202284

[7] Gou, T., Qin, H. and Chatterjee, K. (2018) Efficient Asymmetrical Extended Designs under Wrap-Around L2-Discrepancy. *Journal of Systems Science and Complexity*, **31**, 1391-1404. https://doi.org/10.1007/s11424-018-7131-y

[8] Yang, F., Zhou, Y. and Zhang, A. (2019) Mixed-Level Column Augmented Uniform Designs. *Journal of Complexity*,

53, 23-39. https://doi.org/10.1016/j.jco.2018.10.006

[9] Liu, J., Ou, Z., Hu, L. and Wang, K. (2018) Lee Discrepancy on Mixed Two- and Three-Level Uniform Augmented Designs. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **48**, 2409-2424. https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1465087

[10] 雷轶菊，欧祖军，赵国喜. 混水平列扩充设计的混偏差的下界[J]. 数学物理学报, 2021, 41(3): 882-891.

[11] Wang, H., He, D., Tan, N., Wang, W., Wang, J., Dong, H., *et al*. (2010) Note: An Anvil-Preformed Gasket System to Extend the Pressure Range for Large Volume Cubic Presses. *Review of Scientific Instruments*, **81**, Article ID: 166102. https://doi.org/10.1063/1.3488606

[12] Dilipkumar, M., Rajasimman, M. and Rajamohan, N. (2011) Application of Statistical Design for the Production of Inulinase by *Streptomyces* sp. Using Pressmud. *Frontiers of Chemical Science and Engineering*, **5**, 463-470. https://doi.org/10.1007/s11705-011-1112-1

[13] Gao, Y., Yi, S. and Zhou, Y. (2021) Level-Augmented Uniform Designs. *Statistical Papers*, **63**, 441-460. https://doi.org/10.1007/s00362-021-01247-y

[14] Gao, Y., Yi, S. and Zhou, Y. (2022) Maximin l1-Distance Range-Fixed Level-Augmented Designs. *Statistics & Probability Letters*, **186**, Article ID: 109470. https://doi.org/10.1016/j.spl.2022.109470

[15] Chatterjee, K., Li, Z. and Qin, H. (2012) Some New Lower Bounds to Centered and Wrap-Round-Discrepancies. *Statistics & Probability Letters*, **82**, 1367-1373. https://doi.org/10.1016/j.spl.2012.03.011