Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(11), 4723-4727**
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311453

对称锥上法锥的图的切锥与法锥描述

刘书宇，张　杰，张灵宇

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年9月29日；录用日期：2024年10月23日；发布日期：2024年10月31日

摘　要

本文研究了对称锥上法锥的图的切锥和法锥的数学描述。首先，基于对称锥的特性，引入了切锥和法锥的定义。然后，通过构建适当的数学模型，推导出切锥和法锥的精确公式，从而对对称锥规划问题的求解具有重要意义。

关键词

对称锥，切锥，法锥

Description of Tangent Cone and Normal Cone of the Graph of Normal Cone on Symmetric Cone

Shuyu Liu, Jie Zhang, Lingyu Zhang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Sep. 29th, 2024; accepted: Oct. 23rd, 2024; published: Oct. 31st, 2024

Abstract

In this paper, we study the mathematical description of tangent cone and normal cone of the graph of normal cone on symmetric cone. First, the definition of tangent cone and normal cone is introduced based on the properties of the symmetry cone. Then, by constructing appropriate mathematical models, we derive exact formulas for the tangent and normal cones, which have important implications for the solution of the symmetric cone programming problems.

Keywords

Symmetric Cone, Tangent Cone, Normal Cone

文章引用: 刘书宇, 张杰, 张灵宇. 对称锥上法锥的图的切锥与法锥描述[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 4723-4727.
DOI: 10.12677/aam.2024.1311453

1. 引言

近年来，随着优化理论的发展，对称锥在数学规划中的应用受到越来越多的关注。对称锥包括二阶锥(Second-Order Cones, SOC)和半定锥(Semidefinite Cones, SDP)等，因其在凸优化问题中的广泛应用而备受研究者青睐。对称锥的几何结构，特别是切锥和法锥的描述，对于深入理解和解决复杂优化问题具有重要意义。

切锥和法锥作为凸分析中的基本概念，分别用于描述锥体在给定点处的局部线性近似和正交性。切锥和法锥的精确数学描述不仅在理论研究中具有重要地位，也在实际应用中，如二阶锥规划(SOCP)和半定规划(SDP)问题的求解中起到关键作用。例如，在金融工程中的投资组合优化[1]、控制理论中的鲁棒控制与滤波中的应用[2]，乃至信号处理中的最优信号设计[3]等问题中，切锥和法锥的几何结构都提供了重要的理论支持基础。

本文旨在对对称锥上法锥的图的切锥与法锥的几何结构进行系统研究。首先，我们回顾了切锥和法锥的定义。然后，通过构建适当的数学模型，推导出法锥的图的切锥和法锥的精确公式。

通过本文的研究，我们希望能够为对称锥上的几何结构提供更深入的理解。

2. 预备知识

2.1. 切锥和法锥

对于一个集值映射 $S:\mathcal{X}\rightrightarrows\mathcal{Y}$ 其中 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 都是有限维的希尔伯特空间，其外极限为

$$\limsup_{x\to\bar{x}} S(x):=\left\{y\in\mathcal{Y}\,\middle|\,\exists x^k\to\bar{x},\exists y^k\to y,y^k\in S\left(x^k\right)\right\},$$

它的内极限为

$$\liminf_{x\to\bar{x}} S(x):=\left\{y\in\mathcal{Y}\,\middle|\,\forall x^k\to\bar{x},\exists N_1\in\mathcal{N}_\infty,\exists y^k\xrightarrow{N_1}y,y^k\in S\left(x^k\right),k\in N_1\right\},$$

这里

$$\mathcal{N}_\infty:=\left\{N\subseteq\mathcal{N}\,\middle|\,\mathcal{N}\backslash N\text{是有限的}\right\}\left(\mathcal{N}\text{是自然数}\right).$$

基于集值映射的内极限和外极限的定义，我们可以来定义法锥和切锥。见[4] [5]。

定义 2.1 设 $\Omega\in\mathcal{Z}$ 是在 $\bar{x}\in\Omega$ 处局部闭的集合，其中 $\mathcal{Z}$ 是一个有限维的希尔伯特空间。

定义 Ω 在 $\bar{x}$ 处的正则法锥为

$$\hat{\mathcal{N}}_\Omega(\bar{x}):=\left\{v\in\mathcal{Z}^*\,\middle|\,\limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}}\frac{\langle v,x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|}\le 0\right\},$$

Ω 在 $\bar{x}$ 处的极限法锥为

$$\mathcal{N}_\Omega(\bar{x}):=\limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}}\hat{\mathcal{N}}_\Omega(x).$$

定义 Ω 在 $\bar{x}$ 处的切锥为

$$T_\Omega(\bar{x}) := \limsup_{t\searrow 0}\frac{\Omega-\bar{x}}{t},$$

内切锥为

$$T_\Omega^i(\bar{x}) := \liminf_{t\searrow 0}\frac{\Omega-\bar{x}}{t}.$$

2.2. 谱分解定理

设 $\mathcal{V}$ 是秩为 r 的欧几里得若当代数，则对于 $z\in\mathcal{V}$，存在若当坐标系 $\{q_1,q_2,\cdots,q_r\}$ 和实数 $\lambda_1(z)\ge\lambda_2(z)\ge\cdots\ge\lambda_r(z)$，使得

$$z=\lambda_1(z)q_1+\lambda_2(z)q_2+\cdots\lambda_r(z)q_r.$$

其中 $\lambda_i(z)(i\in\{1,2,\cdots,r\})$ 是 z 的特征值。我们称上面的式子为 z 的谱分解。见[6]。

定义 2.2 我们设 $z=\sum_{i=1}^r\lambda_i(z)$，其中 $\lambda_1(z)\ge\lambda_2(z)\ge\cdots\ge\lambda_r(z)$，定义

$$\alpha:=\{i:\lambda_i(z)>0\},\beta:=\{i:\lambda_i(z)=0\},\gamma:=\{i:\lambda_i(z)<0\},$$

那么 Π_K 在 z 处沿着方向 d 的方向导数为

$$\Pi_K'(z,d)=P_{\alpha\alpha}d+P_{\alpha\beta}d+U_{\alpha\gamma}\odot P_{\alpha\gamma}d+\Pi_{K^{|\beta|}}(P_{\beta\beta}d).$$

其中 $U_{\alpha\gamma}\odot P_{\alpha\gamma}:=\sum\limits_{i\in\alpha,j\in\gamma}U_{ij}P_{ij}$，$K$ 为一对称锥。见[7]。

3. 上图切锥的描述

接下来我们来描述 $\mathrm{gph}N_K$ 的内切锥和切锥，该证明同 Wu 在[8]中定理 3.1 类似。

定理 3.1 对于任意的 $(X,Y)\in\mathrm{gph}N_K$，$\mathrm{gph}N_K$ 的内切锥和切锥是相等的，且有

$$T_{\mathrm{gph}N_K}^i(X,Y)=T_{\mathrm{gph}N_K}(X,Y)=\left\{(H_1,H_2)\in K\times K^\circ \,\middle|\, \Pi_K'(X+Y;H_1+H_2)=H_1\right\}.$$

这里 K° 是 K 的极锥。

证明： 必要性证明。

根据切锥的定义，

$$T_K(x)=\left\{h\,\middle|\,\exists t_k\searrow 0,\exists h_k\to h,满足 x+t_kh^k\in K,\forall k\right\},$$

故对于 $\forall(H_1,H_2)\in T_{\mathrm{gph}N_K}(X,Y)$，$\exists\left(H_1^k,H_2^k\right)\to(H_1,H_2)$，并且 $t_k\searrow 0$，使得

$$\left(X+t_kH_1^k,Y+t_kH_2^k\right)\in\mathrm{gph}N_K.$$

这样

$$\Pi_K'\left(X+Y+t_k\left(H_1^k+H_2^k\right)\right)=X+t_kH_1^k.$$

因为

$$\Pi_K'(X+Y)=X,$$

我们得到

$$\frac{1}{t_k}\left(\Pi_K'\left(X+Y+t_k\left(H_1^k+H_2^k\right)\right)-\Pi_K'(X+Y)\right)=H_1^k.$$

因为 Π_K 是方向可微的，因此当 $k\to\infty$ 时，$\Pi_K'(X+Y;H_1+H_2)=H_1$。

充分性证明。

对于 $\forall(H_1,H_2)$ 满足

$$\Pi_K'(X+Y;H_1+H_2)=H_1.$$

并且 $\forall t_k\downarrow 0$，我们需要找到一个序列 $\{(X^k,Y^k)\}\subset \mathrm{gph}N_K$，使得

$$(X^k,Y^k)\to(X,Y),\frac{(X^k,Y^k)-(X,Y)}{t_k}\to(H_1,H_2).$$

事实上，对于 $\forall k$，我们定义

$$(X^k,Y^k):=\left(\Pi_K'(X+Y+t_k(H_1+H_2)),\Pi_{K^\circ}'(X+Y+t_k(H_1+H_2))\right)\in \mathrm{gph}N_K.$$

因为 Π_K 和 Π_{K° 是全局利普西茨连续，显然当 $k\to\infty$ 时，$(X^k,Y^k)\to(X,Y)$。对于 $\forall k$，

$$X^k-X=\Pi_K'(X+Y+t_k(H_1+H_2))-\Pi_K'(X+Y),$$

$$Y^k-Y=\Pi_{K^\circ}'(X+Y+t_k(H_1+H_2))-\Pi_{K^\circ}'(X+Y).$$

根据 Π_K 和 Π_{K° 的方向可微性，从而得到

$$\frac{(X^k,Y^k)-(X,Y)}{t_k}\to\left(\Pi_K'(X+Y;H_1+H_2),\Pi_{K^\circ}'(X+Y;H_1+H_2)\right)=(H_1,H_2).$$

证毕。

推论 1 对于 $\forall(X,Y)\in \mathrm{gph}N_K$，有

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{gph}N_K}(X,Y)=\Big\{(H_1,H_2)\in K\times K^\circ\,\Big|\,&P_{\alpha\alpha}H_2=0,P_{\alpha\beta}H_2=0,P_{\beta\gamma}H_1=0,P_{\gamma\gamma}H_1=0,\\&U_{\alpha\gamma}\odot P_{\alpha\gamma}(H_1+H_2)=P_{\alpha\gamma}H_1,\Pi_{K^{|\beta|}}(P_{\beta\beta}(H_1+H_2))=P_{\beta\beta}H_1\Big\}.\end{aligned}$$

证明：由定理 1 知

$$T_{\mathrm{gph}N_K}(X,Y)=\left\{(H_1,H_2)\in K\times K^\circ\,\middle|\,\Pi_K'(X+Y;H_1+H_2)=H_1\right\},$$

又

$$\Pi_K'(z,d)=P_{\alpha\alpha}d+P_{\alpha\beta}d+U_{\alpha\gamma}\odot P_{\alpha\gamma}d+\Pi_{K^{|\beta|}}(P_{\beta\beta}d),$$

则有

$$\begin{aligned}&P_{\alpha\alpha}(H_1+H_2)+P_{\alpha\beta}(H_1+H_2)+U_{\alpha\gamma}\odot P_{\alpha\gamma}(H_1+H_2)+\Pi_{K^{|\beta|}}(P_{\beta\beta}(H_1+H_2))=H_1\\&=P_{\alpha\alpha}H_1+P_{\alpha\beta}H_1+P_{\alpha\gamma}H_1+P_{\beta\beta}H_1+P_{\beta\gamma}H_1+P_{\gamma\gamma}H_1,\end{aligned}$$

因此得到

$$P_{\alpha\alpha}H_2+P_{\alpha\beta}H_2+U_{\alpha\gamma}\odot P_{\alpha\gamma}(H_1+H_2)+\Pi_{K^{|\beta|}}(P_{\beta\beta}(H_1+H_2))=P_{\alpha\gamma}H_1+P_{\beta\beta}H_1+P_{\beta\gamma}H_1+P_{\gamma\gamma}H_1,$$

故

$$\begin{cases}P_{\alpha\alpha}H_2=0,P_{\alpha\beta}H_2=0,\\P_{\beta\gamma}H_1=0,P_{\gamma\gamma}H_1=0,\\U_{\alpha\gamma}\odot P_{\alpha\gamma}(H_1+H_2)=P_{\alpha\gamma}H_1,\\\Pi_{K^{|\beta|}}(P_{\beta\beta}(H_1+H_2))=P_{\beta\beta}H_1.\end{cases}$$

所以证明成立。

推论 2 对于$\forall(X,Y)\in \mathrm{gph}N_K$，有

$$\hat{N}_{\mathrm{gph}N_K}(X,Y)=\Big\{(H_1,H_2)\in K\times K^{\circ}\Big|P_{\alpha\alpha}H_1=0,P_{\alpha\beta}H_1=0,P_{\beta\gamma}H_2=0,P_{\gamma\gamma}H_2=0,$$

$$U_{\alpha\gamma}\odot P_{\alpha\gamma}(H_1+H_2)=P_{\alpha\gamma}H_2,\Pi_{K^{|\beta|}}\big(P_{\beta\beta}(H_1+H_2)\big)=P_{\beta\beta}H_2\Big\}.$$

证明：因为$T_{\mathrm{gph}N_K}(X,Y)$和$\hat{N}_{\mathrm{gph}N_K}(X,Y)$互为极锥，所以

$$\hat{N}_{\mathrm{gph}N_K}(X,Y)=\Big\{(H_1,H_2)\in K\times K^{\circ}\Big|\Pi_K'(X+Y;H_1+H_2)=H_2\Big\},$$

因此同推论 1，我们就很容易得到

$$\begin{cases}P_{\alpha\alpha}H_1=0,P_{\alpha\beta}H_1=0,\\ P_{\beta\gamma}H_2=0,P_{\gamma\gamma}H_2=0,\\ U_{\alpha\gamma}\odot P_{\alpha\gamma}(H_1+H_2)=P_{\alpha\gamma}H_2,\\ \Pi_{K^{|\beta|}}\big(P_{\beta\beta}(H_1+H_2)\big)=P_{\beta\beta}H_2.\end{cases}$$

证毕。

4. 结论

1) 文章基于对称锥的特性，引入了切锥和法锥的定义，并构建了适当的数学模型。这种结合理论定义和数学模型的方法，为对称锥规划问题的求解提供了新的视角。

2) 通过数学模型，文章推导出了切锥和法锥的精确公式。这些公式的推导不仅在理论上具有重要意义，而且在实际应用中，如二阶锥规划(SOCP)和半定规划(SDP)问题的求解中，具有关键作用。

3) 文章对对称锥上法锥的图的切锥与法锥的几何结构进行了系统研究，这有助于深入理解对称锥的几何特性，为解决复杂优化问题提供了理论支持。

参考文献

[1] Goldfarb, D. and Iyengar, G. (2003) Robust Portfolio Selection Problems. *Mathematics of Operations Research*, **28**, 1-38. https://doi.org/10.1287/moor.28.1.1.14260

[2] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994) Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9781611970777

[3] Vandenberghe, L. and Boyd, S. (1996) Semidefinite Programming. *SIAM Review*, **38**, 49-95. https://doi.org/10.1137/1038003

[4] Mordukhovich, B.S. (2006) Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory. Springer.

[5] Rockafellar, R.T. and Wets, R.J.B. (1998) Variational Analysis. Springer.

[6] Faraut, J. and Korányi, A. (1994) Analysis on Symmetric Cones. Oxford University Press.

[7] Kong, L., Tunçel, L. and Xiu, N. (2010) Equivalent Conditions for Jacobian Nonsingularity in Linear Symmetric Cone Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **148**, 364-389. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9758-2

[8] Wu, J., Zhang, L. and Zhang, Y. (2013) Mathematical Programs with Semidefinite Cone Complementarity Constraints: Constraint Qualifications and Optimality Conditions. *Set-Valued and Variational Analysis*, **22**, 155-187. https://doi.org/10.1007/s11228-013-0242-7