

具有重试速率控制策略的M/G/1重试排队的尾渐近性

刘琦

南京航空航天大学数学学院, 江苏 南京

收稿日期: 2024年10月19日; 录用日期: 2024年11月13日; 发布日期: 2024年11月21日

摘要

本文研究了一种具有重试速率控制策略的M/G/1重试排队系统, 在该重试策略下, 单个顾客的重试速率与重试轨道中的顾客数目成反比。虽然已有文献研究了该排队系统的轨道队长的平稳分布的概率生成函数, 但其结果是隐式的, 难以直接得到轨道队长的概率分布, 所以本文在此基础上, 研究轨道队长的平稳分布的尾渐近性。在服务时间的平衡分布属于次指数分布族的情形下, 我们基于轨道队长的条件概率生成函数, 使用穷举随机分解方法得到轨道队长的平稳分布的尾渐近性, 结果表明, 轨道队长的平稳分布具有次指数的尾部。此外, 在服务时间的平稳分布具有正规变化的尾部这一特殊情况下, 我们证明了轨道队长的平稳分布具有正规变化的尾部。最后, 我们通过数值例子验证推导结果的正确性。本文的研究结果刻画了轨道队长的衰减效果, 弥补了现有研究的不足, 为现实情况中的重试排队系统提供参考。

关键词

重试速率控制策略, 次指数分布, 穷举随机分解, 重试轨道队长, 尾渐近性

Tail Asymptotics for the M/G/1 Retrieval Queue with Retrieval Rate Control Policy

Qi Liu

College of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

Received: Oct. 19th, 2024; accepted: Nov. 13th, 2024; published: Nov. 21st, 2024

Abstract

In this paper, we study an M/G/1 retrieval queue with retrieval rate control policy, where the retrieval rate is inversely proportional to the number of customers in the orbit. Although there have been studies

on the probability generation function of the stationary distribution of the orbital length, the expressions are implicit and it is difficult to obtain the corresponding probability distribution. Therefore, we study the tail asymptotics for the stationary distribution of the orbital length. Assuming that the equilibrium distribution of the service time is subexponential, we aim to characterize the tail asymptotics of the orbit queue length. Based on the conditional probability generating functions, we adopt an exhaustive version of the stochastic decomposition method and prove that the corresponding distributions have subexponential tails. As a special case, we consider the service time has a distribution with regularly varying tail, and show that the corresponding distributions also have regularly varying tails, while they are heavier than that of the service time. Our results depict the decay effect of orbit length, which supplements existing research and provides reference for retrial queuing systems in reality.

Keywords

Retrial Rate Control Policy, Subexponential, Exhaustive Stochastic Decomposition, Retrial Orbit Queue Length, Tail Asymptotics

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

由于重试排队系统在呼叫中心、电话网络、计算机以及其他系统中的广泛应用，重试排队系统得到了深入研究。当顾客到达排队系统时，如果服务台处于忙碌的状态，顾客会进入重试轨道，等待一段时间后再次请求服务。大多数关于重试排队的研究集中于经典的或恒定的重试速率[1]-[5]，而重试速率控制策略允许每个重试的顾客在随机时间后独立申请服务，且随着越来越多的顾客进入轨道，单个顾客的重试速率会逐渐降低[6]。

重试速率控制策略以其在时隙 ALOHA (Additive Links On-line Hawaii Area)中表现出的稳定性而受到广泛认可[7]。对于使用该重试策略的 M/G/1 重试排队模型，文献[6]和[8]通过补充变量法推导出了轨道队长的概率生成函数。此外，Choi 等人[9]研究了具有冲突和重试速率控制策略的排队系统，基于马尔可夫再生过程理论，他们推导出了队长的概率生成函数。在文献[10]中，作者探讨了具有止步和重试速率控制策略的多服务台反馈重试排队系统，并利用矩阵几何方法计算了平均轨道队长。Han 等人[11]研究了一种带有重试速率控制策略的 MMPP, M/G/1 重试排队模型，使用补充变量法得到两个队长的联合概率生成函数。在上述研究中，概率生成函数呈隐式形式。尽管概率生成函数和概率分布之间存在一一对应关系，但并未提供关于分布的详细信息。基于上述原因，本文利用概率生成函数的隐式表达式准确描述对应分布的尾部渐近性质。

尾渐近分析越来越受重视，现已成为排队理论中的一个重要研究领域。尾渐近分析是一种刻画函数衰减特征的方法，如果性能指标没有显式解析解，可以使用渐近分析刻画性能指标的衰减效果。尾渐近分析通常包括重尾渐近性和轻尾渐近性，感兴趣的读者可以查阅文献[3]和[12]-[15]了解重尾渐近性的研究内容，查阅文献[16]-[18]了解轻尾渐近性的相关信息。

在本文中，我们重新审视了文献[6]中提出的模型，假设服务时间服从一般分布，且服务时间的平衡分布属于次指数分布族。在服务台状态为空闲或忙碌的条件下，本文的分析从文献[6]推导的轨道队长的概率生成函数的隐式表达式开始。我们采用文献[12]中提出的穷举随机分解方法，将条件队长分解为多个

独立随机变量的和，且每个随机变量都有对应的概率解释。我们利用分解得到的随机变量的渐近性，分析条件轨道队长的尾渐近性。

本文的结构如下：在第二节中，我们介绍模型并做一些准备工作；第三节和第四节分别分析了服务台空闲和忙碌情况下轨道队长的条件分布的尾渐近性；第五节考察了一种特殊情况，即服务时间的尾分布是正规变化的，并附上数值实验；最后，我们在第六节中进行了总结。

2. 模型描述与准备工作

我们考虑一种具有重试速率控制策略的 M/G/1 重试排队系统。顾客按照参数为 λ 的泊松过程到达系统，如果服务台处于空闲状态，顾客会立即获得服务；如果服务台忙碌，顾客会进入重试轨道，随机等待一段时间后再次请求服务。各个顾客的服务时间是独立同分布的，具有共同的累积分布函数 F_β 与均值 β_1 ，那么其拉普拉斯-斯蒂尔杰斯变换(LST)可以表示为

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_\beta(t).$$

对于分布函数 F ，记其尾分布为 $\bar{F} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - F$ ，定义 $F_\beta(t)$ 的平衡分布为

$$F_\beta^{(e)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1^{-1} \int_0^t \bar{F}_\beta(u) du,$$

$F_\beta^{(e)}(t)$ 的 LST 为

$$\beta^{(e)}(s) = \frac{1 - \beta(s)}{\beta_1 s}.$$

当轨道中有 n 个顾客时，相邻两次重试之间的时间间隔服从参数为 α/n 的指数分布，其中 α 是正的常数，这种策略被称为重试速率控制策略。令 N 表示轨道中的顾客数目， C 表示服务台的状态：当服务台空闲时， $C=0$ ；当服务台忙碌时， $C=1$ 。对于 $i=0,1$ ，令 R_i 表示与条件随机变量 $N|(C=i)$ 同分布的随机变量，即

$$R_i \stackrel{d}{=} (N|C=i),$$

符号 $\stackrel{d}{=}$ 表示概率分布相同。对于函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ ， $f(t) \sim g(t)$ 表示当 $t \rightarrow \infty$ 时， $f(t)/g(t) \rightarrow 1$ 。

定义 1 对于 $(0, \infty)$ 上的分布函数 F ，如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}^{*2}/\bar{F} = 2$ ，其中 F^{*2} 表示 F 的二重卷积，那么 F 属于次指数分布族[19]。

本文基于以下假设分析轨道队长的尾渐近性。

假设 1 服务时间的平衡分布 $F_\beta^{(e)}(t)$ 属于次指数分布族。

下面的两个引理阐述了次指数分布的性质，为本文的后续分析奠定了基础。

引理 1 ([20]: pp. 580-581) 随机变量 N 的概率分布为 $P\{N=k\} = (1-\sigma)\sigma^{k-1}$ ， $0 < \sigma < 1$ ， $k \geq 1$ ； $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ 为一系列独立同分布的非负随机变量，具有共同的次指数分布 F 。令 $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ ，那么 $P\{S_n > t\} \sim \bar{F}(t)/(1-\sigma)$ ， $t \rightarrow \infty$ 。

引理 2 ([19]: p. 48) G_1 和 G_2 为概率分布函数，假设 G 属于次指数分布族，随着 $t \rightarrow \infty$ ，如果 $\bar{G}_i(t)/\bar{G}(t) \rightarrow c_i$ ，那么 $\overline{G_1^* G_2}(t)/\bar{G}(t) \rightarrow c_1 + c_2$ ，其中 $G_1^* G_2$ 表示 G_1 和 G_2 的卷积， $c_i \geq 0$ ， $i=1,2$ 。

文献[6]中的定理 2.1 表明，当且仅当 $\rho = \lambda\beta_1 \leq \alpha/(\lambda + \alpha)$ 时本文所研究的排队系统是稳态的。此外，轨道队长的联合概率生成函数为

$$E[z^N : C=0] = (\alpha - (\lambda + \alpha)\rho) \cdot \frac{z - \beta(\lambda - \lambda z)}{\lambda z(1 - \beta(\lambda - \lambda z)) + \alpha(z - \beta(\lambda - \lambda z))},$$

$$E[z^N : C=1] = (\alpha - (\lambda + \alpha)\rho) \frac{\beta(\lambda - \lambda z) - 1}{\lambda z(1 - \beta(\lambda - \lambda z)) + \alpha(z - \beta(\lambda - \lambda z))}.$$

结合 $P(C=0)=1-\rho$ 与 $P(C=1)=\rho$ ，可以得到 R_0 和 R_1 的生成函数

$$R_0(z) \triangleq E[z^{R_0}] = E[z^N | C=0] = \frac{\alpha - (\lambda + \alpha)\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{z - \beta(\lambda - \lambda z)}{\lambda z(1 - \beta(\lambda - \lambda z)) + \alpha(z - \beta(\lambda - \lambda z))}, \quad (1)$$

$$R_1(z) \triangleq E[z^{R_1}] = E[z^N | C=1] = \frac{\alpha - (\lambda + \alpha)\rho}{\rho} \cdot \frac{\beta(\lambda - \lambda z) - 1}{\lambda z(1 - \beta(\lambda - \lambda z)) + \alpha(z - \beta(\lambda - \lambda z))}. \quad (2)$$

对于(1)中最右侧等号右边的第二项，将其分子分母同除以 $[z - \beta(\lambda - \lambda z)]/\alpha$ ，然后使用泰勒公式改写 $R_0(z)$ ，得到

$$R_0(z) = \left[1 - \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} \right]^n [H_{\beta}(z)]^n, \quad (3)$$

其中，

$$H_{\beta}(z) = \frac{1-\rho}{\rho} \frac{z(1-\beta(\lambda-\lambda z))}{\beta(\lambda-\lambda z)-z}.$$

此外，可以将 $H_{\beta}(z)$ 分解为

$$H_{\beta}(z) = M_a(z)M_b(z)M_c(z),$$

其中，

$$M_a(z) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1-\beta(\lambda-\lambda z)}{1-z} = \beta^{(e)}(\lambda-\lambda z),$$

$$M_b(z) = (1-\rho) \cdot \frac{1-z}{\beta(\lambda-\lambda z)-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n [\beta^{(e)}(\lambda-\lambda z)]^n,$$

$$M_c(z) = z.$$

令

$$D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^{n-1} [\beta^{(e)}(z)]^n,$$

那么

$$H_{\beta}(z) = D(\lambda-\lambda z)M_c(z), \quad (4)$$

注意，令随机变量

$$T = \sum_{j=1}^J T_{\beta,j}^{(e)}, \quad (5)$$

那么 $D(z)$ 可以看作是随机变量 T 的概率分布函数的 LST。其中， $T_{\beta,j}^{(e)}$ ($j \geq 1$) 是独立同分布的随机变量，具有共同的分布函数 $F_{\beta}^{(e)}(t)$ 。 J 是与 $T_{\beta,j}^{(e)}$ 独立的随机变量，且 $P\{J=j\} = (1-\rho)\rho^{j-1}$ ($j \geq 1$)。

此外，通过比较(1)和(2)，可以类似地处理 $R_1(z)$ ，得到

$$R_1(z) = R_0(z) \cdot M_a(z) \cdot M_b(z) = R_0(z) \cdot D(\lambda - \lambda z). \quad (6)$$

3. 轨道队长的渐近分析

本节的目标是分析 R_0 和 R_1 的尾渐近性, 为此, 我们采取以下三个步骤。(1) 证明 $R_0(z)$ 是多个概率生成函数的乘积, 这意味着 R_0 是多个独立随机变量的和, 并给出这些随机变量的概率解释; (2) 利用分解得到的随机变量的渐近性, 推导 R_0 的尾渐近性; (3) 利用 R_0 和 R_1 的关系, 得到 R_1 的尾渐近性。

3.1. $R_0(z)$ 的穷举随机分解

对于(5)中的随机变量 T , 令 $N_\lambda(T)$ 表示 $(0, T]$ 时间内的泊松到达(参数为 λ) 的数目。根据(3)和(4), 对 R_0 进行随机分解, 得到下面的命题。

命题 1 (i) $D(\lambda - \lambda z)$, $M_c(z)$ 和 $H_\beta(z)$ 是概率生成函数。如果随机变量 H_β 的概率生成函数为 $H_\beta(z)$, 相互独立的随机变量 D 和 M_c 分别具有概率生成函数 $D(\lambda - \lambda z)$ 和 $M_c(z)$, 那么 H_β 可以分解为

$$H_\beta \stackrel{d}{=} D + M_c, \quad (7)$$

其中,

$$D = N_\lambda(T), \quad M_c \stackrel{d}{=} 1. \quad (8)$$

(ii) R_0 可以随机分解为

$$R_0 \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0, & 1 - \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)}, \\ \sum_{i=1}^{J'} H_\beta^{(i)}, & \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)}, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\{H_\beta^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ 是一系列独立同分布的随机变量, 它们具有相同的概率生成函数 $H_\beta(z)$; J' 独立于 $H_\beta^{(i)} (i \geq 1)$, 并且对于 $j \geq 1$,

$$P\{J' = j\} = \left[1 - \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)}\right] \left[\frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)}\right]^{j-1}.$$

证明 (i) 由(5)知, $D(z)$ 是随机变量 T 的 LST, 假设 T 的概率生成函数为 $F_T(t)$, 根据泰勒公式和重期望公式, 有

$$\begin{aligned} D(\lambda - \lambda z) &= \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda z)t} dF_T(t) \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty z^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dF_T(t) \\ &= E\left[z^{N_\lambda(T)}\right], \end{aligned}$$

所以 $D(\lambda - \lambda z)$ 是 $D \stackrel{d}{=} N_\lambda(T)$ 的概率生成函数。因为 $M_c(z)$ 是 $M_c \stackrel{d}{=} 1$ 的概率生成函数, 所以由(4)知 $H_\beta(z)$ 也是概率生成函数, 且 $H_\beta \stackrel{d}{=} D + M_c$ 。

(ii) 使用重期望公式改写(3), 得到

$$\begin{aligned}
 R_0(z) &= \left[1 - \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} \right] + \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} \right] \left[\frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} \right]^{n-1} [H_\beta(z)]^n \\
 &= \left[1 - \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} \right] + \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} E \left[z^{\sum_{i=1}^J H_\beta^{(i)}} \right],
 \end{aligned}$$

即得到了(9)中的随机分解。

3.2. R_0 的尾渐近性

因为命题 1 表明 R_0 可以被随机分解为(9)，所以 R_0 的平稳分布的渐近性取决于 H_β 的平稳分布的渐近性，而根据(7)， H_β 的渐近性又依赖于 D 的渐近性。此外， D 和 $N_\lambda(T)$ 具有相同的分布，所以有必要刻画 $N_\lambda(T)$ 的平稳分布的渐近性，而这又与 T 的分布相关。(5)为本节的渐近性分析提供了基础，因为它揭示了 T 的分布与平衡分布 $F_\beta^{(e)}(t)$ 之间的关系。

在进行分析之前，我们先介绍以下引理。

引理 3 ([21]): 定理 3.1 令 $N_\lambda(t)$ 表示参数为 λ 的泊松过程， τ 为概率分布函数为 H 的正的随机变量， τ 与 $N_\lambda(t)$ 相互独立。如果 $t \rightarrow \infty$ 时，尾分布 $\bar{H}(t)$ 厚于 $e^{-\sqrt{t}}$ ，那么 $P(N_\lambda(\tau) > j) \sim P\{\tau > j/\lambda\}$ ， $j \rightarrow \infty$ 。由(5)和引理 1，得到

$$P\{T > t\} \sim \frac{1}{1-\rho} \bar{F}_\beta^{(e)}(t).$$

此外，随着 $t \rightarrow \infty$ ，任意次指数分布的尾分布都要厚于 $e^{-\sqrt{t}}$ ，利用引理 3 可得

$$P\{N_\lambda(T) > j\} \sim P\{T > j/\lambda\} \sim \frac{1}{1-\rho} \bar{F}_\beta^{(e)}(j/\lambda), \quad j \rightarrow \infty. \quad (10)$$

那么由(7)和(8)可得

$$P\{H_\beta > j\} = P\{N_\lambda(T) > j-1\} \sim \frac{1}{1-\rho} \bar{F}_\beta^{(e)}(j/\lambda), \quad j \rightarrow \infty.$$

因为独立同分布的随机变量序列 $\{H_\beta^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 和随机变量 H_β 服从相同的分布，所以再次利用引理 1，有

$$P\left\{ \sum_{i=1}^J H_\beta^{(i)} > j \right\} \sim P\{H_\beta > j\} / \left(1 - \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} \right) \sim \frac{\alpha}{\alpha(1-\rho) - \lambda\rho} \bar{F}_\beta^{(e)}(j/\lambda), \quad j \rightarrow \infty.$$

再根据(9)可得

$$P\{R_0 > j\} \sim \frac{\lambda\rho}{\alpha(1-\rho)} P\left\{ \sum_{i=1}^J H_\beta^{(i)} > j \right\}, \quad j \rightarrow \infty,$$

此时可以得到 R_0 的平稳分布的尾渐近性，如定理 1 所示。

定理 1

$$P\{R_0 > j\} \sim \frac{\lambda\rho}{(1-\rho)[\alpha(1-\rho) - \lambda\rho]} \bar{F}_\beta^{(e)}(j/\lambda), \quad j \rightarrow \infty. \quad (11)$$

3.3. R_1 的尾渐近性

下面我们分析 R_1 的平稳分布的尾渐近性。根据(6)呈现的 R_1 和 R_0 的关系，下述命题显然成立。

命题 2 R_1 可以随机分解为

$$R_1 \stackrel{d}{=} R_0 + D. \quad (12)$$

结合(8), (10), (11)和(12), 再由引理 2 可以得到下面的定理。

定理 2

$$P\{R_1 > j\} \sim P\{R_0 + N_\lambda(T) > j\} \sim \frac{\alpha}{\alpha(1-\rho) - \lambda\rho} \bar{F}_\beta^{(e)}(j/\lambda), \quad j \rightarrow \infty.$$

4. 特殊情况与数值实验

我们考虑一个特殊情况: 服务时间具有正规变化的尾部, 在此情况下分析轨道队长的尾渐近性。我们首先证明该服务时间的平衡分布也是次指数分布, 然后利用前面章节的结果, 得到轨道队长的尾渐近性。

定义 2 可测函数 $U: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 在 ∞ 处正规变化(具有指数 $\sigma \in (-\infty, \infty)$), 当且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} U(xt)/U(t) = x^\sigma (x > 0)$ 。当 $\sigma = 0$ 时, 称 U 在 ∞ 处缓慢变化[19]。

假设 2 $\bar{F}_\beta(t) \sim t^{-a}L(t)$, $t \rightarrow \infty$, 其中 $a > 1$, $L(t)$ 是在 ∞ 处缓慢变化的函数。

注 1. 假设 2 说明了 $\bar{F}_\beta(t)$ 在 ∞ 处正规变化(指数为 $-a (a > 1)$), 易知 $F_\beta(t)$ 属于次指数分布族, 详细内容可以参考文献[19]。

接下来, 我们利用 Karamatas 定理说明由假设 2 可推出 $F_\beta(t)$ 也属于次指数分布族。

引理 4 (Karamatas 定理[20])令 L 为在 ∞ 处缓慢变化的函数, 并且对于 $x_0 \geq 0$, L 在 $[x_0, \infty)$ 上局部有界。那么对于任意的 $\xi < -1$, 有

$$\int_x^\infty t^\xi L(t) dt \rightarrow -(\xi + 1)^{-1} x^{\xi+1} L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

由假设 2 知, 对于 $a > 1$, 有 $\bar{F}_\beta(t) \sim t^{-a}L(t)$, $t \rightarrow \infty$ 。在此基础上应用[22]中的引理 3.4, 得到

$$\int_t^\infty \bar{F}_\beta(u) du \sim \int_t^\infty u^{-a} L(u) du, \quad t \rightarrow \infty.$$

又因为利用引理 4, 可得

$$\int_t^\infty u^{-a} L(u) du \sim (a-1)^{-1} t^{-a+1} L(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

所以根据 $F_\beta^{(e)}(t)$ 的定义, 有

$$\bar{F}_\beta^{(e)}(t) \sim \frac{1}{(a-1)\beta_1} t^{-a+1} L(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

上式表明 $\bar{F}_\beta^{(e)}(t)$ 在 ∞ 处正规变化(指数为 $1-a (a > 1)$), 所以 $F_\beta^{(e)}(t)$ 属于次指数分布族。

使用定理 1 和定理 2 可以得到下面的推论。

推论 1

$$\begin{aligned} P\{R_0 > j\} &\sim \frac{\lambda^{a+1}}{(a-1)(1-\rho)[\alpha(1-\rho) - \lambda\rho]} j^{-a+1} L(j), \quad t \rightarrow \infty, \\ P\{R_1 > j\} &\sim \frac{\alpha\lambda^a}{(a-1)\rho[\alpha(1-\rho) - \lambda\rho]} j^{-a+1} L(j), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

接下来通过数值实验说明本文推导结果的正确性。假设服务时间 T_β 服从帕累托分布, 其尾分布在 ∞ 处正规变化。首先根据文献[23]中介绍的数值算法, 使用 $R_i (i=0,1)$ 的概率生成函数得到对应尾分布的数值反演值, 然后将数值反演结果和本文的渐近结果进行对比, 发现基本一致, 验证了本文的推导结果。

假设服务时间 T_β 服从以下的帕累托分布

$$F_\beta = 1 - \left(\frac{b}{t+b} \right)^a, \quad t \geq 0,$$

其中参数 $a \geq 1$, $b \geq 0$ 。平均服务时间 $\beta_1 = b/(a-1)$, 服务强度 $\rho = \lambda\beta_1 = \lambda b/(a-1)$, 以及 LST

$$\beta(s) = ab^a \int_0^\infty \left(\frac{1}{t+b} \right)^{a+1} e^{-st} dt$$

令 $a=3/2$, $b=1/5$, $\lambda=1$, $\alpha=3/4$, 它们满足系统的平稳性条件 $\rho = \lambda\beta_1 < \alpha/(\lambda+\alpha)$ 。由(13)得到

$$P(R_0 > j) \sim \frac{b^a \lambda^{a+1}}{(a-1)(1-\rho)[\alpha(1-\rho) - \lambda\rho]} (j+b)^{-a+1}, \quad j \rightarrow \infty,$$

$$P(R_1 > j) \sim \frac{\alpha b^a \lambda^a}{(a-1)\rho[\alpha(1-\rho) - \lambda\rho]} (j+b)^{-a+1}, \quad j \rightarrow \infty.$$

上述公式的右侧提供了 R_0 和 R_1 的平稳分布的衰减函数, 它们的图像如图 1 和图 2 所示。

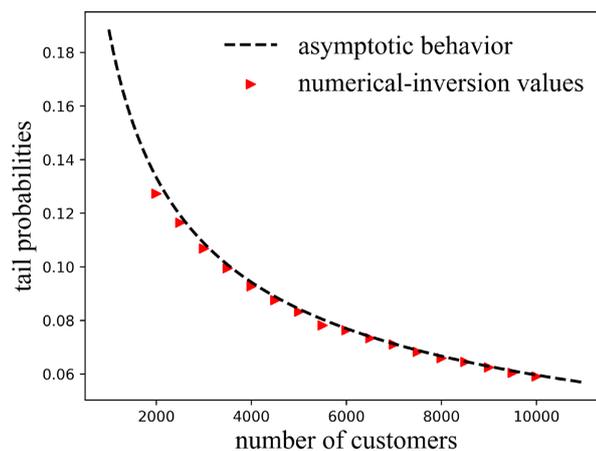


Figure 1. Tail probability for R_0

图 1. R_0 的尾渐近性

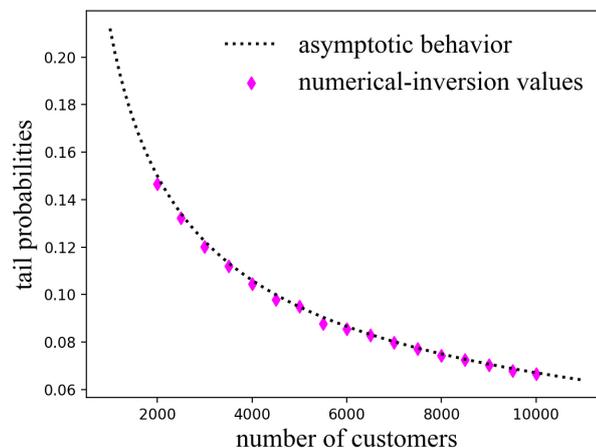


Figure 2. Tail probability for R_1

图 2. R_1 的尾渐近性

因为

$$R_i(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} P(N=j|C=i)z^j, \quad i=0,1.$$

所以 $R_i(i=0,1)$ 尾分布的概率生成函数为

$$G_i(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} P(N>j|C=i)z^j = \frac{1-R_i(z)}{1-z}, \quad i=0,1.$$

对于 $i=0,1$, 根据 $G_i(z)$ 的表达式, 并使用[23]中介绍的对概率生成函数进行数值反演的方法, 可以得到 $P(R_i > j)(i=0,1)$ 的近似值(具有预先确定的误差界)。因为渐近性质适用于较大的 j 值, 而数值反演算法不适用于过大的 j 值, 所以我们需要选择合适的 j 值来比较渐近结果和数值反演结果。选择 j 的取值范围为 2000 到 10,000, 计算出 $P(R_i > j)(i=0,1)$ 的近似值(具有 10^{-7} 的精度), 相应的散点图如图 1 和图 2 所示。从图中可以看出, 这两种不同的方法得到的尾分布的结果非常接近。

5. 结论

本文考虑了具有重试速率控制策略的 M/G/1 重试排队系统, 其服务时间的平衡分布是次指数分布。在服务台忙碌或空闲的条件下, 我们得到轨道队长的生成函数, 并使用穷举随机分解方法对条件轨道队长进行随机分解。通过刻画分解得到的成分的尾渐近性, 再结合次指数分布的性质, 我们证明了条件轨道队长的分布具有次指数的尾部。此外, 我们说明当服务时间具有正规变化的尾部时, 条件轨道队长也具有正规变化的尾部, 且条件轨道队长的尾部要厚于服务时间的尾部。最后通过数值实验验证了推导结果的正确性。

参考文献

- [1] Falin, G.I. and Templeton, J.G.C. (1997) Retrial Queues. Chapman and Hall.
- [2] Kim, J. and Kim, B. (2015) A Survey of Retrial Queueing Systems. *Annals of Operations Research*, **247**, 3-36. <https://doi.org/10.1007/s10479-015-2038-7>
- [3] Shang, W., Liu, L. and Li, Q. (2006) Tail Asymptotics for the Queue Length in an M/G/1 Retrial Queue. *Queueing Systems*, **52**, 193-198. <https://doi.org/10.1007/s11134-006-5223-1>
- [4] Devos, A., Walraevens, J., Phung-Duc, T. and Bruneel, H. (2020) Analysis of the Queue Lengths in a Priority Retrial Queue with Constant Retrial Policy. *Journal of Industrial & Management Optimization*, **16**, 2813-2842. <https://doi.org/10.3934/jimo.2019082>
- [5] Dimitriou, I. (2018) A Two-Class Queueing System with Constant Retrial Policy and General Class Dependent Service Times. *European Journal of Operational Research*, **270**, 1063-1073. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.03.002>
- [6] Choi, B.D., Rhee, K.H. and Park, K.K. (1993) The M/G/1 Retrial Queue with Retrial Rate Control Policy. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **7**, 29-46. <https://doi.org/10.1017/s0269964800002771>
- [7] Fayolle, G., Gelenbe, E. and Labetoulle, J. (1977) Stability and Optimal Control of the Packet Switching Broadcast Channel. *Journal of the ACM*, **24**, 375-386. <https://doi.org/10.1145/322017.322019>
- [8] Farahmand, K. (1990) Single Line Queue with Repeated Demands. *Queueing Systems*, **6**, 223-228. <https://doi.org/10.1007/bf02411475>
- [9] Choi, B.D., Shin, Y.W. and Ahn, W.C. (1992) Retrial Queues with Collision Arising from Unslotted CSMA/CD Protocol. *Queueing Systems*, **11**, 335-356. <https://doi.org/10.1007/bf01163860>
- [10] Kumar, B.K. and Raja, J. (2006) On Multiserver Feedback Retrial Queues with Balking and Control Retrial Rate. *Annals of Operations Research*, **141**, 211-232. <https://doi.org/10.1007/s10479-006-5300-1>
- [11] Han, D.H. and Lee, Y.W. (1996) MMPP, M/G/1 Retrial Queue with Two Classes of Customers. *Communications of the Korean Mathematical Society*, **11**, 481-493.
- [12] Liu, B. and Zhao, Y.Q. (2020) Tail Asymptotics for the $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ Retrial Queue with Non-Preemptive Priority. *Queueing Systems*, **96**, 169-199. <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09666-8>

-
- [13] Liu, B. and Zhao, Y.Q. (2022) Tail Asymptotics for a Retrial Queue with Bernoulli Schedule. *Mathematics*, **10**, Article No. 2799. <https://doi.org/10.3390/math10152799>
- [14] Liu, B., Min, J. and Zhao, Y.Q. (2023) Refined Tail Asymptotic Properties for the $M^X/G/1$ Retrial Queue. *Queueing Systems*, **104**, 65-105. <https://doi.org/10.1007/s11134-023-09874-y>
- [15] Yamamuro, K. (2011) The Queue Length in an $M/G/1$ Batch Arrival Retrial Queue. *Queueing Systems*, **70**, 187-205. <https://doi.org/10.1007/s11134-011-9268-4>
- [16] Kim, J., Kim, B. and Ko, S. (2007) Tail Asymptotics for the Queue Size Distribution in an $M/G/1$ Retrial Queue. *Journal of Applied Probability*, **44**, 1111-1118. <https://doi.org/10.1239/jap/1197908829>
- [17] Kim, J. (2015) Discrete-Time Buffer Systems with Session-Based Arrivals and Markovian Output Interruptions. *Journal of applied mathematics & informatics*, **33**, 185-191. <https://doi.org/10.14317/jami.2015.185>
- [18] Kim, B., Kim, J. and Kim, J. (2010) Tail Asymptotics for the Queue Size Distribution in the $MAP/G/1$ Retrial Queue. *Queueing Systems*, **66**, 79-94. <https://doi.org/10.1007/s11134-010-9179-9>
- [19] Foss, S., Korshunov, D. and Zachary, S. (2011) An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions. Springer.
- [20] Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer.
- [21] Foss, S. and Korshunov, D. (2000) Sampling at a Random Time with a Heavy-Tailed Distribution. *Markov Processes and Related Fields*, **6**, 543-568.
- [22] Abate, J. and Whitt, W. (1997) Asymptotics for $M/G/1$ Low-Priority Waiting-Time Tail Probabilities. *Queueing Systems*, **25**, 173-233. <https://doi.org/10.1023/a:1019104402024>
- [23] Abate, J. and Whitt, W. (1992) Numerical Inversion of Probability Generating Functions. *Operations Research Letters*, **12**, 245-251. [https://doi.org/10.1016/0167-6377\(92\)90050-d](https://doi.org/10.1016/0167-6377(92)90050-d)