Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(11), 4728-4741
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311454

一类边界条件中含谱参数的Dirac算子的谱性质

王文涛，高云兰*

内蒙古工业大学理学院，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2024年10月1日；录用日期：2024年10月25日；发布日期：2024年11月4日

摘 要

本文考虑了一类内部具有两个不连续点且边界条件依赖谱参数的Dirac算子的谱性质。首先通过引入适当的Hilbert空间并在其上定义新的自伴算子，使得所考虑问题的特征值与该算子的特征值一致。然后通过构造基本解得到了特征值的一些性质。最后给出了问题的Green函数和预解算子。

关键词

Dirac算子，特征值，Green函数，预解算子

Spectral Properties of a Class of Dirac Operators with Eigenparameter in the Boundary Conditions

Wentao Wang, Yunlan Gao*

College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia

Received: Oct. 1st, 2024; accepted: Oct. 25th, 2024; published: Nov. 4th, 2024

Abstract

In this paper, we consider the spectral properties of a class of Dirac operators with two internal discontinuities and spectral parameter-dependent boundary conditions. First, the eigenvalues of the problem under consideration are made to coincide with the eigenvalues of the operator by introducing a suitable Hilbert space and defining a new self-adjoint operator on it. Then some properties of the eigenvalues are obtained by constructing the basic solution. Finally, Green's function and the resolvent operator of the problem are given.

*通讯作者。

文章引用: 王文涛, 高云兰. 一类边界条件中含谱参数的 Dirac 算子的谱性质[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 4728-4741. DOI: 10.12677/aam.2024.1311454

Keywords

Dirac Operator, Eigenvalues, Green's Function, Resolvent Operator

1. 引言

Dirac 算子又称为 AKNS 算子，在描述量子力学中的能量和原子的内力问题中至关重要。Dirac 算子的谱性质是算子谱理论的重要组成部分，诸多学者对此进行了一系列研究，并取得了一些优秀研究成果[1]-[4]。近些年，越来越多的学者对内部具有不连续点的 Dirac 算子的谱性质进行了研究[5]-[11]。如：2013 年，Tharwat M. M.等人在文献[5]中研究了内部具有一个不连续点的 Dirac 系统，首先讨论了边值问题的特征值和特征函数的部分性质，然后得到了格林矩阵和扩张定理。2018 年，袁兆年在其硕士论文[6]中考虑了内部具有一个不连续点且两个边界条件均含谱参数的 Dirac 算子的谱问题，证明了算子的自伴性，讨论了其特征值和特征函数的性质，给出了格林函数和预解算子。

本文拟在上述研究的基础上，将[6]中的一个不连续点推广为两个不连续点，考虑一类内部具有两个不连续点且边界条件依赖谱参数的 Dirac 算子的谱性质，即考虑如下由(1)~(7)构成的 Dirac 系统

$$\tau y(x) := Jy'(x) + Q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in I, \tag{1}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$p(x)$, $q(x)$ 为定义在 $I = [0,\xi_1) \cup (\xi_1,\xi_2) \cup (\xi_2,\pi]$ 上的实值连续函数， λ 是谱参数，

满足边界条件

$$L_1 y := \alpha_1 y_1(0) - \alpha_2 y_2(0) - \lambda\left(\alpha_1' y_1(0) - \alpha_2' y_2(0)\right) = 0, \tag{2}$$

$$L_2 y := \beta_1 y_1(\pi) - \beta_2 y_2(\pi) + \lambda\left(\beta_1' y_1(\pi) - \beta_2' y_2(\pi)\right) = 0, \tag{3}$$

在间断点 ξ_1，ξ_2 处满足转移条件

$$L_3 y := \gamma_1 y_1(\xi_1 - 0) + \gamma_2 y_2(\xi_1 - 0) + \delta_1 y_1(\xi_1 + 0) + \delta_2 y_2(\xi_1 + 0) = 0, \tag{4}$$

$$L_4 y := \gamma_1' y_1(\xi_1 - 0) + \gamma_2' y_2(\xi_1 - 0) + \delta_1' y_1(\xi_1 + 0) + \delta_2' y_2(\xi_1 + 0) = 0, \tag{5}$$

$$L_5 y := \gamma_3 y_1(\xi_2 - 0) + \gamma_4 y_2(\xi_2 - 0) + \delta_3 y_1(\xi_2 + 0) + \delta_4 y_2(\xi_2 + 0) = 0, \tag{6}$$

$$L_6 y := \gamma_3' y_1(\xi_2 - 0) + \gamma_4' y_2(\xi_2 - 0) + \delta_3' y_1(\xi_2 + 0) + \delta_4' y_2(\xi_2 + 0) = 0, \tag{7}$$

其中 α_i，α_i'，β_i，β_i'，γ_j，γ_j'，δ_j，δ_j' $\left(i = 1,2,\ j = \overline{1,4}\right)$ 均为实数，且假设边界条件中的参数满足

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' \\ \alpha_2 & \alpha_2' \end{vmatrix} > 0,\ \rho_2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1' \\ \beta_2 & \beta_2' \end{vmatrix} > 0,$$

转移条件中的参数满足

$$d_1=\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_1'\\ \gamma_2 & \gamma_2'\end{vmatrix}>0,\ d_2=\begin{vmatrix}\delta_1 & \delta_1'\\ \delta_2 & \delta_2'\end{vmatrix}>0,\ d_3=\begin{vmatrix}\gamma_3 & \gamma_3'\\ \gamma_4 & \gamma_4'\end{vmatrix}>0,\ d_4=\begin{vmatrix}\delta_3 & \delta_3'\\ \delta_4 & \delta_4'\end{vmatrix}>0.$$

若对某个 $\lambda\in\mathbb{C}$，使得 $y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ 是方程(1)的非平凡解，且满足边界条件(2)，(3)和转移条件(4)~(7)，则称 λ 是问题(1)~(7)的一个特征值，相应的非平凡解 $y(x,\lambda)$ 称为对应于特征值 λ 的一个特征函数。

2. 算子公式

若

$$\mathcal{H}_1:=\left\{f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}: f_1(x), f_2(x)\in\mathcal{L}^2(I)\right\},$$

对于任意的 $f(x)=\left(f_1(x), f_2(x)\right)^{\mathrm{T}}$， $g(x)=\left(g_1(x), g_2(x)\right)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}_1$，在 $\mathcal{H}_1$ 内定义内积为

$$\left\langle f(x), g(x)\right\rangle_1=\int_0^{\xi_1} f^{\mathrm{T}}(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x+\frac{d_2}{d_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2} f^{\mathrm{T}}(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\int_{\xi_2}^{\pi} f^{\mathrm{T}}(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x,$$

易知 $\mathcal{H}_1$ 是完备的。

定义

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C},$$

对于任意的 $F=\left(f(x),\widetilde{f_1},\widetilde{f_2}\right)^{\mathrm{T}}$， $G=\left(g(x),\widetilde{g_1},\widetilde{g_2}\right)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}$，在 $\mathcal{H}$ 内定义内积为

$$\langle F,G\rangle=\left\langle f(x), g(x)\right\rangle_1+\frac{1}{\rho_1}\widetilde{f_1}\overline{\widetilde{g_1}}+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\frac{1}{\rho_2}\widetilde{f_2}\overline{\widetilde{g_2}},$$

可知 $\mathcal{H}$ 是一个完备的内积空间。

为了方便描述，我们引入以下符号

$$M_0(y)=\alpha_1y_1(0)-\alpha_2y_2(0),\ M_0'(y)=\alpha_1'y_1(0)-\alpha_2'y_2(0),$$
$$M_\pi(y)=\beta_1y_1(\pi)-\beta_2y_2(\pi),\ M_\pi'(y)=\beta_1'y_1(\pi)-\beta_2'y_2(\pi),$$

由边界条件可知： $M_0(y)=\lambda M_0'(y)$， $M_\pi(y)=-\lambda M_\pi'(y)$。

在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中定义算子 $\mathcal{T}$，其定义域为

$$\mathcal{D}(\mathcal{T})=\left\{F=\begin{pmatrix}f(x)\\ \widetilde{f_1}\\ \widetilde{f_2}\end{pmatrix}\in\mathcal{H}\ \middle|\ \begin{array}{c} f_1(x), f_2(x)\in\mathcal{AC}\left([0,\xi_1)\cup(\xi_1,\xi_2)\cup(\xi_2,\pi]\right),\\ f_1(\xi_1\pm0), f_2(\xi_1\pm0), f_1(\xi_2\pm0), f_2(\xi_2\pm0)\text{存在},\\ \text{并且满足}\ \tau f\in\mathcal{H}_1,\ L_3f=L_4f=L_5f=L_6f=0,\ \widetilde{f_1}=M_0'(f),\ \widetilde{f_2}=M_\pi'(f)\end{array}\right\},$$

并满足

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix}f\\ \widetilde{f_1}\\ \widetilde{f_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau f\\ M_0(f)\\ -M_\pi(f)\end{pmatrix}.$$

因此，我们所考虑的问题(1)~(7)就可改写为如下算子形式 $\mathcal{T}F=\lambda F$。

此时，问题(1)~(7)的特征值与算子 $\mathcal{T}$ 的特征值一致，且特征函数为算子 $\mathcal{T}$ 相应特征函数的第一个分量。

定理 2.1 算子 $\mathcal{T}$ 的定义域 $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，即 $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{T})}=\mathcal{H}$。

证明 设 $F=\left(f(x),\widetilde{f_1},\widetilde{f_2}\right)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}$ (其中 $f(x)=\left(f_1(x),f_2(x)\right)^{\mathrm{T}}$)且 $F\perp\mathcal{D}(\mathcal{T})$，则只需要证明 $F=(\mathbf{0},0,0)^{\mathrm{T}}$。

令 C_0^∞ 表示如下函数集合

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix},$$

其中 $\varphi_1(x)\subset C_0^\infty(I)$，$\varphi_2(x)\subset C_0^\infty(I)$。因为 $C_0^\infty(I)$ 在 $\mathcal{L}^2$ 中稠密，即 $\overline{C_0^\infty}=\mathcal{H}_1$，于是有 $C_0^\infty\oplus0\oplus0\subset\mathcal{D}(\mathcal{T})$，故对于任意的 $G=\left(g(x),\widetilde{g_1},\widetilde{g_2}\right)^{\mathrm{T}}\in C_0^\infty\oplus0\oplus0$ (其中 $g(x)=\left(g_1(x),g_2(x)\right)^{\mathrm{T}}$)，根据内积的定义有

$$\langle F,G\rangle=\int_0^{\xi_1}f^T(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x+\frac{d_2}{d_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}f^T(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\int_{\xi_2}^{\pi}f^T(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x+0+0=0,$$

又因为 $\overline{C_0^\infty}=\mathcal{H}_1$，所以 $f(x)=\mathbf{0}$，从而 $F=\left(\mathbf{0},\widetilde{f_1},\widetilde{f_2}\right)^{\mathrm{T}}$。因而对于任意的 $V=\left(v(x),\widetilde{v_1},\widetilde{v_2}\right)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{T})$，根据内积的定义有

$$\langle F,V\rangle=\frac{1}{\rho_1}\widetilde{f_1}\overline{\widetilde{v_1}}+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\frac{1}{\rho_2}\widetilde{f_2}\overline{\widetilde{v_2}}=0,$$

又因为 ρ_1，ρ_2，d_1，d_2，d_3，d_4 均大于零且 $\widetilde{v_1}$，$\widetilde{v_2}$ 是任取的，所以 $\widetilde{f_1}=0$，$\widetilde{f_2}=0$。因此 $F=(\mathbf{0},0,0)^{\mathrm{T}}$，故定理得证。

定理 2.2 算子 $\mathcal{T}$ 是自伴的。

证明 令 $F=\left(f(x),\widetilde{f_1},\widetilde{f_2}\right)^{\mathrm{T}}$，$G=\left(g(x),\widetilde{g_1},\widetilde{g_2}\right)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{T})$，定义 f 和 g 的朗斯基行列式为

$$W(f,g;x)=f_1(x)g_2(x)-f_2(x)g_1(x),$$

根据内积和算子 $\mathcal{T}$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{T}F,G\rangle-\langle F,\mathcal{T}G\rangle=&-\left[W(f,\overline{g};\xi_1-0)-W(f,\overline{g};0)\right]-\frac{d_2}{d_1}\left[W(f,\overline{g};\xi_2-0)-W(f,\overline{g};\xi_1+0)\right]\\&-\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\left[W(f,\overline{g};\pi)-W(f,\overline{g};\xi_2+0)\right]+\frac{1}{\rho_1}\left[M_0(f)M_0'(\overline{g})-M_0'(f)M_0(\overline{g})\right]\\&+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\frac{1}{\rho_2}\left[-M_\pi(f)M_\pi'(\overline{g})+M_\pi'(f)M_\pi(\overline{g})\right],\end{aligned}\tag{8}$$

由转移条件(4)~(7)，可得

$$W(f,\overline{g};\xi_1-0)=\frac{d_2}{d_1}W(f,\overline{g};\xi_1+0),\tag{9}$$

$$W(f,\overline{g};\xi_2-0)=\frac{d_4}{d_3}W(f,\overline{g};\xi_2+0),\tag{10}$$

并且容易得到

$$M_0(f)M_0'(\overline{g})-M_0'(f)M_0(\overline{g})=-\rho_1W(f,\overline{g};0),\tag{11}$$

$$-M_\pi(f)M_\pi'(\overline{g})+M_\pi'(f)M_\pi(\overline{g})=\rho_2W(f,\overline{g};\pi).\tag{12}$$

将(9)~(12)代入(8)即可得 $\langle\mathcal{T}F,G\rangle=\langle F,\mathcal{T}G\rangle$，故算子 $\mathcal{T}$ 是对称的。

下面只需证明：对于任意的 $F=\left(f(x),M_0'(f),M_\pi'(f)\right)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathcal{T})$，若 $\langle\mathcal{T}F,W\rangle=\langle F,U\rangle$ 成立，则 $W\in D(\mathcal{T})$ 且 $\mathcal{T}W=U$，其中 $W=\left(w(x),\widetilde{w_1},\widetilde{w_2}\right)^{\mathrm{T}}$，$U=\left(u(x),\widetilde{u_1},\widetilde{u_2}\right)^{\mathrm{T}}$，$w(x)=\left(w_1(x),w_2(x)\right)^{\mathrm{T}}$，

$u(x)=(u_1(x),u_2(x))^{\mathrm{T}}$。

要证如上结论成立，即要证如下七条成立：(i) $w_1(x),\ w_2(x)\in\mathcal{AC}([0,\xi_1)\cup(\xi_1,\xi_2)\cup(\xi_2,\pi])$，且 $\tau w\in\mathcal{H}_1$；(ii) $\widetilde{w_1}=\alpha_1'w_1(0)-\alpha_2'w_2(0)$；(iii) $\widetilde{w_2}=\beta_1'w_1(\pi)-\beta_2'w_2(\pi)$；(iv) $L_3w=L_4w=L_5w=L_6w=0$；(v) $u(x)=\tau w(x)$；(vi) $\widetilde{u_1}=\alpha_1w_1(0)-\alpha_2w_2(0)$；(vii) $\widetilde{u_2}=-(\beta_1w_1(\pi)-\beta_2w_2(\pi))$。

对于任意的 $F=(f(x),0,0)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{C}_0^{\infty}\oplus\{0\}\oplus\{0\}\subset\mathcal{D}(\mathcal{T})$，有 $\langle\mathcal{T}F,W\rangle=\langle F,U\rangle$，根据内积的定义，可得 $\langle\tau f(x),w(x)\rangle_1=\langle f(x),u(x)\rangle_1$，显然(i)成立。

因为 $\mathcal{T}$ 是对称算子，所以有 $\langle\tau f(x),w(x)\rangle_1=\langle f(x),\tau w(x)\rangle_1$，由(i)的证明过程又可知 $\langle\tau f(x),w(x)\rangle_1=\langle f(x),u(x)\rangle_1$，故 $\tau w(x)=u(x)$，即(v)成立。

通过(v)可知，对于任意的 $F\in\mathcal{D}(\mathcal{T})$，$\langle\mathcal{T}F,W\rangle=\langle F,U\rangle$ 可表示为

$$\begin{aligned}&\langle\tau f(x),w(x)\rangle_1-\langle f(x),\tau w(x)\rangle_1\\&=\frac{1}{\rho_1}\left[M_0'(f)\overline{\widetilde{u_1}}-M_0(f)\overline{\widetilde{w_1}}\right]+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\frac{1}{\rho_2}\left[M_\pi'(f)\overline{\widetilde{u_2}}+M_\pi(f)\overline{\widetilde{w_2}}\right],\end{aligned}\tag{13}$$

又由于

$$\begin{aligned}&\langle\tau f(x),w(x)\rangle_1-\langle f(x),\tau w(x)\rangle_1\\&=-\left[W(f,\overline{w};\xi_1-0)-W(f,\overline{w};0)\right]-\frac{d_2}{d_1}\left[W(f,\overline{w};\xi_2-0)-W(f,\overline{w};\xi_1+0)\right]\\&\quad-\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\left[W(f,\overline{w};\pi)-W(f,\overline{w};\xi_2+0)\right],\end{aligned}\tag{14}$$

故结合(13)和(14)可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho_1}\left[M_0'(f)\overline{\widetilde{u_1}}-M_0(f)\overline{\widetilde{w_1}}\right]+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\frac{1}{\rho_2}\left[M_\pi'(f)\overline{\widetilde{u_2}}+M_\pi(f)\overline{\widetilde{w_2}}\right]\\&=-\left[W(f,\overline{w};\xi_1-0)-W(f,\overline{w};0)\right]-\frac{d_2}{d_1}\left[W(f,\overline{w};\xi_2-0)-W(f,\overline{w};\xi_1+0)\right]\\&\quad-\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\left[W(f,\overline{w};\pi)-W(f,\overline{w};\xi_2+0)\right],\end{aligned}\tag{15}$$

再由 Naimark patching lemma 可得，存在 $F\in\mathcal{D}(\mathcal{T})$，使得

$$f_1(\pi)=f_2(\pi)=f_1(\xi_1\pm0)=f_2(\xi_1\pm0)=f_1(\xi_2\pm0)=f_2(\xi_2\pm0)=0,\ f_1(0)=\alpha_2',\ f_2(0)=\alpha_1',$$

此时

$$M_0'(f)=M_\pi'(f)=M_\pi(f)=0,\ M_0(f)=\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1',$$

$$W(f,\overline{w};\xi_1-0)=W(f,\overline{w};\xi_1+0)=W(f,\overline{w};\xi_2-0)=W(f,\overline{w};\xi_2+0)=W(f,\overline{w};\pi)=0,$$

将上述式子代入(15)，可得

$$-\frac{1}{\rho_1}(\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1')\overline{\widetilde{w_1}}=f_1(0)\overline{w}_2(0)-f_2(0)\overline{w}_1(0),$$

进一步有 $\widetilde{w_1}=\alpha_1'w_1(0)-\alpha_2'w_2(0)$，即(ii)得证。运用同样的方法，我们可以证明 $\widetilde{u_1}=\alpha_1w_1(0)-\alpha_2w_2(0)$ 成立，即(vi)得证。类似的，运用 Naimark patching lemma 可得(iii)，(iv)，(vii)成立。因此 $\mathcal{T}$ 是自伴算子。

由定理 2.2 易得如下两推论成立。

推论 2.1 问题(1)~(7)的特征值均是实的。

推论 2.2 问题(1)~(7)的对应于不同特征值 λ_1，λ_2 的特征函数 $y(x,\lambda_1)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_1) \\ y_2(x,\lambda_1) \end{pmatrix}$ 和 $z(x,\lambda_2)=\begin{pmatrix} z_1(x,\lambda_2) \\ z_2(x,\lambda_2) \end{pmatrix}$ 在如下意义下是正交的，即

$$\int_0^{\xi_1}\left[y_1(x,\lambda_1)\overline{z}_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)\overline{z}_2(x,\lambda_2)\right]\mathrm{d}x+\frac{d_2}{d_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[y_1(x,\lambda_1)\overline{z}_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)\overline{z}_2(x,\lambda_2)\right]\mathrm{d}x$$

$$+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\int_{\xi_2}^{\pi}\left[y_1(x,\lambda_1)\overline{z}_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)\overline{z}_2(x,\lambda_2)\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{\rho_1}\widetilde{y_1}\overline{\widetilde{z_1}}+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\frac{1}{\rho_2}\widetilde{y_2}\overline{\widetilde{z_2}}=0.$$

3. 基本解及特征值的性质

我们构造(1)的两个基本解

$$\Lambda(x,\lambda)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\phi_1(x,\lambda)\\ \psi_1(x,\lambda)\end{pmatrix}, & x\in[0,\xi_1),\\ \begin{pmatrix}\phi_2(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}, & x\in(\xi_1,\xi_2),\\ \begin{pmatrix}\phi_3(x,\lambda)\\ \psi_3(x,\lambda)\end{pmatrix}, & x\in(\xi_2,\pi].\end{cases}\quad \Gamma(x,\lambda)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\theta_1(x,\lambda)\\ \chi_1(x,\lambda)\end{pmatrix}, & x\in[0,\xi_1),\\ \begin{pmatrix}\theta_2(x,\lambda)\\ \chi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}, & x\in(\xi_1,\xi_2),\\ \begin{pmatrix}\theta_3(x,\lambda)\\ \chi_3(x,\lambda)\end{pmatrix}, & x\in(\xi_2,\pi].\end{cases}$$

其中 $\begin{pmatrix}\phi_1(x,\lambda)\\ \psi_1(x,\lambda)\end{pmatrix}$ 为(1)在 $[0,\xi_1)$ 上满足初始条件 $\begin{pmatrix}\phi_1(0,\lambda)\\ \psi_1(0,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_2-\lambda\alpha_2'\\ \alpha_1-\lambda\alpha_1'\end{pmatrix}$ 的解；$\begin{pmatrix}\phi_2(x,\lambda)\\ \psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ 为(1)在 (ξ_1,ξ_2) 上满足初始条件 $\begin{pmatrix}\phi_2(\xi_1+0,\lambda)\\ \psi_2(\xi_1+0,\lambda)\end{pmatrix}=BC\begin{pmatrix}\phi_1(\xi_1-0,\lambda)\\ \psi_1(\xi_1-0,\lambda)\end{pmatrix}$ 的解，这里 $B=\begin{pmatrix}\delta_1 & \delta_2\\ \delta_1' & \delta_2'\end{pmatrix}^{-1}$，$C=\begin{pmatrix}-\gamma_1 & -\gamma_2\\ -\gamma_1' & -\gamma_2'\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}\phi_3(x,\lambda)\\ \psi_3(x,\lambda)\end{pmatrix}$ 为(1)在 $(\xi_2,\pi]$ 上满足初始条件 $\begin{pmatrix}\phi_3(\xi_2+0,\lambda)\\ \psi_3(\xi_2+0,\lambda)\end{pmatrix}=DE\begin{pmatrix}\phi_2(\xi_2-0,\lambda)\\ \psi_2(\xi_2-0,\lambda)\end{pmatrix}$ 的解，这里 $D=\begin{pmatrix}\delta_3 & \delta_4\\ \delta_3' & \delta_4'\end{pmatrix}^{-1}$，$E=\begin{pmatrix}-\gamma_3 & -\gamma_4\\ -\gamma_3' & -\gamma_4'\end{pmatrix}$。

类似的，$\begin{pmatrix}\theta_3(x,\lambda)\\ \chi_3(x,\lambda)\end{pmatrix}$ 为(1)在 $(\xi_2,\pi]$ 上满足初始条件 $\begin{pmatrix}\theta_3(\pi,\lambda)\\ \chi_3(\pi,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_2+\lambda\beta_2'\\ \beta_1+\lambda\beta_1'\end{pmatrix}$ 的解；$\begin{pmatrix}\theta_2(x,\lambda)\\ \chi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ 为(1)在 (ξ_1,ξ_2) 上满足初始条件 $\begin{pmatrix}\theta_2(\xi_2-0,\lambda)\\ \chi_2(\xi_2-0,\lambda)\end{pmatrix}=E^{-1}D^{-1}\begin{pmatrix}\theta_3(\xi_2+0,\lambda)\\ \chi_3(\xi_2+0,\lambda)\end{pmatrix}$ 的解；$\begin{pmatrix}\theta_1(x,\lambda)\\ \chi_1(x,\lambda)\end{pmatrix}$ 为(1)在 $[0,\xi_1)$ 上满足初始条件 $\begin{pmatrix}\theta_1(\xi_1-0,\lambda)\\ \chi_1(\xi_1-0,\lambda)\end{pmatrix}=C^{-1}B^{-1}\begin{pmatrix}\theta_2(\xi_1+0,\lambda)\\ \chi_2(\xi_1+0,\lambda)\end{pmatrix}$ 的解。

下面考虑朗斯基行列式 $W_i(\lambda)=\phi_i\chi_i-\theta_i\psi_i$，$i=\overline{1,3}$。易知对于任意的 $x\in[0,\xi_1),(\xi_1,\xi_2),(\xi_2,\pi]$，$W_1(\lambda)$，$W_2(\lambda)$ 和 $W_3(\lambda)$ 均是关于 λ 的整函数。

定理 3.1 对于每一个 $\lambda\in\mathbb{C}$，等式

$$W_3(\lambda)=\frac{d_3}{d_4}W_2(\lambda)=\frac{d_1d_3}{d_2d_4}W_1(\lambda)$$

成立。

证明 根据 $W_i(\lambda)$ 的定义及转移条件可得结论成立。

下面，我们记

$$W(\lambda):=W_3(\lambda)=\frac{d_3}{d_4}W_2(\lambda)=\frac{d_1d_3}{d_2d_4}W_1(\lambda).$$

定理 3.2 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 是问题(1)~(7)的一个特征值，当且仅当 λ_0 是 $W(\lambda)$ 的零点，即 $W(\lambda_0)=0$ 。

证明(必要性) 设 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 是问题(1)~(7)的一个特征值，$y(x,\lambda_0)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda_0)\\ y_2(x,\lambda_0)\end{pmatrix}$ 是 λ_0 对应的特征函数。令

$$y(x,\lambda_0)=\begin{cases}r_1\begin{pmatrix}\phi_1(x,\lambda_0)\\ \psi_1(x,\lambda_0)\end{pmatrix}+r_2\begin{pmatrix}\theta_1(x,\lambda_0)\\ \chi_1(x,\lambda_0)\end{pmatrix}, & x\in[0,\xi_1),\\ r_3\begin{pmatrix}\phi_2(x,\lambda_0)\\ \psi_2(x,\lambda_0)\end{pmatrix}+r_4\begin{pmatrix}\theta_2(x,\lambda_0)\\ \chi_2(x,\lambda_0)\end{pmatrix}, & x\in(\xi_1,\xi_2),\\ r_5\begin{pmatrix}\phi_3(x,\lambda_0)\\ \psi_3(x,\lambda_0)\end{pmatrix}+r_6\begin{pmatrix}\theta_3(x,\lambda_0)\\ \chi_3(x,\lambda_0)\end{pmatrix}, & x\in(\xi_2,\pi],\end{cases}$$

则 $r_i\left(i=\overline{1,6}\right)$ 至少有一个不为零，下面用反证法证明 $W(\lambda_0)=0$ 。

假设 $W(\lambda_0)\neq 0$ ，即 $W_3(\lambda_0)=\frac{d_3}{d_4}W_2(\lambda_0)=\frac{d_1d_3}{d_2d_4}W_1(\lambda_0)\neq 0$ ，则由 $y(x,\lambda_0)$ 满足边界条件(2)，且 $\begin{pmatrix}\phi_1(0,\lambda_0)\\ \psi_1(0,\lambda_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_2-\lambda_0\alpha_2'\\ \alpha_1-\lambda_0\alpha_1'\end{pmatrix}$ 成立，可得

$$r_2\left[(\alpha_1-\lambda_0\alpha_1')\theta_1(0,\lambda_0)-(\alpha_2-\lambda_0\alpha_2')\chi_1(0,\lambda_0)\right]=0,$$

又因为 $W_1(\lambda_0)\neq 0$ ，所以 $r_2=0$ 。同理， $y(x,\lambda_0)$ 满足边界条件(3)，且 $\begin{pmatrix}\theta_3(\pi,\lambda_0)\\ \chi_3(\pi,\lambda_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_2+\lambda_0\beta_2'\\ \beta_1+\lambda_0\beta_1'\end{pmatrix}$ 成立，可得 $r_5=0$ 。

又因为 $y(x,\lambda_0)$ 满足转移条件(4)，(5)，故可得

$$\begin{pmatrix}r_1\phi_1(\xi_1-0,\lambda_0)\\ r_1\psi_1(\xi_1-0,\lambda_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\gamma_1 & -\gamma_2\\ -\gamma_1' & -\gamma_2'\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\delta_1 & \delta_2\\ \delta_1' & \delta_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_2(\xi_1+0,\lambda_0) & \theta_2(\xi_1+0,\lambda_0)\\ \psi_2(\xi_1+0,\lambda_0) & \chi_2(\xi_1+0,\lambda_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_3\\ r_4\end{pmatrix},$$

又

$$\begin{pmatrix}\phi_1(\xi_1-0,\lambda_0)\\ \psi_1(\xi_1-0,\lambda_0)\end{pmatrix}=C^{-1}B^{-1}\begin{pmatrix}\phi_2(\xi_1+0,\lambda_0)\\ \psi_2(\xi_1+0,\lambda_0)\end{pmatrix},$$

从而得

$$\begin{pmatrix}\phi_2(\xi_1+0,\lambda_0) & \theta_2(\xi_1+0,\lambda_0)\\ \psi_2(\xi_1+0,\lambda_0) & \chi_2(\xi_1+0,\lambda_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_3-r_1\\ r_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

又因为 $W_2(\lambda_0)\neq 0$ ，所以 $r_3-r_1=0$ ， $r_4=0$ 。

同理，因为 $y(x,\lambda_0)$ 满足转移条件(6)，(7)，类似的可得 $r_3=0,\ r_6=0$ 。

综上可得， $r_1=r_2=r_3=r_4=r_5=r_6=0$ ，这与 $r_i\left(i=\overline{1,6}\right)$ 至少有一个不为零矛盾，故 $W(\lambda_0)=0$ 。

(充分性) 令 $W(\lambda_0)=0$ ，又因为 d_1，d_2，d_3，d_4 都不等于 0，故可得 $W_i(\lambda_0)=0$ ，$i=\overline{1,3}$ ，所以存在 $k_i\neq 0$ ，使得 $\begin{pmatrix}\phi_i(x,\lambda_0)\\ \psi_i(x,\lambda_0)\end{pmatrix}=k_i\begin{pmatrix}\theta_i(x,\lambda_0)\\ \chi_i(x,\lambda_0)\end{pmatrix}$ ，其中 $i=\overline{1,3}$ 。从而可得，$\Lambda(x,\lambda_0)$ 满足边界条件(3)，$\Gamma(x,\lambda_0)$ 满足边界条

件(2)。又因为 $\Lambda(x,\lambda_0)$ 和 $\Gamma(x,\lambda_0)$ 都满足转移条件(4)~(7)，故 $\Lambda(x,\lambda_0)$ 和 $\Gamma(x,\lambda_0)$ 是特征值 λ_0 对应的特征函数。

定理 3.3 问题(1)~(7)的特征值是单重的。

证明 设 $y(x,\lambda)$ 是问题(1)~(7)的任一解，则有

$$\tau y(x,\lambda)=Jy'(x,\lambda)+Q(x)y(x,\lambda)=\lambda y(x,\lambda),$$

对上式两端关于 λ 求导，可得

$$\tau y_\lambda(x,\lambda)=Jy'_\lambda(x,\lambda)+Q(x)y_\lambda(x,\lambda)=y(x,\lambda)+\lambda y_\lambda(x,\lambda),$$

其中，$y_\lambda(x,\lambda)$ 是 $y(x,\lambda)$ 对 λ 求偏导。

由推论 2.1 可知，问题(1)~(7)的特征值均是实的，则对于任意的两个解 $y(x,\lambda)$ 和 $z(x,\lambda)$，有

$$\langle \tau y_\lambda,z\rangle_1-\langle y_\lambda,\tau z\rangle_1=\langle y+\lambda y_\lambda,z\rangle_1-\langle y_\lambda,\lambda z\rangle_1=\langle y,z\rangle_1. \tag{16}$$

通过分部积分，并进一步整理得

$$\langle \tau y_\lambda,z\rangle_1-\langle y_\lambda,\tau z\rangle_1=\alpha_1'\overline{\theta}_1(0,\lambda)-\alpha_2'\overline{\chi}_1(0,\lambda)+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\left[(\beta_2+\lambda\beta_2')\psi_{3\lambda}(\pi,\lambda)-(\beta_1+\lambda\beta_1')\phi_{3\lambda}(\pi,\lambda)\right]. \tag{17}$$

由 $W(\lambda)$ 的定义和(16)，(17)，可得

$$\begin{aligned}W'(\lambda)\big|_{x=\pi}&=\frac{\mathrm{d}W_3(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{x=\pi}=\frac{\mathrm{d}\left[\phi_3(\pi,\lambda)\chi_3(\pi,\lambda)-\theta_3(\pi,\lambda)\psi_3(\pi,\lambda)\right]}{\mathrm{d}\lambda}\\&=\frac{d_1d_3}{d_2d_4}\left[-\langle y,z\rangle_1+\alpha_1'\overline{\theta}_1(0,\lambda)-\alpha_2'\overline{\chi}_1(0,\lambda)\right]-\beta_2'\psi_3(\pi,\lambda)+\beta_1'\phi_3(\pi,\lambda).\end{aligned} \tag{18}$$

设 λ_0 是问题(1)~(7)的特征值，则有 $W(\lambda_0)=0$。因此存在非零常数 c_j，使得 $\begin{pmatrix}\theta_j(x,\lambda_0)\\ \chi_j(x,\lambda_0)\end{pmatrix}=c_j\begin{pmatrix}\phi_j(x,\lambda_0)\\ \psi_j(x,\lambda_0)\end{pmatrix}, j=\overline{1,3}$，由转移条件可得 $c_1=c_2=c_3\neq0$，且有 $\Gamma(x,\lambda_0)=c_1\Lambda(x,\lambda_0)$。

因为 $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \alpha_2', \beta_1, \beta_1', \beta_2, \beta_2'$ 都是实的，$d_1, d_2, d_3, d_4, \rho_1, \rho_2$ 均大于零，方程(18)变为

$$W'(\lambda_0)=-\frac{d_1d_3}{d_2d_4}\left\{\overline{c_1}\left(\int_0^{\xi_1}\left|y(x,\lambda_0)\right|^2\mathrm{d}x+\frac{d_2}{d_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|y(x,\lambda_0)\right|^2\mathrm{d}x+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\int_{\xi_2}^{\pi}\left|y(x,\lambda_0)\right|^2\mathrm{d}x\right)+c_1\rho_1+\frac{1}{c_1}\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\rho_2\right\}\neq0,$$

因此，问题(1)~(7)的特征值 λ_0 是单重的。

4. 格林函数和预解算子

这部分我们将考虑问题(1)~(7)的 Green 函数和预解算子。

设 λ 不是 $\mathcal{T}$ 的特征值。显然算子方程

$$(\mathcal{T}-\lambda\mathcal{I})Y=F,\ F=\left(f(x),\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2\right)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H},\ f(x)=\left(f_1(x),f_2(x)\right)^{\mathrm{T}},$$

等价于如下 Dirac 系统

$$Jy'(x)=-Q(x)y(x)+\lambda y(x)+f(x),\ x\in I, \tag{19}$$

和边界条件

$$\alpha_1y_1(0)-\alpha_2y_2(0)-\lambda\left(\alpha_1'y_1(0)-\alpha_2'y_2(0)\right)=\widetilde{f}_1, \tag{20}$$

$$\beta_1 y_1(\pi)-\beta_2 y_2(\pi)+\lambda\left(\beta_1' y_1(\pi)-\beta_2' y_2(\pi)\right)=-\widetilde{f_2}, \tag{21}$$

以及转移条件(4)~(7)构成的问题。下面我们运用常数变易法来进行求解。

引理 4.1 [6]若 $\Phi(x)$ 为线性齐次方程组

$$Y'=A(x)Y$$

的一个基本解矩阵，则线性非齐次方程组

$$Y'=A(x)Y+F(x)$$

的通解为

$$Y(x)=\Phi(x)C+\Phi(x)\int_n^x \Phi^{-1}(t)F(t)\mathrm{d}t, \tag{22}$$

这里 $C\in\mathbb{R}^n$ 为任意的常变量， $A(x)$ 和 $F(x)$ 是定义在含 n 的某一区间上的连续函数。

上述(19)等价于如下方程组

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q(x) & -p(x)-\lambda \\ -p(x)+\lambda & -q(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix}.$$

由于 λ 不是 $\mathcal{T}$ 的特征值，故 $\Lambda(x,\lambda)$ 和 $\Gamma(x,\lambda)$ 在 $x\in[0,\xi_1)\cup(\xi_1,\xi_2)\cup(\xi_2,\pi]$ 上构成的朗斯基行列式 $W(\lambda)\neq 0$，所以构成了(1)的一个基本解矩阵。当 $x\in[0,\xi_1)$ 时，对应的基本解矩阵为 $\begin{pmatrix} \phi_1(x,\lambda) & \theta_1(x,\lambda) \\ \psi_1(x,\lambda) & \chi_1(x,\lambda) \end{pmatrix}$，其逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \dfrac{\chi_1(x,\lambda)}{W_1(\lambda)} & -\dfrac{\theta_1(x,\lambda)}{W_1(\lambda)} \\ -\dfrac{\psi_1(x,\lambda)}{W_1(\lambda)} & \dfrac{\phi_1(x,\lambda)}{W_1(\lambda)} \end{pmatrix}$，在(22)中取 $n=0$，此时(19)的解为

$$\begin{aligned} y(x,\lambda)=&\begin{pmatrix} c_1\phi_1(x,\lambda)+c_2\theta_1(x,\lambda) \\ c_1\psi_1(x,\lambda)+c_2\chi_1(x,\lambda) \end{pmatrix}+\frac{1}{W_1(\lambda)} \\ &\times\begin{pmatrix} \int_0^x\left\{\left[\theta_1(x,\lambda)\phi_1(t,\lambda)-\phi_1(x,\lambda)\theta_1(t,\lambda)\right]f_1(t)+\left[\theta_1(x,\lambda)\psi_1(t,\lambda)-\phi_1(x,\lambda)\chi_1(t,\lambda)\right]f_2(t)\right\}\mathrm{d}t \\ \int_0^x\left\{\left[\chi_1(x,\lambda)\phi_1(t,\lambda)-\psi_1(x,\lambda)\theta_1(t,\lambda)\right]f_1(t)+\left[\chi_1(x,\lambda)\psi_1(t,\lambda)-\psi_1(x,\lambda)\chi_1(t,\lambda)\right]f_2(t)\right\}\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{23}$$

将上式代入 $x=0$ 点的边界条件(20)，得 $c_2=-\dfrac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}$。

当 $x\in(\xi_1,\xi_2)$ 时，在(22)中取 $n=\xi_1$，此时(19)的解为

$$\begin{aligned} y(x,\lambda)=&\begin{pmatrix} c_3\phi_2(x,\lambda)+c_4\theta_2(x,\lambda) \\ c_3\psi_2(x,\lambda)+c_4\chi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}+\frac{1}{W_2(\lambda)} \\ &\times\begin{pmatrix} \int_{\xi_1}^x\left\{\left[\theta_2(x,\lambda)\phi_2(t,\lambda)-\phi_2(x,\lambda)\theta_2(t,\lambda)\right]f_1(t)+\left[\theta_2(x,\lambda)\psi_2(t,\lambda)-\phi_2(x,\lambda)\chi_2(t,\lambda)\right]f_2(t)\right\}\mathrm{d}t \\ \int_{\xi_1}^x\left\{\left[\chi_2(x,\lambda)\phi_2(t,\lambda)-\psi_2(x,\lambda)\theta_2(t,\lambda)\right]f_1(t)+\left[\chi_2(x,\lambda)\psi_2(t,\lambda)-\psi_2(x,\lambda)\chi_2(t,\lambda)\right]f_2(t)\right\}\mathrm{d}t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{24}$$

当 $x\in(\xi_2,\pi]$ 时，在(22)中取 $n=\pi$，此时(19)的解为

$$y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} c_5\phi_3(x,\lambda)+c_6\theta_3(x,\lambda) \\ c_5\psi_3(x,\lambda)+c_6\chi_3(x,\lambda) \end{pmatrix}-\frac{1}{W_3(\lambda)} \times\begin{pmatrix} \int_x^{\pi}\{[\theta_3(x,\lambda)\phi_3(t,\lambda)-\phi_3(x,\lambda)\theta_3(t,\lambda)]f_1(t)+[\theta_3(x,\lambda)\psi_3(t,\lambda)-\phi_3(x,\lambda)\chi_3(t,\lambda)]f_2(t)\}\mathrm{d}t \\ \int_x^{\pi}\{[\chi_3(x,\lambda)\phi_3(t,\lambda)-\psi_3(x,\lambda)\theta_3(t,\lambda)]f_1(t)+[\chi_3(x,\lambda)\psi_3(t,\lambda)-\psi_3(x,\lambda)\chi_3(t,\lambda)]f_2(t)\}\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{25}$$

将上式代入 $x=\pi$ 点的边界条件(21)，得 $c_5=-\frac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}$。

接下来考虑转移条件(4)~(7)。将 $c_2=-\frac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}$ 和 $c_5=-\frac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}$ 分别代入(23)和(25)。由转移条件(4)，(5)可知 $y(\xi_1+0,\lambda)=BCy(\xi_1-0,\lambda)$，进一步有

$$\begin{pmatrix} c_3\phi_2(\xi_1+0,\lambda)+c_4\theta_2(\xi_1+0,\lambda) \\ c_3\psi_2(\xi_1+0,\lambda)+c_4\chi_2(\xi_1+0,\lambda) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1\phi_2(\xi_1+0,\lambda)-\frac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}\theta_2(\xi_1+0,\lambda) \\ c_1\psi_2(\xi_1+0,\lambda)-\frac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}\chi_2(\xi_1+0,\lambda) \end{pmatrix} +\frac{1}{W_1(\lambda)}\begin{pmatrix} \int_0^{\xi_1}[\theta_2(\xi_1+0,\lambda)\phi_1(t,\lambda)-\phi_2(\xi_1+0,\lambda)\theta_1(t,\lambda)]f_1(t)\mathrm{d}t \\ \int_0^{\xi_1}[\chi_2(\xi_1+0,\lambda)\phi_1(t,\lambda)-\psi_2(\xi_1+0,\lambda)\theta_1(t,\lambda)]f_1(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} +\frac{1}{W_1(\lambda)}\begin{pmatrix} \int_0^{\xi_1}[\theta_2(\xi_1+0,\lambda)\psi_1(t,\lambda)-\phi_2(\xi_1+0,\lambda)\chi_1(t,\lambda)]f_2(t)\mathrm{d}t \\ \int_0^{\xi_1}[\chi_2(\xi_1+0,\lambda)\psi_1(t,\lambda)-\psi_2(\xi_1+0,\lambda)\chi_1(t,\lambda)]f_2(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} \tag{26}$$

由转移条件(6)，(7)可知 $y(\xi_2+0,\lambda)=DEy(\xi_2-0,\lambda)$，进一步有

$$\begin{pmatrix} -\frac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}\phi_3(\xi_2+0,\lambda)+c_6\theta_3(\xi_2+0,\lambda) \\ -\frac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}\psi_3(\xi_2+0,\lambda)+c_6\chi_3(\xi_2+0,\lambda) \end{pmatrix} -\frac{1}{W_3(\lambda)}\begin{pmatrix} \int_{\xi_2}^{\pi}[\theta_3(\xi_2+0,\lambda)\phi_3(t,\lambda)-\phi_3(\xi_2+0,\lambda)\theta_3(t,\lambda)]f_1(t)\mathrm{d}t \\ \int_{\xi_2}^{\pi}[\chi_3(\xi_2+0,\lambda)\phi_3(t,\lambda)-\psi_3(\xi_2+0,\lambda)\theta_3(t,\lambda)]f_1(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} -\frac{1}{W_3(\lambda)}\begin{pmatrix} \int_{\xi_2}^{\pi}[\theta_3(\xi_2+0,\lambda)\psi_3(t,\lambda)-\phi_3(\xi_2+0,\lambda)\chi_3(t,\lambda)]f_2(t)\mathrm{d}t \\ \int_{\xi_2}^{\pi}[\chi_3(\xi_2+0,\lambda)\psi_3(t,\lambda)-\psi_3(\xi_2+0,\lambda)\chi_3(t,\lambda)]f_2(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} =\begin{pmatrix} c_3\phi_3(\xi_2+0,\lambda)+c_4\theta_3(\xi_2+0,\lambda) \\ c_3\psi_3(\xi_2+0,\lambda)+c_4\chi_3(\xi_2+0,\lambda) \end{pmatrix}+\frac{1}{W_2(\lambda)}\begin{pmatrix} \int_{\xi_1}^{\xi_2}[\theta_3(\xi_2+0,\lambda)\phi_2(t,\lambda)-\phi_3(\xi_2+0,\lambda)\theta_2(t,\lambda)]f_1(t)\mathrm{d}t \\ \int_{\xi_1}^{\xi_2}[\chi_3(\xi_2+0,\lambda)\phi_2(t,\lambda)-\psi_3(\xi_2+0,\lambda)\theta_2(t,\lambda)]f_1(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} +\frac{1}{W_2(\lambda)}\begin{pmatrix} \int_{\xi_1}^{\xi_2}[\theta_3(\xi_2+0,\lambda)\psi_2(t,\lambda)-\phi_3(\xi_2+0,\lambda)\chi_2(t,\lambda)]f_2(t)\mathrm{d}t \\ \int_{\xi_1}^{\xi_2}[\chi_3(\xi_2+0,\lambda)\psi_2(t,\lambda)-\psi_3(\xi_2+0,\lambda)\chi_2(t,\lambda)]f_2(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{27}$$

求解(26)和(27)，可得 c_1，c_3，c_4，c_6。

将上述求得的 c_1，c_2，c_3，c_4，c_5，c_6 代入解的表达式，我们即可得到(19)满足边界条件(20)，(21)以及转移条件(4)~(7)的解 $y(x,\lambda)$，将其写成分量 $y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ 的形式，如下所示

$$y_1(x,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{\theta_1(x,\lambda)}{W_1(\lambda)}\int_0^x\left[\phi_1(t,\lambda)f_1(t)+\psi_1(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\phi_1(x,\lambda)}{W_1(\lambda)}\int_x^{\xi_1}\left[\theta_1(t,\lambda)f_1(t)+\chi_1(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ +\dfrac{\phi_1(x,\lambda)}{W_2(\lambda)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\theta_2(t,\lambda)f_1(t)+\chi_2(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\phi_1(x,\lambda)}{W_3(\lambda)}\int_{\xi_2}^{\pi}\left[\theta_3(t,\lambda)f_1(t)+\chi_3(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ -\dfrac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}\theta_1(x,\lambda)-\dfrac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}\phi_1(x,\lambda), \qquad x\in[0,\xi_1); \\ \dfrac{\theta_2(x,\lambda)}{W_1(\lambda)}\int_0^{\xi_1}\left[\phi_1(t,\lambda)f_1(t)+\psi_1(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\theta_2(x,\lambda)}{W_2(\lambda)}\int_{\xi_1}^{x}\left[\phi_2(t,\lambda)f_1(t)+\psi_2(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ +\dfrac{\phi_2(x,\lambda)}{W_2(\lambda)}\int_x^{\xi_2}\left[\theta_2(t,\lambda)f_1(t)+\chi_2(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\phi_2(x,\lambda)}{W_3(\lambda)}\int_{\xi_2}^{\pi}\left[\theta_3(t,\lambda)f_1(t)+\chi_3(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ -\dfrac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}\theta_2(x,\lambda)-\dfrac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}\phi_2(x,\lambda), \qquad x\in(\xi_1,\xi_2); \\ \dfrac{\theta_3(x,\lambda)}{W_1(\lambda)}\int_0^{\xi_1}\left[\phi_1(t,\lambda)f_1(t)+\psi_1(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\theta_3(x,\lambda)}{W_2(\lambda)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\phi_2(t,\lambda)f_1(t)+\psi_2(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ +\dfrac{\theta_3(x,\lambda)}{W_3(\lambda)}\int_{\xi_2}^{x}\left[\phi_3(t,\lambda)f_1(t)+\psi_3(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\phi_3(x,\lambda)}{W_3(\lambda)}\int_x^{\pi}\left[\theta_3(t,\lambda)f_1(t)+\chi_3(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ -\dfrac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}\theta_3(x,\lambda)-\dfrac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}\phi_3(x,\lambda), \qquad x\in(\xi_2,\pi]. \end{cases}$$

$$y_2(x,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{\chi_1(x,\lambda)}{W_1(\lambda)}\int_0^x\left[\phi_1(t,\lambda)f_1(t)+\psi_1(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\psi_1(x,\lambda)}{W_1(\lambda)}\int_x^{\xi_1}\left[\theta_1(t,\lambda)f_1(t)+\chi_1(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ +\dfrac{\psi_1(x,\lambda)}{W_2(\lambda)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\theta_2(t,\lambda)f_1(t)+\chi_2(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\psi_1(x,\lambda)}{W_3(\lambda)}\int_{\xi_2}^{\pi}\left[\theta_3(t,\lambda)f_1(t)+\chi_3(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ -\dfrac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}\chi_1(x,\lambda)-\dfrac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}\psi_1(x,\lambda), \qquad x\in[0,\xi_1); \\ \dfrac{\chi_2(x,\lambda)}{W_1(\lambda)}\int_0^{\xi_1}\left[\phi_1(t,\lambda)f_1(t)+\psi_1(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\chi_2(x,\lambda)}{W_2(\lambda)}\int_{\xi_1}^{x}\left[\phi_2(t,\lambda)f_1(t)+\psi_2(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ +\dfrac{\psi_2(x,\lambda)}{W_2(\lambda)}\int_x^{\xi_2}\left[\theta_2(t,\lambda)f_1(t)+\chi_2(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\psi_2(x,\lambda)}{W_3(\lambda)}\int_{\xi_2}^{\pi}\left[\theta_3(t,\lambda)f_1(t)+\chi_3(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ -\dfrac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}\chi_2(x,\lambda)-\dfrac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}\psi_2(x,\lambda), \qquad x\in(\xi_1,\xi_2); \\ \dfrac{\chi_3(x,\lambda)}{W_1(\lambda)}\int_0^{\xi_1}\left[\phi_1(t,\lambda)f_1(t)+\psi_1(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\chi_3(x,\lambda)}{W_2(\lambda)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\phi_2(t,\lambda)f_1(t)+\psi_2(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ +\dfrac{\chi_3(x,\lambda)}{W_3(\lambda)}\int_{\xi_2}^{x}\left[\phi_3(t,\lambda)f_1(t)+\psi_3(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t+\dfrac{\psi_3(x,\lambda)}{W_3(\lambda)}\int_x^{\pi}\left[\theta_3(t,\lambda)f_1(t)+\chi_3(t,\lambda)f_2(t)\right]\mathrm{d}t \\ -\dfrac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}\chi_3(x,\lambda)-\dfrac{\widetilde{f_2}}{W_3(\lambda)}\psi_3(x,\lambda), \qquad x\in(\xi_2,\pi]. \end{cases}$$

若令 $G(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix} G_{11}(x,t,\lambda) & G_{12}(x,t,\lambda) \\ G_{21}(x,t,\lambda) & G_{22}(x,t,\lambda) \end{pmatrix}$，其中

$$G_{11}(x,t,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{1}{W_1(\lambda)}\theta_i(x,\lambda)\phi_j(t,\lambda),\ 0\le t\le x\le\pi,\ x\ne\xi_1,\xi_2,\ t\ne\xi_1,\xi_2, \\ \dfrac{1}{W_1(\lambda)}\phi_i(x,\lambda)\theta_j(t,\lambda),\ 0\le x\le t\le\pi,\ x\ne\xi_1,\xi_2,\ t\ne\xi_1,\xi_2; \end{cases}$$

$$G_{12}(x,t,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{1}{W_1(\lambda)}\chi_i(x,\lambda)\phi_j(t,\lambda),\ 0\le t\le x\le\pi,\ x\ne\xi_1,\xi_2,\ t\ne\xi_1,\xi_2, \\ \dfrac{1}{W_1(\lambda)}\psi_i(x,\lambda)\theta_j(t,\lambda),\ 0\le x\le t\le\pi,\ x\ne\xi_1,\xi_2,\ t\ne\xi_1,\xi_2; \end{cases}$$

$$G_{21}(x,t,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{1}{W_1(\lambda)}\theta_i(x,\lambda)\psi_j(t,\lambda),\ 0\le t\le x\le\pi,\ x\ne\xi_1,\xi_2,\ t\ne\xi_1,\xi_2, \\ \dfrac{1}{W_1(\lambda)}\phi_i(x,\lambda)\chi_j(t,\lambda),\ 0\le x\le t\le\pi,\ x\ne\xi_1,\xi_2,\ t\ne\xi_1,\xi_2; \end{cases}$$

$$G_{22}(x,t,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{1}{W_1(\lambda)}\chi_i(x,\lambda)\psi_j(t,\lambda),\ 0\le t\le x\le\pi,\ x\ne\xi_1,\xi_2,\ t\ne\xi_1,\xi_2, \\ \dfrac{1}{W_1(\lambda)}\psi_i(x,\lambda)\chi_j(t,\lambda),\ 0\le x\le t\le\pi,\ x\ne\xi_1,\xi_2,\ t\ne\xi_1,\xi_2; \end{cases}$$

$i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}.$

又因为

$$W_3(\lambda)=\frac{d_3}{d_4}W_2(\lambda)=\frac{d_1d_3}{d_2d_4}W_1(\lambda),$$

则可得

$$\begin{aligned} y(x,\lambda)=&\int_0^{\xi_1}G^{\mathrm{T}}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t+\frac{d_2}{d_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}G^{\mathrm{T}}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t+\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\int_{\xi_2}^{\pi}G^{\mathrm{T}}(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t \\ &-\frac{\widetilde{f_1}}{W_1(\lambda)}\Gamma(x,\lambda)-\frac{d_2d_4}{d_1d_3}\frac{\widetilde{f_2}}{W_1(\lambda)}\Lambda(x,\lambda). \end{aligned} \tag{28}$$

另一方面，把 t 看作是积分变量，我们有

$$\begin{aligned} M_0'(G(x,\cdot,\lambda))&=\alpha_1'G_1(x,0,\lambda)-\alpha_2'G_2(x,0,\lambda) \\ &=\frac{1}{W_1(\lambda)}\Gamma(x,\lambda)\left[\alpha_1'\phi_1(0,\lambda)-\alpha_2'\psi_1(0,\lambda)\right] \\ &=\frac{1}{W_1(\lambda)}\Gamma(x,\lambda)\left[\alpha_1'\alpha_2-\alpha_1\alpha_2'\right] \\ &=-\frac{\rho_1}{W_1(\lambda)}\Gamma(x,\lambda), \end{aligned} \tag{29}$$

类似可得

$$M_\pi'(G(x,\cdot,\lambda))=-\frac{\rho_2}{W_1(\lambda)}\Lambda(x,\lambda). \tag{30}$$

将(29)，(30)代入(28)，等式(28)又可表示为

$$
\begin{aligned}
y(x,\lambda)=&\int_0^{\xi_1} G^{\mathrm{T}}(x,t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t+\frac{d_2}{d_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2} G^{\mathrm{T}}(x,t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t+\frac{d_2 d_4}{d_1 d_3}\int_{\xi_2}^{\pi} G^{\mathrm{T}}(x,t,\lambda) f(t)\mathrm{d}t \\
&+\frac{1}{\rho_1} M_0'\left(G(x,\cdot,\lambda)\right)\widetilde{f}_1+\frac{d_2 d_4}{d_1 d_3}\frac{1}{\rho_2} M_\pi'\left(G(x,\cdot,\lambda)\right)\widetilde{f}_2 .
\end{aligned} \tag{31}
$$

现在定义

$$
\widetilde{G}_{x,\lambda}=\begin{pmatrix} G(x,\cdot,\lambda) \\ M_0'\left(G(x,\cdot,\lambda)\right) \\ M_\pi'\left(G(x,\cdot,\lambda)\right) \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} f(x) \\ \widetilde{f}_1 \\ \widetilde{f}_2 \end{pmatrix},\ \overline{F}=\begin{pmatrix} \overline{f(x)} \\ \overline{\widetilde{f}_1} \\ \overline{\widetilde{f}_2} \end{pmatrix},
$$

此时，(31)可表示为

$$
y(x,\lambda)=\left\langle \widetilde{G}_{x,\lambda},\overline{F}\right\rangle .
$$

故预解算子 $\mathcal{R}(\lambda,\mathcal{T})=(\mathcal{T}-\lambda\mathcal{I})^{-1}$ 可表示为如下形式

$$
\mathcal{R}(\lambda,\mathcal{T})F=\begin{pmatrix} \left\langle \widetilde{G}_{x,\lambda},\overline{F}\right\rangle \\ M_0'\left(\left\langle \widetilde{G}_{x,\lambda},\overline{F}\right\rangle\right) \\ M_\pi'\left(\left\langle \widetilde{G}_{x,\lambda},\overline{F}\right\rangle\right) \end{pmatrix}.
$$

5. 总结与展望

在文献[6]的基础上，本文研究了一类内部具有两个不连续点且边界条件均含谱参数的 Dirac 算子。分析了该算子的特征值的性质，给出了问题的格林函数和预解算子。本文将内部不连续点的个数从一个推广到两个，丰富了微分算子的谱理论。今后也可以进一步研究内部不连续点多于两个的情形。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(12261066)，内蒙古自然科学基金(2017MS(LH)0103, 2023LHMS01015)。

参考文献

[1] Teschl, G. (1998) Renormalized Oscillation Theory for Dirac Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **126**, 1685-1695. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-98-04310-x

[2] Zilbergleit, L.V. (1999) Graded Differential Equations and Dirac Type Operators. *Acta Applicandae Mathematicae*, **56**, 301-320. https://doi.org/10.1023/a:1006177901138

[3] Winklmeier, M. (2006) The Angular Part of the Dirac Equation in the Kerr-Newman Metric: Estimates for the Eigenvalues. Ph.D. Thesis, Bremen University.

[4] Li, K., Zheng, J., Cai, J. and Zheng, Z. (2023) Eigenvalues of One-Dimensional Hamiltonian Operators with an Eigenparameter in the Boundary Condition. *Journal of Mathematical Physics*, **64**, Article ID: 093502. https://doi.org/10.1063/5.0138229

[5] Tharwat, M.M., Yildirim, A. and Bhrawy, A.H. (2013) Sampling of Discontinuous Dirac Systems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **34**, 323-348. https://doi.org/10.1080/01630563.2012.693565

[6] 袁兆年. 一类具有转移条件的 Dirac 算子的谱性质[D]: [硕士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2018.

[7] Tharwat, M.M. (2013) On Sampling Theories and Discontinuous Dirac Systems with Eigenparameter in the Boundary Conditions. *Boundary Value Problems*, **2013**, Article No. 65. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-65

[8] 邵晶. 几类微分系统的定性理论及其应用[D]: [博士学位论文]. 曲阜: 曲阜师范大学, 2015.

[9] Tharwat, M.M. and Alofi, A.S. (2015) Sampling of Vector-Valued Transforms Associated with Solutions and Green's Matrix of Discontinuous Dirac Systems. *Boundary Value Problems*, **2015**, Article No. 33. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0290-z

[10] Tharwat, M.M. (2016) Sampling Theories of Boundary Value Problems with Several Internal Points of Discontinuity. *Boundary Value Problems*, **2016**, Article No. 4. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0515-1

[11] Tharwat, M.M. (2022) On Dirac Systems with Multi-Eigenparameter-Dependent Transmission Conditions. *Filomat*, **36**, 3355-3379. https://doi.org/10.2298/fil2210355t