Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(11), 4948-4958
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311477

伴随链路动态的复杂网络的二阶跟踪控制

赵娟霞[1]，周广豪[2]，高沛涛[3*]，汤　晓[4]

[1]广州铁路职业技术学院电气工程学院，广东 广州
[2]广东技术师范大学自动化学院，广东 广州
[3]广东技术师范大学电子与信息学院，广东 广州
[4]广州亚俊氏真空科技股份有限公司，广东 广州

收稿日期：2024年10月21日；录用日期：2024年11月15日；发布日期：2024年11月22日

摘　要

复杂动态网络可以认为是由“节点子系统”和“连接边子系统”相互耦合而成的。本文首先采用两个向量微分方程来分别对两个子系统进行了建模，并且给出了网络实现二阶跟踪控制的定义。进一步给出了本文的控制目标，通过设计相应的二阶跟踪控制方案最终不仅可以使得网络中的节点实现位置跟踪，同时其也能按理想的速度来实现跟踪。最后，通过一个双连杆机器人机械臂的仿真实例对所提控制方案的有效性进行了验证。

关键词

复杂动态网络，连接边子系统，二阶跟踪控制

Second-Order Tracking Control of Complex Networks with Links Dynamics

Juanxia Zhao[1], Guanghao Zhou[2], Peitao Gao[3*], Xiao Tang[4]

[1]School of Electrical Engineering, Guangzhou Railway Polytechnic, Guangzhou Guangdong
[2]School of Automation, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou Guangdong
[3]School of Electronics and Information, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou Guangdong
[4]Guangzhou Argion Electric Appliance Co., Ltd., Guangzhou Guangdong

Received: Oct. 21st, 2024; accepted: Nov. 15th, 2024; published: Nov. 22nd, 2024

*通讯作者。

文章引用: 赵娟霞, 周广豪, 高沛涛, 汤晓. 伴随链路动态的复杂网络的二阶跟踪控制[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 4948-4958. DOI: 10.12677/aam.2024.1311477

Abstract

The complex dynamic network can be considered as being formed by the mutual coupling of "nodes subsystem" and "links subsystem". In this paper, two vector differential equations are first used to model the two subsystems separately, and the definition of second-order tracking control for the network is provided. Furthermore, the control objective of this paper is presented. By designing an appropriate second-order tracking control scheme, the nodes in the network can achieve not only position tracking but also tracking at the desired speed. Finally, the effectiveness of the proposed control scheme is validated through a simulation example of a two-link robotic manipulator.

Keywords

Complex Dynamical Network, Links Subsystem, Second-Order Tracking Control

1. 引言

从数学图论的角度来看，复杂动态网络由大量节点和连接边组成，这些节点与连接边随着时间发生变化，并且伴随着复杂的动态行为。复杂动态网络[1]在社会、科学和工程领域都有着重要的应用，例如社会网络，生物网络，传染病网络，电力网络等都可以用复杂动态网络来建模。复杂动态网络可以用来建模和模拟传染病的传播路径和传播速度，以帮助工作人员预测病情的发展趋势，从而制定有效的防控策略来进行干预。将生物网络也可以建模为复杂动态网络，其中将蛋白质视为网络节点，蛋白质之间的相互作用视为连接边，用复杂动态网络来对其建模有助于分析和揭示生物系统的功能与调控机制。

网络中的节点与连接边是相互耦合且相互影响，他们都是复杂网络涌现动态行为的不可或缺的源泉。然而，现有的许多研究[2]-[5]只关注了节点的动态行为，而忽略了连接边的动态行为。例如，许多复杂网络的研究只是将节点视为具有动态行为的子系统，而没有将连接边也视为具有动态行为的子系统，连接边在网络中只是起到辅助节点来实现节点动态行为的作用。这反映在对复杂网络的建模中，仅仅通过单个微分方程对节点的动力学进行建模而没有对连接边的动力学也进行建模。例如，在[6] [7]中，连接边的权重值仅被视为常数或时变值，而没有像节点那样作为连接边子系统的状态变量来研究其整体的动态行为。实际上，节点和连接边之间是相互作用的，其中任何一方的变化都通过耦合关系影响另一方。例如，在神经网络中[8]，神经元(节点)的动态影响突触(连接边)中神经递质的释放。同样，突触(连接边)的动态可以对神经元(节点)的动态产生影响。因此，连接边的动态行为与节点的动态行为一样值得引起关注。

此外，现有许多文献采用一阶微分方程来模拟节点的动力学行为[6] [9]-[11]，但事实上，用一阶微分方程来对系统建模具有一定的局限性，其无法涵盖一些工程中的系统，例如电机系统，飞行器系统，机器人系统，建筑，桥梁和机械振动系统等等。因此，采用二阶微分方程来对其建模具有更广泛的适用性，可以描述描述系统更加复杂的动态行为，例如振荡，共振和阻尼等。近年来，有许多关于用包含二阶导数的微分方程来对系统的动力学进行建模的研究。例如，在文献[12]-[14]中，用包含二阶导数项的微分方程对多机械臂系统进行建模，在固定通信拓扑和交换通信拓扑两种情况下设计了一种新的鲁棒控制法来实现系统的稳定。在[13]中，提出了一种自适应控制器来实现机器人操纵臂网络中领导跟随一致性与无领

导跟随一致性问题。在文献[15]中，在多智能体系统中，通过设计分布式控制方法来实现编队控制。文献[16]中，用二阶微分方程对网络进行建模，并提出了耦合复杂网络实现二阶同步的充要条件，二阶同步意味着不仅节点的位置实现了同步，节点的速度也实现了同步。然而不足之处于，上述的这些研究中连接边仅仅被视为一个时变的值来考虑，并没有将连接边的动态也进行建模来研究。在多智能体系统领域中，无人机的编队控制是一个重要的研究课题，在无人机系统中[15]，当无人机的位置与速度都跟踪上了领导者的位置与速度就称之为实现了编队控制。这就启发我们思考，当节点的位置跟踪上指定目标时，节点的速度不一定也能跟踪上指定目标的速度，因此，在网络中考虑节点位置和速度都实现跟踪控制是有必要的。

因此，本文将考虑在二阶系统中，所有节点与所有连接边分别作为两个子系统来研究其动态变化，并且通过探讨节点与连接边之间的耦合作用来设计控制方案以实现节点的跟踪控制。与已有研究相比，本文的主要创新点可以概括为以下三点：

(1) 采用包含二阶导数项的向量微分方程来对节点动态进行建模，使得模型的应用范围更广。同时，采用包含“出链路”向量的微分方程来对连接边的动态进行建模，在呈现每一个节点连接边动态时，“出链路”向量比网络拓扑矩阵更加具有直观性。

(2) 本文考虑了节点的位置与速度均实现跟踪的问题，即实现二阶跟踪。

(3) 本文在连接边中提出了一种辅助跟踪信号用来协助节点实现跟踪控制。

2. 模型描述

考虑由 N 个相互耦合的节点组成的复杂动态网络，其中第 i 个节点的动力学方程可以由下面的二阶微分方程来表示

$$D_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{q}_i + G_i(q_i) + \varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i) = \tau_i - c\sum_{j=1}^{N}\xi_{ij}(t)\Gamma h_j(q), \tag{1}$$

其中 $q_i=(q_{i1},q_{i2},\cdots,q_{in})^{\mathrm{T}}\in R^n$ 和 $\dot{q}_i=(\dot{q}_{i1},\dot{q}_{i2},\cdots,\dot{q}_{in})^{\mathrm{T}}\in R^n$ 分别表示第 i 个节点的位置向量和速度向量；$\ddot{q}_i=(\ddot{q}_{i1},\ddot{q}_{i2},\cdots,\ddot{q}_{in})^{\mathrm{T}}\in R^n$ 表示第 i 个节点的加速度向量；$q=(q_1^{\mathrm{T}},q_2^{\mathrm{T}},\cdots,q_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in R^{nN}$ 表示节点的整体位置向量，$i\in\{1,2,\cdots,N\}$；$\sigma>0$ 表示公共耦合强度；$D_i(Q_i)\in R^{n\times n}$，$C_i(q_i,\dot{q}_i)\in R^{n\times n}$ 是两个常数矩阵，$G_i(q_i)\in R^n$ 是与节点位置有关的向量函数，$\varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i)$ 是描述节点动态中存在不确定性的函数。$\tau_i\in R^n$ 表示第 i 个节点的控制输入，$\sum_{j=1}^{N}\xi_{ij}(t)\Gamma h_j(q)$ 表示节点与链路之间给定的通讯协议，其中 $\xi_{ij}(t)$ 表示第 i 个节点与第 j 个节点之间的连接关系；$\Gamma=diag(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^{n\times n}$ 表示以 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为对角元的对角矩阵；$h_j(q)\in R^n$ 表示内部耦合向量函数。

注 1：方程(1)可以用 N 个多机械臂的机器人组成的网络来解释，每一个机器人的机械臂视为一个节点 q_i，机器人机械臂之间的信息传输强度视为连接关系 ξ_{ij}，方程(1)中的 $\sum_{j=1}^{N}\xi_{ij}(t)\Gamma h_j(q)$ 可以描述为第 i 个机器人机械臂与其他所有机器人机械臂之间的通信强度的和。

为了更直观地了解每一个节点连接边的变化，引入“出链路”向量 $\xi_i(t)=(\xi_{i1}(t)\quad \xi_{i2}(t)\quad \cdots\quad \xi_{iN}(t))^{\mathrm{T}}\in R^N$，因此出链路向量 x_i 即为第 i 个节点指向其他所有节点的连接边。受文献[17]的启发，考虑如下的链路动态方程

$$\frac{\mathrm{d}\xi_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum\nolimits_{k=1}^{N} a_{jk}^{i}\xi_{ik}(t) + \sum\nolimits_{\rho=1}^{n}\theta_{j\rho}^{i}(q_i)q_{i\rho}(t), \tag{2}$$

其中 $A_i=(a_{jk}^i)_{N\times N}\in R^{N\times N}$，$W_i(q_i)=(\theta_{j\rho}^i(q_i))_{N\times n}\in R^{N\times n}$，$i,j,k\in\{1,2,\cdots,N\}$，$\rho\in\{1,2,\cdots,n\}$。

令 $H_i(q)=\begin{pmatrix}h_1(q) & h_2(q) & \cdots & h_N(q)\end{pmatrix}\in R^{n\times N}$，方程(1)和(2)可以被改写为

$$D_i(q_i)\ddot{q}_i+C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{z}_i+G_i(q_i)+\varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i)=\tau_i-c\Gamma H_i(q)\xi_i(t). \tag{3}$$

$$\dot{\xi}_i(t)=A_i\xi_i(t)+W_i(q)q_i(t), \tag{4}$$

假设 1：方程(3)中的 $D_i(q_i)$ 是对称可逆矩阵，并且对于所有的 $q_i\in R^n$ 来说都是有界的，$C_i(q_i,\dot{q}_i)$ 是已知的矩阵，$G_i(q_i)$ 是已知向量。$H_i(q)$ 是已知有界的矩阵，不确定函数 $\varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i)$ 满足范数有界的条件，即存在一个正函数 $\beta_i(t)$，使得 $\left\|\varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i)\right\|\le\beta_i(t)$ 成立。

假设 2：方程(3)中的节点的位置状态 q_i 以及速度状态 $\dot{q}_i$ 可以通过传感器等设备测量到，而节点之间的连接关系不易通过合适的传感器测得。

假设 3：在方程(4)中，矩阵 $A_i\in R^{N\times N}\quad i\in\{1,2,\cdots,N\}$ 是 Hurwitz 稳定的。

根据 Lyapunov 稳定理论可知，存在正定矩阵 $B_i\in R^{N\times N}$ 和 $\hat{Q}_i\in R^{N\times N}$ 使得如下的 Lyapunov 方程(5)成立

$$A_i^{\mathrm{T}}B_i+B_iA_i=-\hat{Q}_i. \tag{5}$$

3. 控制策略的设计

引入节点位置状态的跟踪目标 $q_i^d=q_i^d(t)\in R^n$ 和链路辅助跟踪目标 $\xi_i^d=\xi_i^d(t)\in R^N$。$q_i^d(t)\in R^n$ 以及其导数 $\dot{q}_i^d(t)\in R^n$，$\ddot{q}_i^d(t)\in R^n$ 是光滑且有界的。引入第 i 个节点的位置跟踪误差 $e_i(t)=q_i(t)-q_i^d(t)$ 以及链路跟踪误差 $E_i(t)=\xi_i(t)-\xi_i^d(t)$。为了辅助节点实现跟踪目标，链路的辅助跟踪目标选择为

$$\dot{\xi}_i^d(t)=c\lambda B_i^{-1}H_i^{\mathrm{T}}\Gamma\left[D_i^{-1}(q_i)\right]^{\mathrm{T}}(e_i+2\dot{e}_i)+W_i(q)e_i \tag{6}$$

定义：当 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|e_i(t)\right\|=\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|q_i(t)-q_i^d(t)\right\|=0$ 和 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|\dot{e}_i(t)\right\|=\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|\dot{q}_i(t)-\dot{q}_i^d(t)\right\|=0$ 成立时，称由方程(3)和(4)组成的复杂动态网络实现了二阶跟踪。

控制目标：通过在节点方程(1)中设计控制器 τ_i 以及在链路方程(4.2)中设计辅助跟踪目标 X_i^*，使得节点位置以及速度跟踪误差 $e_i(t)=q_i(t)-q_i^d(t)\xrightarrow{t\to+\infty}0$ 和 $\dot{e}_i(t)=\dot{q}_i(t)-\dot{q}_i^d(t)\xrightarrow{t\to+\infty}0$ 成立，也就是说复杂动态网络实现了二阶跟踪。同时，对于所有的 $i\in\{1,2,\cdots,N\}$ 来说，链路的状态 $\xi_i(t)$ 是有界的。

为了实现上述控制目标，控制策略设计如下：

$$\tau_i=D_i(q_i)\left\{\ddot{q}_i^d(t)-\dot{e}_i(t)-e_i(t)+\eta_i\right\}+C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{q}_i(t)+G_i(q_i)+c\Gamma H_i(q)\xi_i^d(t), \tag{7}$$

$$\eta_i=-\left\|D_i^{-1}(q_i)\right\|\beta(t)\widetilde{sign}\left(2\dot{e}_i(t)+e_i(t)\right), \tag{8}$$

其中 $\widetilde{sign}\left(2\dot{e}_i(t)+e_i(t)\right)=\begin{cases}\dfrac{2\dot{e}_i(t)+e_i(t)}{\left\|2\dot{e}_i(t)+e_i(t)\right\|}, & 2\dot{e}_i(t)+e_i(t)\ne0\\ 0, & \dot{e}_i(t)+e_i(t)=0\end{cases}$，$\beta>0$ 是一个可调的正参数。

注 2：方程(7)和(8)称为本文所设计的二阶跟踪控制策略。根据假设 2，在二阶跟踪控制策略设计的过程中，可以使用的信息是节点的状态 $q_i(t)$ 和 $\dot{q}_i(t)$，跟踪目标 $q_i^d(t)$，辅助参考信号 $\xi_i^d(t)$ 以及系统的一些已知参数。需要注意的是，链路的状态信息是不可利用的，因为链路的状态很难用合适的传感器来测得，例如在电机卷绕系统中[18]，由于张力传感器的成本过高或不易安装等局限导致电机之间的张力(链路)不易测得，因此链路的状态信息不可用于控制方案的设计。

记 $E_i(t)=\xi_i(t)-\xi_i^d(t)$，根据节点与链路方程(3) (4)，控制策略(7)~(8)，可以得到节点的跟踪误差以及链路跟踪误差的动态方程

$$\ddot{e}_i(t)+\dot{e}_i(t)+e_i(t)+cM_i^{-1}(q_i)\Gamma H_i(q)E_i(t)+M_i^{-1}(q_i)\varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i)=\eta_i. \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\dot{E}_i(t) &= D_i\xi_i(t)+W_i(q)q_i(t)-\dot{\xi}_i^d(t)\\ &= D_i\left[\xi_i(t)-\xi_i^d(t)\right]+W_i(q)\left[q_i(t)-q_i^d(t)\right]+D_i\xi_i^d(t)+W_i(q)q_i^d(t)-\dot{\xi}_i^d(t)\\ &= D_iE_i(t)+W_i(q)e_i(t)+D_i\xi_i^*+W_i(q)q_i^*-\dot{\xi}_i^*\end{aligned} \tag{10}$$

定理 1：考虑由方程(3)和(4)组成的复杂网络，在假设 1~3 满足的基础上，在二阶跟踪控制策略的作用下以及链路辅助参考信号的协助下可以实现节点的位置与速度跟踪，同时链路状态 ξ_i 保持有界。

证明 考虑如下方程(11)所示的 Lyapunov 函数，其中根据 Schur 补定理可知块矩阵 $\begin{bmatrix}3I_{n\times n} & I_{n\times n}\\ I_{n\times n} & 2I_{n\times n}\end{bmatrix}$ 是正定的，并且 Lyapunov 函数 $V=\sum_{i=1}^{N}V_i(e_i,\dot{e}_i,E_i)$ 是正定的

$$\begin{aligned}V_i &= V_i(e_i,\dot{e}_i,E_i)\\ &= \lambda\sum_{i=1}^{N}\left(e_i^{\mathrm{T}},\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\right)\begin{bmatrix}3I_{n\times n} & I_{n\times n}\\ I_{n\times n} & 2I_{n\times n}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}e_i\\ \dot{e}_i\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}B_iE_i\\ &= 3\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}e_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i+\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}A_iE_i\end{aligned} \tag{11}$$

对正定函数 V 沿着误差系统(9)和(10)的轨迹求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 6\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\ddot{e}_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i+4\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\ddot{e}_i+2\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}B_i\dot{E}_i\\ &= 6\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\left[v_i-\dot{e}_i-e_i-cD_i^{-1}(q_i)\Gamma H_i(q)E_i-D_i^{-1}(q_i)\varepsilon_i\right]\\ &\quad+2\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}B_i\left[A_iE_i+W_i(q)e_i+A_i\xi_i^*+W_i(q)q_i^*-\dot{\xi}_i^*\right]\\ &= 6\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i-2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}(\dot{e}_i+e_i)+2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\left[v_i-cD_i^{-1}(q_i)\Gamma H_i(q)E_i-D_i^{-1}(q_i)\theta_i\right]\\ &\quad+2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{T}\dot{e}_i-4\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}(\dot{e}_i+e_i)+4\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\left[v_i-cD_i^{-1}(q_i)\Gamma H_i(q)E_i-D_i^{-1}(q_i)\theta_i\right]\\ &\quad+2\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}B_iD_iE_i+2\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}B_i\left[W_i(q)e_i+D_iX_i^*+W_i(q)q_i^*-\dot{\xi}_i^*\right]\\ &= -2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}e_i-2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i-\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}\hat{Q}_iE_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\left[v_i-D_i^{-1}(q_i)\theta_i\right]\\ &\quad+4\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\left[v_i-D_i^{-1}(q_i)\theta_i\right]-2\lambda\sum_{i=1}^{N}\left[cM_i^{-1}(q_i)\Gamma H_i(q)E_i\right]^{\mathrm{T}}e_i\\ &\quad-4\lambda\sum_{i=1}^{N}\left[cM_i^{-1}(q_i)\Gamma H_i(q)E_i\right]^{\mathrm{T}}\dot{e}_i+2\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}B_i\left[W_i(q)e_i+D_i\xi_i^*+W_i(q)q_i^*-\dot{\xi}_i^*\right]\\ &= -2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}e_i-2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i-\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}\hat{Q}_iE_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\left[v_i-D_i^{-1}(q_i)\theta_i\right]\\ &\quad+2\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}B_i\left\{-c\lambda B_i^{-1}H_i^{\mathrm{T}}(q)\Gamma\left[D_i^{-1}(q_i)\right]^{\mathrm{T}}(e_i+2\dot{e}_i)+W_i(q)e_i+A_i\xi_i^*+W_i(q)q_i^*-\dot{\xi}_i^*\right\}\end{aligned} \tag{12}$$

将辅助跟踪目标(6)带入方程(12)可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &= -2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}-2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i-\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}\hat{Q}_iE_i\\ &\quad+2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}\left[v_i-D_i^{-1}(q_i)\theta_i\right]+4\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\left[v_i-D_i^{-1}(q_i)\theta_i\right]\\ &\le -2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}-2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i-\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}\hat{Q}_iE_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}\left(e_i^{\mathrm{T}}+2\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\right)\left[v_i-D_i^{-1}(q_i)\theta_i\right]\\ &\le -2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}-2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i-\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}\hat{Q}_iE_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}\left(e_i^{\mathrm{T}}+2\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\right)v_i\\ &\quad-2\lambda\sum_{i=1}^{N}\left\|e_i^{\mathrm{T}}+2\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\right\|*\left\|D_i^{-1}(q_i)\right\|\left\|\theta_i\right\|\\ &\le -2\lambda\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}e_i-2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i-\sum_{i=1}^{N}E_i^{\mathrm{T}}\hat{Q}_iE_i+2\lambda\sum_{i=1}^{N}\left(e_i^{\mathrm{T}}+2\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\right)v_i\\ &\quad-2\lambda\sum_{i=1}^{N}\left\|e_i^{\mathrm{T}}+2\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\right\|*\left\|D_i^{-1}(q_i)\right\|\beta_i(t)\end{aligned} \tag{13}$$

将二阶跟踪控制策略(8~9)带入不等式(13)可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &\le -2\lambda\sum_{i=1}^{N} e_i^T e_i - 2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i - \sum_{i=1}^{N} E_i^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i E_i \\ &\quad + 2\lambda\sum_{i=1}^{N}\left(e_i^{\mathrm{T}} + 2\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\right)\left\|D_i^{-1}(q_i)\right\|\beta_i(t)\widetilde{sign}\left(e_i + 2\dot{e}_i\right) \\ &\quad - 2\lambda\sum_{i=1}^{N}\left\|e_i^{\mathrm{T}} + 2\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\right\|\left\|D_i^{-1}(q_i)\right\|\beta_i(t) \\ &\le -2\lambda\sum_{i=1}^{N} e_i^{\mathrm{T}} e_i - 2\lambda\sum_{i=1}^{N}\dot{e}_i^{\mathrm{T}}\dot{e}_i - \sum_{i=1}^{N} E_i^{\mathrm{T}}\hat{Q}_i E_i \\ &\le 0\end{aligned} \tag{14}$$

根据不等式(14)，可以看出$\dot{V}_i$是关于e_i，$\dot{e}_i$和E_i的半负定函数。那么意味着误差系统e_i，$\dot{e}_i$和E_i是稳定的，也就是说e_i，$\dot{e}_i$和E_i是有界的。根据 Barbalat’s 引理[19]，可以得到跟踪误差$e_i = e_i(t) = q_i(t) - q_i^*(t) \xrightarrow{t\to+\infty} O_n$和$\dot{e}_i = \dot{e}_i(t) = \dot{\xi}_i(t) - \dot{\xi}_i^d(t) \xrightarrow{t\to+\infty} O_n$，并且对于所有的$i \in \{1,2,\cdots,N\}$来说链路的状态向量$\xi_i(t)$是有界的。

4. 仿真实例

为了进一步验证所提出的控制方法的有效性，通过仿真实验对[20]中 N 个双连杆机器人机械臂的位置跟踪控制进行了验证，其中每个孤立机器人机械臂(见图 1)的动力学模型可表示为

$$D_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i,\dot{q}_i)\dot{z}_i + G_i(q_i) + \varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i) = \tau_i \tag{15}$$

其中$q_i \in R^n$，$\dot{q}_i \in R^n$和$\ddot{q}_i \in R^n$分别表示第 i 个机器人机械臂的角度，角速度，以及角加速度，$D_i(q_i) \in R^{n\times n}$表示第 i 个机器人机械臂的质量矩阵，$C_i(q_i,\dot{q}_i) \in R^{n\times n}$表示第 i 个机器人机械臂的科里奥利矩阵和离心矩，$G_i(q_i) \in R^n$，$\varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i) \in R^n$，$\tau_i(t) \in R^n$表示重力项，非线性向量函数以及控制输入。进一步，方程(1)中的$c\sum_{j=1}^{N}\xi_{ij}(t)\Gamma h(q_j)$可以被视为第 i 个机器人机械臂的通讯协议，其中$\xi_{ij}(t)$表示第 i 个机器人机械臂指向第 j 个机器人机械臂之间的通讯强度，其动态方程选为方程(4)。

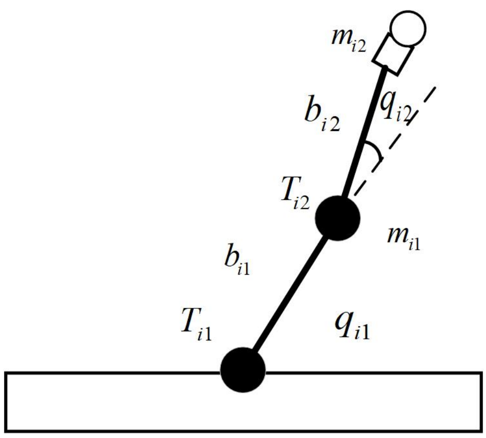

Figure 1. The mechanical model of the two-link robotic manipulator

图 1. 双连杆机器人机械臂的模型示意图

在图 1 中，m_{i1}和m_{i2}分别表示第 i 个机械臂中的第一个臂的质量和第二个臂的质量；d_{i1}和d_{i2}分别表示第一个臂的长度和第二个臂的长度；τ_{i1}和τ_{i2}分别表示第 i 个机械臂的第一臂和第二臂上的扭矩；q_{i1}和

q_{i2} 表示第一个臂和第二个臂的位置。

在 MATLAB 中为了方便模拟，引入向量 $q_i=\left[q_{i1},q_{i2}\right]^{\mathrm{T}}\in R^2$，$\dot{q}_i=\left[\dot{q}_{i1},\dot{q}_{i2}\right]^{\mathrm{T}}\in R^2$，$\left[\ddot{q}_{i1},\ddot{q}_{i2}\right]^{\mathrm{T}}\in R^2$，$\xi(t)=\left[\xi_1^{\mathrm{T}}(t),\xi_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\xi_N^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}}\in R^{N^2}$，$\xi^d(t)=\left[\left(\xi_1^d\right)^{\mathrm{T}},\left(\xi_2^d\right)^{\mathrm{T}},\cdots,\left(\xi_N^d\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\in R^{N^2}$，$\tau_i(t)=\left[\tau_{i1}(t),\tau_{i2}(t)\right]^{\mathrm{T}}\in R^2$ 以及误差向量 $e(t)=\left[e_1^{\mathrm{T}}(t),e_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,e_N^{\mathrm{T}}(t)\right]\in R^{2N}$，$\dot{e}(t)=\left[\dot{e}_1^{\mathrm{T}}(t),\dot{e}_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\dot{e}_N^{\mathrm{T}}(t)\right]\in R^{2N}$，$E(t)=\left[E_1^{\mathrm{T}}(t),E_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,E_N^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}}\in R^{N^2}$。

受文献[21]的启发，第 i 个机器人机械臂的参数以及方程(4)中的参数根据如下的步骤进行选取。

(1) 惯性矩阵 $D_i(z_i)\in R^{n\times n}$，科里奥利矩阵和离心矩阵 $C_i(q_i,\dot{q}_i)\in R^{n\times n}$，重力 $G_i(q_i)\in R^n$ 以及非线性函数向量 $\varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i)\in R^n$ 分别选择如下。

$$D_i(q_i)=\begin{bmatrix} m_{i1}d_{i1}^2+m_{i2}\left(d_{i1}^2+d_{i2}^2+2d_{i1}d_{i2}\cos q_{i2}\right) & m_{i2}d_{i2}^2+m_{i2}d_{i1}d_{i2}\cos q_{i2} \\ m_{i2}d_{i2}^2+m_{i2}d_{i1}d_{i2}\cos q_{i2} & m_{i2}d_{i2}^2 \end{bmatrix},$$

$$C_i(q_i,\dot{q}_i)=\begin{bmatrix} -2m_{i2}d_{i1}d_{i2}\sin z_{i2}\dot{q}_{i2} & -2m_{i1}d_{i1}d_{i2}\sin q_{i2}\dot{q}_{i2} \\ m_{i2}d_{i1}d_{i2}\sin q_{i2}\dot{q}_{i1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_i(q_i)=\begin{bmatrix} m_{i2}d_{i2}g\cos\left(q_{i1}+q_{i2}\right)+\left(m_{i1}+m_{i2}\right)d_{i1}g\cos\left(q_{i1}\right) \\ m_{i2}d_{i2}g\cos\left(q_{i1}+q_{i2}\right) \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_i(q_i,\dot{q}_i)=\begin{bmatrix} 0.5sign\left(\dot{e}_{i1}\right)\left[0.1+\exp\left(-\left|\dot{e}_{i1}\right|\right)\right] \\ sign\left(\dot{e}_{i2}\right)\left[0.1+\exp\left(-\left|\dot{e}_{i2}\right|\right)\right] \end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma_i \\ \gamma_i\end{bmatrix},$$

其中 $\gamma_i=randn(1)$。

(2) 初始状态值 $q(0)\in R^{2N}$ 和 $\xi(0)\in R^{N^2}$ 分别通过命令 $rand(2N,1)$ 和 $rand\left(N^2,1\right)$ 生成。节点位置的跟踪目标选为 $z_i^*(t)=\left[\sin(2\pi t)+\cos(2\pi t),\sin(2\pi t)+\cos(2\pi t)\right]^{\mathrm{T}}$，链路的辅助跟踪目标 $\xi_i^d(t)\in R^N$ 由方程(6)给出，$\Gamma=diag(b_1,b_2)\in R^{2\times 2}$，$h_j=\left[\cos\left(z_{j1}\right),\sin\left(z_{j2}\right)\right]^{\mathrm{T}}\in R^2$，$b_s=randn(1)$，$i,j\in\{1,2,\cdots,N\}$，$s\in\{1,2\}$。

(3) 令 $w_i=-rand(1)\left(w_i\neq 0,i\in\{1,2,\cdots,N\}\right)$，$W_i\in R^{N\times N}$ 是一个随机生成的 $N\times N$ 阶可逆矩阵。Hurwitz 矩阵可以根据 $A_i=W_i diag\{w_1,w_2,\cdots,w_N\}W_i^{-1}$ 生成。

(4) 令 $\hat{Q}_i=\phi I_N\in R^{N\times N}$，其中 $\phi=5rand(1)$，I_N 表示 N 阶单位矩阵，将其带入 Lyapunov 方程(5)，可以得到正定矩阵 $B_i\in R^{N\times N}$。

(5) 将上述步骤得到的参数带入辅助参考信号(6)以及二阶跟踪控制方案(7)~(8)。

在仿真中，双连杆机械臂的模型参数选择为 $N=30$，$m_{i1}=10\ \mathrm{kg}$，$m_{i2}=2\ \mathrm{kg}$，$d_{i1}=1.1\ \mathrm{m}$，$d_{i2}=0.8\ \mathrm{m}$，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$\sigma=5.7$，$\beta=5randn(1)$。此外，为了展示本文提出的二阶跟踪控制方案对于实现节点位置与速度跟踪的有效性，将其与文献[22]中的控制方案进行了对比，其中文献[22]中考虑的是机器人操作臂关节角的位置跟踪问题，对于速度跟踪没做要求，因此，本文将与其控制方案进行效果对比，得到如下仿真结果。

从图 2~5 的仿真结果可以得出如下结论：

结论 1：如图 2 和图 3 所示，不同颜色的曲线显示在文献[22]以及本文的控制方案下 30 个机器人机械臂关节角位置的状态以及位置跟踪误差曲线。可以看出，在文献[22]的控制方案下，机器人机械臂关节角的位置可以跟踪上期望的角度。然而不足之处在于，采用文献[22]中的控制方案得到的机械臂关节角的跟踪响应速度比本文慢，因此本文的控制方案在响应速度方面要优于文献[22]中的控制方案。

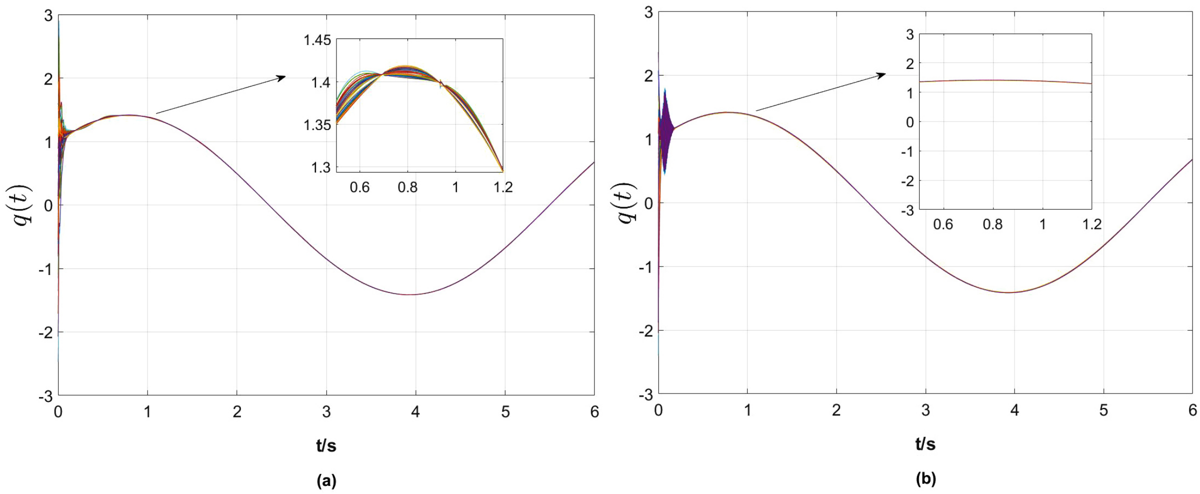

Figure 2. (a) The state curves $q(t)$ of angles for N robotic manipulators with the control scheme in [22]; (b) The state curves $q(t)$ of angles for N robotic manipulators with the control scheme in this paper

图 2. (a) 采用[22]中的控制方案下 N 个机器人机械臂关节角的位置状态曲线 $q(t)$；(b) 在本文控制方案下 N 个机器人机械臂关节角的位置状态曲线 $q(t)$

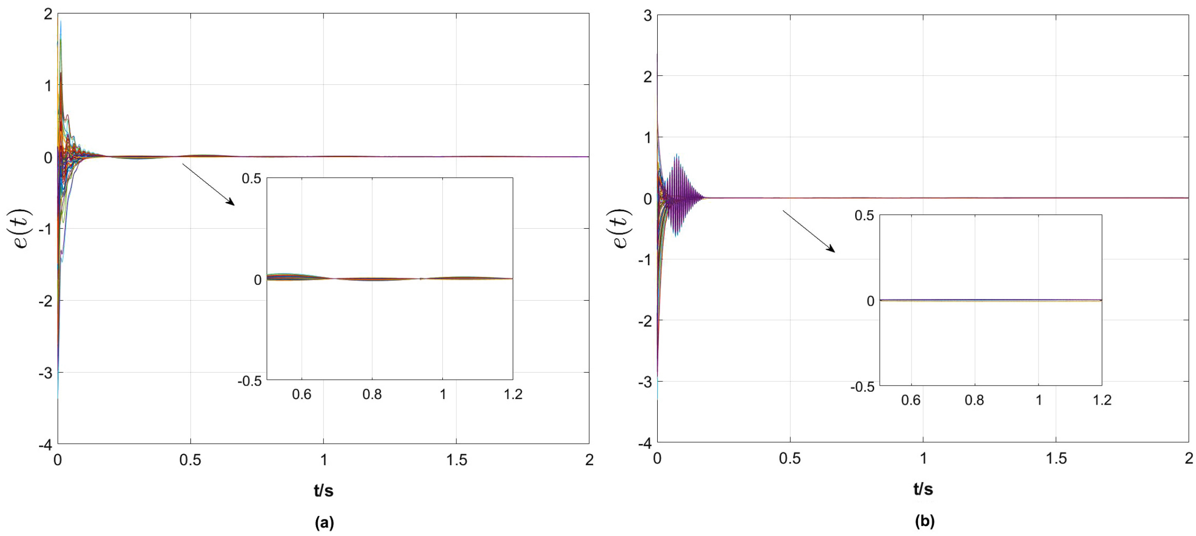

Figure 3. (a) The angles tracking error curves $e(t)$ of N robotic manipulators with the control scheme in [22]; (b) The angles tracking error curves $e(t)$ of N robotic manipulators with the control scheme in this paper

图 3. (a) 采用[22]中的控制方案下 N 个机器人机械臂关节角的位置跟踪误差曲线 $e(t)$；(b) 在本文控制方案下 N 个机器人机械臂关节角的位置跟踪误差曲线 $e(t)$

结论 2：从图 4 和图 5 中不难看出，采用[22]中的控制方案时机器人关节角的角速度状态无法完全跟踪上期望的角速度(存在一定的误差)，因此文献[22]中的控制方案无法实现关节角的角速度的渐近跟踪。这意味着虽然文献[22]中的控制方案可以实现机器人机械臂关节角的位置跟踪，但在其速度跟踪控制上略有不足，而本文所设计的二阶跟踪控制方案可以有效地使得关节角的位置以及角速度均跟踪上期望的状态。

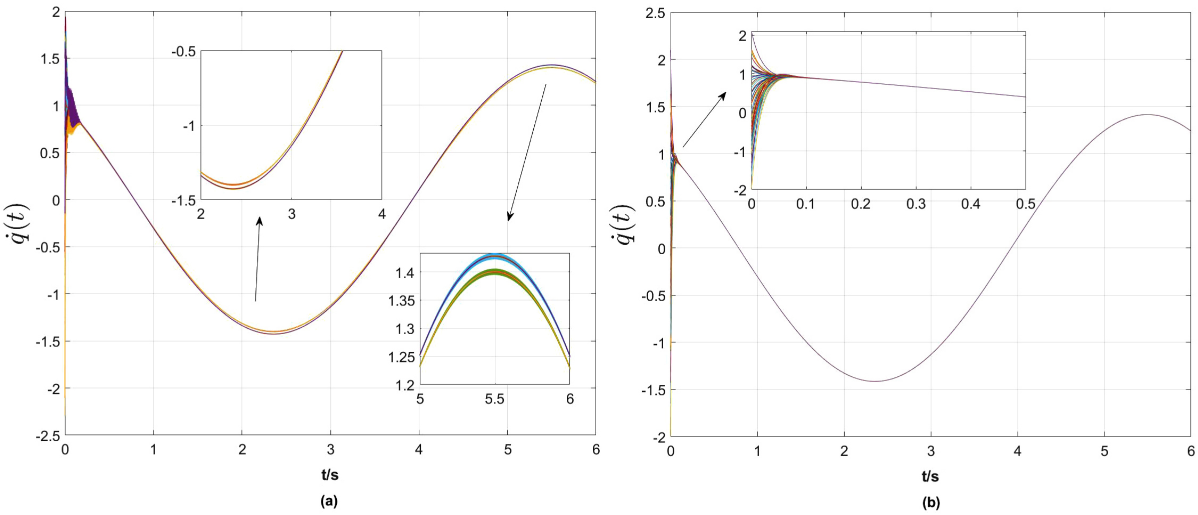

Figure 4. (a) The state curves $\dot{q}(t)$ of angles velocity for N robotic manipulators with the control scheme in [22]; (b) The state curves $\dot{q}(t)$ of angles velocity for N robotic manipulators with the control scheme in this paper

图 4. (a) 采用[22]中的控制方案下 N 个机器人机械臂关节角的角速度状态曲线 $\dot{q}(t)$；(b) 采用本文的控制方案下 N 个机器人机械臂关节角的角速度状态曲线 $\dot{q}(t)$

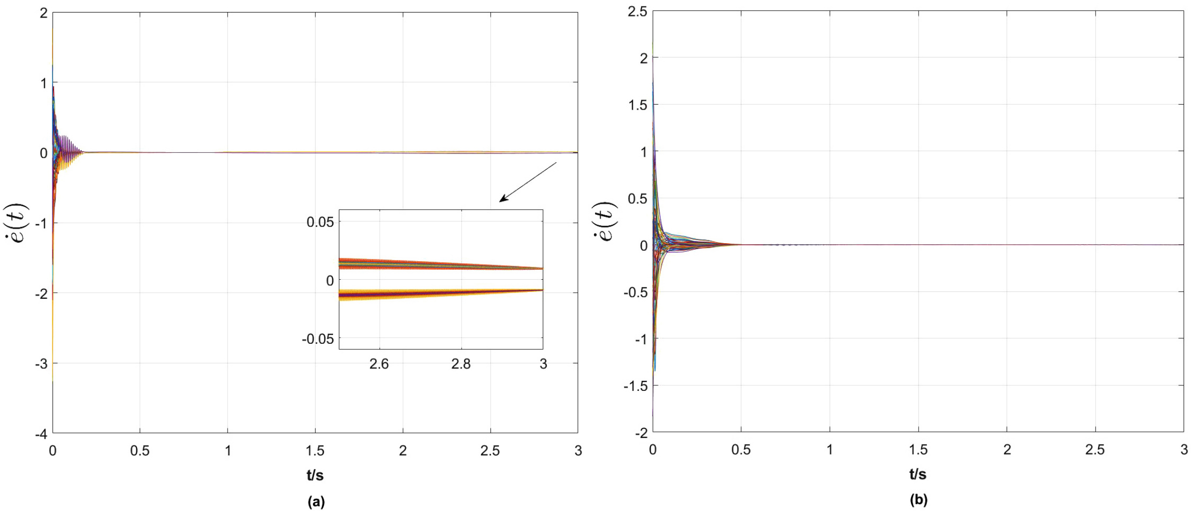

Figure 5. (a) The angles velocity tracking error curves $\dot{e}(t)$ of N robotic manipulators with the control scheme in [22]; (b) The angles velocity tracking error curves $\dot{e}(t)$ of N robotic manipulators with the control scheme in this paper

图 5. (a) 采用[22]中的控制方案下 N 个机器人机械臂关节角的角速度跟踪误差曲线 $\dot{e}(t)$；(b) 采用本文的控制方案下 N 个机器人机械臂关节角的角速度跟踪误差曲线 $\dot{e}(t)$

5. 总结

本文在将“节点子系统”与“连接边子系统”视为复杂网络中相互耦合的两个子系统的基础上考虑了节点的位置与速度的跟踪问题，分别采用两个微分方程来对节点与连接边的动态进行建模，其中节点的动力学模型在数学上表示为包含二阶导数项的向量微分方程，并且进一步考虑了系统中存在的不确定性对节点动态的影响以更适合实际工程应用。此外，为了直观地展示每一个节点连接边的动态变化，采

用了包含“出链路”的向量微分方程来对连接边的动态进行建模。本文不仅考虑了节点的位置跟踪问题，还进一步考虑了节点的速度的跟踪问题，设计的二阶跟踪控制方案最终不仅可以使得节点的位置跟踪上理想的轨迹，并且其也可以按照理想的速度来实现跟踪。最后，通过一个双连杆机器人机械臂模型的数值仿真验证了控制方案的有效性。

基金项目

广东技术师范大学人才引进项目(991701003)；中山大学技术服务项目(1748078)；广州市基础与应用基础研究项目(SL2024A04J01631)。

参考文献

[1] 郭雷, 许晓鸣. 复杂网络[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2006.

[2] Lü, J., Yu, X. and Chen, G. (2004) Chaos Synchronization of General Complex Dynamical Networks. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **334**, 281-302. https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.10.052

[3] Wu, W. and Chen, T. (2008) Global Synchronization Criteria of Linearly Coupled Neural Network Systems with Time-Varying Coupling. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **19**, 319-332. https://doi.org/10.1109/tnn.2007.908639

[4] Wang, X.F. and Chen, G. (2002) Synchronization in Small-World Dynamical Networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**, 187-192. https://doi.org/10.1142/s0218127402004292

[5] Xu, Y., Wu, X., Li, N., Liu, L., Xie, C. and Li, C. (2020) Fixed-Time Synchronization of Complex Networks with a Simpler Nonchattering Controller. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*: *Express Briefs*, **67**, 700-704. https://doi.org/10.1109/tcsii.2019.2920035

[6] Li, Z. and Chen, G. (2006) Global Synchronization and Asymptotic Stability of Complex Dynamical Networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*: *Express Briefs*, **53**, 28-33. https://doi.org/10.1109/tcsii.2005.854315

[7] Duan, Z., Wang, J., Chen, G. and Huang, L. (2008) Stability Analysis and Decentralized Control of a Class of Complex Dynamical Networks. *Automatica*, **44**, 1028-1035. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.08.005

[8] Wang, Z., Ho, D.W.C. and Liu, X. (2005) State Estimation for Delayed Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **16**, 279-284. https://doi.org/10.1109/tnn.2004.841813

[9] Gao, P., Wang, Y., Zhao, J., Zhang, L. and Peng, Y. (2023) Links Synchronization Control for the Complex Dynamical Network. *Neurocomputing*, **515**, 59-67. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.10.024

[10] Yu, W., Cao, J., Chen, G., Lu, J., Han, J. and Wei, W. (2009) Local Synchronization of a Complex Network Model. *IEEE Transactions on Systems*, *Man*, *and Cybernetics*, *Part B* (*Cybernetics*), **39**, 230-241. https://doi.org/10.1109/tsmcb.2008.2004964

[11] Zhao, D. and Zhu, Q. (2012) Position Synchronised Control of Multiple Robotic Manipulators Based on Integral Sliding Mode. *International Journal of Systems Science*, **45**, 556-570. https://doi.org/10.1080/00207721.2012.724106

[12] Ma, H., Zhou, Q., Li, H. and Lu, R. (2022) Adaptive Prescribed Performance Control of a Flexible-Joint Robotic Manipulator with Dynamic Uncertainties. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **52**, 12905-12915. https://doi.org/10.1109/tcyb.2021.3091531

[13] Dai, S., He, S., Chen, X. and Jin, X. (2020) Adaptive Leader-Follower Formation Control of Nonholonomic Mobile Robots with Prescribed Transient and Steady-State Performance. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, **16**, 3662-3671. https://doi.org/10.1109/tii.2019.2939263

[14] Nuño, E., Aldana, C.I. and Basañez, L. (2016) Task Space Consensus in Networks of Heterogeneous and Uncertain Robotic Systems with Variable Time-Delays. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **31**, 917-937. https://doi.org/10.1002/acs.2738

[15] 杨惠阳, 刘琛, 张国华, 等. 二阶时滞多智能体系统编队控制[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2023, 41(4): 171-174.

[16] 蒋燕, 廖毅豪, 罗世贤, 等. 位移采样下二阶多智能体系统的脉冲一致性[J]. 电光与控制, 2023, 30(10): 34-39, 45.

[17] Gao, P., Wang, Y., Liu, L., Zhang, L. and Tang, X. (2021) Asymptotical State Synchronization for the Controlled Directed Complex Dynamic Network via Links Dynamics. *Neurocomputing*, **448**, 60-66. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2021.03.095

[18] Hou, H., Nian, X., Xiong, H., Wang, Z. and Peng, Z. (2016) Robust Decentralized Coordinated Control of a Multimotor Web-Winding System. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **24**, 1495-1503.

https://doi.org/10.1109/tcst.2015.2499705

[19] Zhao, J., Xu, S., Li, Y., Chu, Y. and Zhang, Z. (2020) Event-Triggering H_∞ Synchronization for Discrete Time Switched Complex Networks via the Quasi-Time Asynchronous Controller. *Neurocomputing*, **407**, 221-231. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.05.003

[20] Liu, B. and Hill, D.J. (2011) Impulsive Consensus for Complex Dynamical Networks with Nonidentical Nodes and Coupling Time-Delays. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **49**, 315-338. https://doi.org/10.1137/080722060

[21] Wang, Y., Wang, W. and Zhang, L. (2020) State Synchronization of Controlled Nodes via the Dynamics of Links for Complex Dynamical Networks. *Neurocomputing*, **384**, 225-230. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2019.12.055

[22] Shi, H., Wang, M. and Wang, C. (2022) Pattern-Based Autonomous Smooth Switching Control for Constrained Flexible Joint Manipulator. *Neurocomputing*, **492**, 162-173. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.04.031