Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(11), 4959-4965**
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311478

马鞍面上的多元Birkhoff插值问题研究

马亚茹，周鹏宇，崔利宏*

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年10月25日；录用日期：2024年11月18日；发布日期：2024年11月25日

摘 要

以二元Birkhoff插值研究为基础，进一步研究了三维欧氏空间中马鞍面上的Birkhoff插值。首先给出了马鞍面上的多元Birkhoff插值相关定义，对插值条件组的拓扑结构进行了较为深入的研究，然后给出了构造多元函数插值适定泛函组的添加马鞍面法，最后给出具体实例进行验证。

关键词

马鞍面，Birkhoff插值，适定泛函组

Study on Multivariate Birkhoff Interpolation of Saddle Surfaces

Yaru Ma, Pengyu Zhou, Lihong Cui*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 25th, 2024; accepted: Nov. 18th, 2024; published: Nov. 25th, 2024

Abstract

Based on the research of two-dimensional Birkhoff interpolation, this study further investigates Birkhoff interpolation on a saddle surface in three-dimensional Euclidean space. First, relevant definitions of multivariate Birkhoff interpolation on saddle surfaces are provided. An in-depth study of the topological structure of the interpolation condition set is conducted. Then, the method of adding saddle surface techniques to construct a suitable functional set for multi-variable function interpolation is introduced. Finally, specific examples are provided for verification.

Keywords

Saddle Surface, Birkhoff Interpolation, Well-Posed Functional Set

*通讯作者。

文章引用: 马亚茹, 周鹏宇, 崔利宏. 马鞍面上的多元 Birkhoff 插值问题研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 4959-4965. DOI: 10.12677/aam.2024.1311478

1. 引言

多元 Birkhoff 插值是插值理论中的一个复杂而重要的领域，它为处理多元函数插值问题提供了更大的灵活性。Birkhoff 在 1906 年首次提出了 Birkhoff 插值问题[1]。1966 年，Schoenberg 在文献[2]中引入了一元 Birkhoff 插值格式。有关多元函数插值的研究，其中一个基本问题为插值的适定性问题。1979 年，梁学章教授首次将插值的适定性与几何问题相结合[3]，并提出了一些直观的方法来选择和判定二元插值的适定结点组，并在此基础上提出了迭加插值法[4]。1987 年，Hack 在文献[5]中探讨了二元 Birkhoff 插值的正则性问题。2008 年，崔利宏和杨爽提出了一种通过添加平面代数曲线的方法来构造二元 Birkhoff 插值适定泛函组[6]。2017 年，崔凯在[7]中讨论了多元 Birkhoff 插值的若干问题。本文主要研究三维欧式空间中马鞍面上进行多元 Birkhoff 插值的适定泛函组问题。

马鞍面作为一种具有特殊几何特征的曲面，在多个科学和工程应用中具有重要意义。例如，在计算机图形学中，马鞍面可用于模拟自然界中的地形特征；而在物理建模中，流体流动和热传导的分析常常涉及马鞍形状的界面。这些应用需要在不规则数据点上进行高效的插值，以生成连续且光滑的表面。因此，研究马鞍面上 Birkhoff 插值问题有很大意义。

2. 基本定义

定义 1 (一个多元 Birkhoff 插值格式(E,P_S,Z)由三部分组成)

(1) 结点集 Z，

$$Z=\{z_i\}_{i=1}^m=\{(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})\}_{i=1}^m\subset R^n,$$

(2) 插值空间 P_s，

$$P_s=\left\{p\mid p(x)=p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i\in S}a_i x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\right\},$$

其中 $S\subset N^n$。

(3) 关联矩阵 E，

$$E=(e_{q,\alpha}),q=1,\cdots,m,\alpha\in S,$$

其中 $e_{q,\alpha}=0$ 或 1。

若 (q,α) 满足 $e_{q,\alpha}=1$，给定数组 $c_{q,\alpha}$，则与插值格式 (E,P_S,Z) 对应的 Birkhoff 插值问题为寻找一多项式 $p\in P_S$ 满足：

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}p(z_q)=c_{q,\alpha}$$

此处 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。

定义 2 (全次数型多元 Birkhoff 插值)

设给定整数 $z_q\ge 0$， $q=1,\cdots,m;m\ge 0$， $A=\{Q_q\}_{q=1}^m$ 是 R^d 中 m 个互异点组成的集合。全次数型多元 Birkhoff 插值问题是如果对于给定数组 $c_{q,\alpha}$， $q=1,\cdots,m;m\ge 0$， $|\alpha|\le z_q$， 找到一个多项式 $p\in P_n^{(d)}$，满足

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}p(Q_q)=c_{q,\alpha},q=1,\cdots,m,|\alpha|\le z_q$$

假设 n 和 z_q 满足：

$$\binom{n+d}{d}=\sum_{q=1}^{m}\binom{z_q+d}{d}$$

若 $z_q\ge 0$， $q=1,\cdots,m$， $z_1=z_2=\cdots=z_q$，该 Birkhoff 插值问题为一致 Birkhoff 插值问题。

代数曲面上的多元 Birkhoff 插值问题相关符号定义：设 $k\in\mathbb{N}^+$， $r\in\mathbb{N}$， $P_{n,r}^{(3)}\left[q(k)\right]$ 表示定义在 k 次代数曲面 $q(x,y,z)=0$ 上的全次数不超过 n 且有 r 阶方向导数的三元代数多项式空间，定义：

$$\begin{aligned}d_{n,\mu}(k)&=\binom{n+3}{3}-\binom{n-(\mu+1)k+3}{3}\\&=\begin{cases}\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3),n<(\mu+1)k\\\frac{1}{6}(\mu+1)k\left(3n\left(n-(\mu+1)k\right)+12n+(\mu+1)^2k^2-6(\mu+1)k+11\right),n\ge(\mu+1)k\end{cases}\end{aligned}$$

$$e_{n,r}(k)=\frac{1}{2}(n-rk)k\left(n-(r+1)k+4\right)+\binom{k-1}{3}+1$$

且有 $\dim P_{n,r}^{(3)}\left[q(k)\right]=d_{n,\mu}(k)$ (即 k 次代数曲面 $q(x,y,z)=0$ 上 Birkhoff 插值适定泛函组中的条件数与插值空间的维数相等)。

定义 3 (马鞍面上的多元 Birkhoff 插值)

设马鞍面方程为 $q(x,y,z)=2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$， $B=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)\right\}$ 为沿 $q(x,y,z)=0$ 的一个 n 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组，记 $B\in I_{n,r}^{(3)}(q)$ ($I_{n,r}^{(3)}(q)$ 为全部沿该曲面的一个 n 次 r 阶 Birkhoff 插值泛函组的集合)，若对 $\forall\left\{f_i^{(r)}\mid r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)\right\}$ 都 $\exists p(x,y,z)\in P_n^{(3)}$ 满足：$\frac{\partial^r}{\partial n^r}p\left(Q_i^{(r)}\right)=f_i^{(r)}$，$r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)$。

注 1：若 $\forall\left\{f_i^{(r)}\mid r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)\right\}$ 方程 $\frac{\partial f}{\partial n^r}p\left(Q_i^{(r)}\right)=f_i^{(r)},r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)$ 总存在唯一解 $\Leftrightarrow$ 若 $\exists p(x,y,z)\in P_n^{(3)}$，满足齐次 Birkhoff 插值条件 $\frac{\partial f}{\partial n^r}p\left(Q_i^{(r)}\right)=0,r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)$ 蕴含沿曲面 $q(x,y,z)=0$，恒有 $p(x,y,z)=0$。

为证明后续所得结论，下面给出关于理想的定义。

定义 4 (理想)

一个子集 $I\subset K[x_1,\cdots,x_s]$ 被称为一个理想，若满足条件：

(1) $0\in I$；

(2) 若 $f,g\in I$，则 $f+g\in I$；

(3) 若 $f\in I$ 且 $h\in K[x_1,\cdots,x_s]$ 则 $f\cdot h\in I$。

定义 5 (根理想)

令 $I\subset K[x_1,\cdots,x_s]$ 是一个理想，若有集合 $\left\{f\mid f^m\in I\text{ 对某些整数 }m\ge 1\right\}$，则有 I 的根理想 $\sqrt{I}$。

命题 1：令 I 是一个理想，且 V_1,V_2 是两个仿射簇，则 $V_1\subset V_2\Rightarrow I(V_1)\supset I(V_2)$。

命题 2：若 $f\subset K[x_1,\cdots,x_s]$ 是一个理想，有 $I=\langle f\rangle$ 是由 f 生成的素理想，且有 $f=f_1^{\alpha_1}\cdots f_s^{\alpha_s}$，其中

$f_1^{\alpha_1}\cdots f_s^{\alpha_s}$ 为不可约多项式，则 $\sqrt{I}=\sqrt{\langle f\rangle}=\langle f_1,f_2,\cdots,f_s\rangle$。

特别地，若 $f_i^{\alpha_i}\neq f_j^{\alpha_j}\,(i,j=1,\cdots,s;i\neq j)$，则 $\sqrt{I}=I$。

3. 主要成果

本文主要成果如下：

定理 1 (构造 $P_n^{(3)}$ 上的 Birkhoff 插值适定泛函组的添加马鞍面法)

设 $\Phi=\left\{D_\vartheta\left(Q_i\right)\mid\vartheta\in A_i,i=0,1,\cdots,t\right\}$ 为 $P_n^{(3)}$ 的一个插值适定泛函组，且马鞍面 $q(x,y,z)=0$ 不经过 Φ 中任何点，则对马鞍面上的一个 $n+2(\mu+1)$ 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组 $B=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n+2(\mu+1),r}(2)\right\}$，$B\cup\Phi$ 一定构成关于 $P_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$ 的 Birkhoff 插值适定泛函组。

为证明此定理，下面先给出引理加以证明。

引理 1

马鞍面 $q(x,y,z)=0$ 上的结点组 $B=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)\right\}$ 为该曲面上的一个 n 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组 $\Leftrightarrow$ 若 $\exists p(x,y,z)\in P_n^{(3)}$ 满足插值条件

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r}p\left(Q_i^{(r)}\right)=0,r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)$$

则 $\exists h(x,y,z)\in P_{n-2(\mu+1)}^{(3)}$ 使得 $P(x,y,z)=\left(2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\mu+1}\cdot h(x,y,z)$。

若 $n<2(\mu+1)$，$h(x,y,z)\equiv 0$。

引理 1 的证明：

充分性由注记 1 可得，下证必要性：

设 $B=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)\right\}$ 是 $q(x,y,z)=0$ 上的一个 n 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组，且 $\exists p(x,y,z)\in P_n^{(3)}$ 满足 $\frac{\partial^r}{\partial n^r}p\left(Q_i^{(r)}\right)=0,r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)$。

若 $r=0$，则沿马鞍面 $q(x,y,z)=0$ 上恒有 $p(x,y,z)=0$，记 $I_1=\langle q\rangle$，$I_2=\langle p\rangle$，则 $V(I_1)\subset V(I_2)$，即 $I(V(I_1))\supset I(V(I_2))$。因为马鞍面 $q(x,y,z)=0$ 是一个二次无重复分量的代数曲面，所以 $I(V(I_1))=\sqrt{I_1}=I_1$，$I(V(I_2))=\sqrt{I_2}\supset I_2$ 那么 $I_2\subset I_1$。

由理想的定义可知，$\exists h(x,y,z)\in P_{n-2}^{(3)}$ 使 $P(x,y,z)=\left(2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\cdot h(x,y,z)$。

假设结论对 $r=m,r\in Z$ 且 $r>0$ 成立，则有 $B=\left\{Q_i^{(r)}\mid r=0,1,\cdots,\mu;i=1,\cdots,e_{n,r}(2)\right\}$ 为定义在马鞍面 $q(x,y,z)=2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ 上的 n 次 m 阶 Birkhoff 插值适定条件组，且满足

$$\frac{\partial^m}{\partial n^m}p\left(Q_i^{(r)}\right)=0,\forall Q_i^{(m)}\in B \tag{1}$$

有

$$P(x,y,z)=\left(2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{m+1}\cdot h(x,y,z) \tag{2}$$

若 $r=m+1$，对公式(1)两端进行求导直到 $m+1$阶，并使用 Leibniz 公式有

$$r\left(Q_i^{(r)}\right)=0,\forall Q_i^{(r)}\in B \tag{3}$$

因为 $h(x,y,z)\in P_{n-2}^{(3)}$ 同时经过唯一且确定的 $q(x,y,z)=2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ 的所有条件点，所以总有 $h(x,y,z)\equiv 0$。由 $r=0$ 同理得

$$h(x,y,z)=\left(2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\cdot h'(x,y,z) \tag{4}$$

将(4)带入(2)得 $P(x,y,z)=\left(2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{m+2}\cdot h'(x,y,z)$

由数学归纳法引理得证。

定理 1 的证明：

只需证仅存在零多项式满足所给的齐次 Birkhoff 插值条件。

首先，定理中所给的全部条件数为：

$$\begin{aligned}
&\binom{n+3}{3}+\sum_{r=0}^{\mu}e_{n+2(\mu+1),r}(2)\\
&=\binom{n+3}{3}+\sum_{r=0}^{\mu}\left(2\cdot\frac{1}{2}\big(n+2(\mu+1)-2r\big)\big(n+2(\mu+1)-2(r+1)+4\big)+\binom{1}{3}+1\right)\\
&=\binom{n+3}{3}+2\cdot\frac{1}{6}(\mu+1)\Big(3\cdot 2n\big(n+(\mu+1)\big)+12n+4(\mu+1)^2-12(\mu+1)+11\Big)\\
&=\binom{n+3}{3}+\binom{n+2(\mu+1)+3}{3}-\binom{n+3}{3}\\
&=\binom{n+2(\mu+1)+3}{3}\\
&=\dim P_{n+2(\mu+1)}^{(3)}
\end{aligned}$$

假设 $\exists P(x,y,z)\in P_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$ 满足齐次 Birkhoff 插值条件，则：

$$D_{\vartheta}P(Q_i)=0,\forall Q_i\in N$$

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r}P\left(Q_i^{(r)}\right)=0,\forall Q_i^{(r)}\in B$$

因为 $\frac{\partial^r}{\partial n^r}P\left(Q_i^{(r)}\right)=0,\ \forall Q_i^{(r)}\in B$ 同时有 $B\in I_{n+2(\mu+1),r}^{(3)}(F)$，$P(x,y,z)\in P_{n+2(\mu+1)}^{(3)}$。

由引理 1 得 $\exists h(x,y,z)\in P_n^{(3)}$ 使得 $P(x,y,z)=\left(2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\mu+1}\cdot h'(x,y,z)$。

将其求导至 $\mu+1$ 阶得 $D_{\vartheta}P(Q_i)=D_{\vartheta}\left\{\left(2z-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\mu+1}\cdot h'(x,y,z)\right\}(Q_i)=0,\ \forall Q_i\in N$。

因为 $\forall Q_i\in N$，$q(Q_i)\neq 0$，由 Leibniz 公式得 $\forall Q_i\in N$，$D_{\vartheta}r(Q_i)=0$，又 $\Phi=\{D_{\vartheta}(Q_i)\,|\,\vartheta\in A_i,i=0,1,\cdots,t\}$ 是关于 $P_n^{(3)}$ 的 Birkhoff 插值适定泛函组，有 $h(x,y,z)\equiv 0$，即 $p(x,y,z)\equiv 0$，证毕。

4. 具体实例

设马鞍面方程为 $2z=x^2-y^2$，取一被插值函数 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，在马鞍面外取一点

$Q_0^{(0)}(1,0,1)$，该点是 $P_0^{(3)}$ 的一个适定结点组，在马鞍面上取点 $Q_1^{(0)}(2,0,2)$，在该点处一阶法向量导数 $Q_1^{(1)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，见图 1。由定理 2 得 $\left(Q_0^{(0)},Q_1^{(0)},Q_1^{(1)}\right)$ 构成 $P_1^{(3)}$ 的适定泛函组。

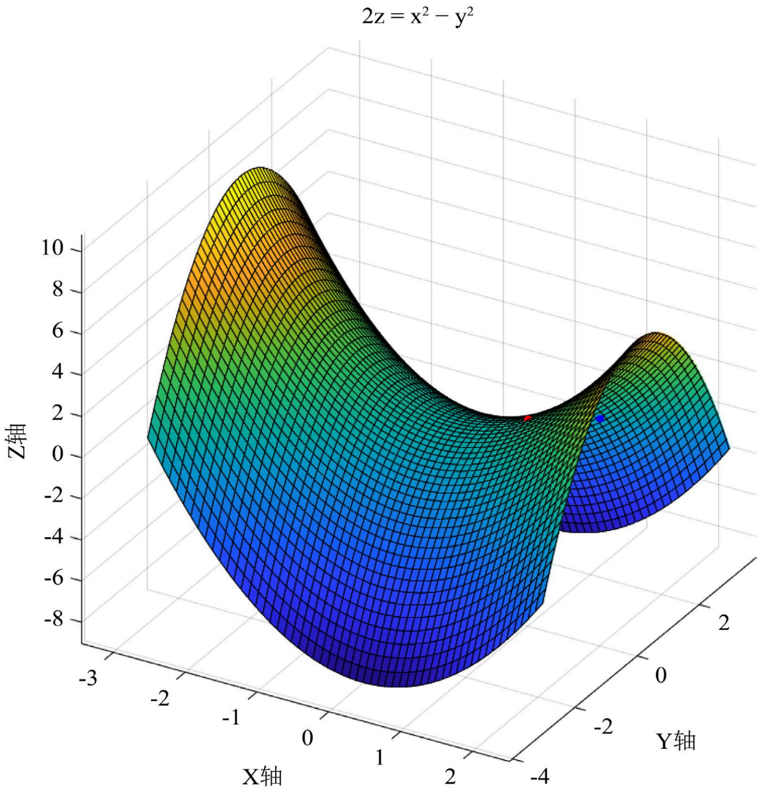

Figure 1. Saddle surface take point plot
图 1. 马鞍面上取点图

设插值多项式为 $P(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z$ 则

$$\begin{cases} P\left(Q_0^{(0)}\right)=f_0^{(0)} \\ P\left(Q_1^{(0)}\right)=f_1^{(0)} \\ \dfrac{\partial^1}{\partial n^1}P\left(Q_1^{(1)}\right)=f_1^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_3=\sqrt{2} \\ a_0+2a_1+2a_3=2\sqrt{2} \\ a_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ a_2=0 \\ a_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$P(x,y,z) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}z$$

计算 $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}\right)$ 处 $f\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{4}$，$P\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8}$，误差为 $\left|\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right| \approx 0.0287$。

5. 结论

本文首先给出多元 Birkhoff 插值相关定义，随后介绍了马鞍面上多元 Birkhoff 插值适定泛函组的相关概念，然后得到相应定理并给出了证明，最后给出实例进行验证。本文创新点即为给出了构造三维欧氏空间 Birkhoff 插值适定泛函组的添加马鞍面法，虽然此方法在实际生活中应用较广，但也要考虑其局限性，构造三维空间中的马鞍面相对复杂，并且马鞍面所需的参数(如曲率、位置等)通常依赖于具体问题，选择不当可能导致插值结果不理想。今后也将通过不断优化参数选择以及结合其他的插值方法，来改善这些局限性，从而推动该方法在更广泛领域的应用。

参考文献

[1] Birkhoff, G.D. (1906) General Mean Value and Remainder Theorems with Applications to Mechanical Differentiation and Quadrature. *Transactions of the American Mathematical Society*, **7**, 107-136. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1906-1500736-1

[2] Schoenberg, I.J. (1966) On Hermite-Birkhoff Interpolation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **16**, 538-543. https://doi.org/10.1016/0022-247x(66)90160-0

[3] 梁学章. 关于多元函数的插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979(1): 123-124.

[4] 梁学章. 二元插值的适定结点组与迭加插值法[J]. 吉林大学自然科学学报, 1979(1): 27-32.

[5] Hack, F.J. (1987) On Bivariate Birkhoff Interpolation. *Journal of Approximation Theory*, **49**, 18-30. https://doi.org/10.1016/0021-9045(87)90110-9

[6] 崔利宏，杨爽. 二元 Birkhoff 插值泛函组适定性问题[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2008(4): 14-17.

[7] 崔凯. 多元 Birkhoff 插值若干问题研究[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2015.