Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(11), 5017-5024
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311484

一类带有粗糙核的分数次积分广义交换子在λ-中心Morrey空间上的有界性

胡凰雲

东华理工大学理学院，江西 南昌

收稿日期：2024年10月25日；录用日期：2024年11月18日；发布日期：2024年11月27日

摘 要

具有粗糙核的积分算子交换子在λ-中心Morrey空间上的有界性被许多作者所研究。本文利用Hölder不等式、环分解等调和分析中的一些经典理论和方法，研究了由带有粗糙核的分数次积分算子和λ-中心BMO函数空间生成的广义交换子在λ-中心Morrey空间上的有界性。本文的研究结果推广了Fu、Lin和Lu的部分结论。

关键词

λ-中心Morrey空间，λ-中心BMO函数，交换子，粗糙核，分数次积分算子

Boundedness of a Class of Generalized Commutators of Fractional Integrals with Rough Kernels on λ-Central Morrey Spaces

Huangyun Hu

School of Science, East China University of Technology, Nanchang Jiangxi

Received: Oct. 25th, 2024; accepted: Nov. 18th, 2024; published: Nov. 27th, 2024

Abstract

The boundedness of integral operator commutators with rough kernels on λ-central Morrey spaces and λ-central BMO function spaces has been studied by many authors. In this paper, the generalized commutators generated by fractional integral operators with rough kernels and the λ-central BMO function space are studied to be bounded on the λ-central Morrey space by using some classical theories and methods in the harmonic analysis such as Hölder's inequality and ring decomposition. The results in this paper extended some conclusions of Fu, Lin and Lu.

文章引用: 胡凰雲. 一类带有粗糙核的分数次积分广义交换子在 λ-中心 Morrey 空间上的有界性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 5017-5024. DOI: 10.12677/aam.2024.1311484

Keywords

λ-Central Morrey Space, λ-Central BMO Function, Commutator, Rough Kernel, Fractional Integral Operator

1. 引言

设 S^{n-1} 为 R^n 上的单位球面，带有通常的 Lebesgue 测度 $d\sigma = d\sigma(x')$。则具有粗糙核的分数次积分算子定义为

$$T_{\Omega,\alpha}(f)(x) := \int_{R^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $0<\alpha<n$，$\Omega \in L^s(S^{n-1})$，$1<s<\infty$，并且 Ω 在 R^n 上满足零阶齐次性。对于上述算子，文献[1] [2]研究了该分数次积分算子 $T_{\Omega,\alpha}$ 的相关性质。

设 $b \in BMO$，由具有粗糙核的分数次积分算子 $T_{\Omega,\alpha}$ 和函数 b 生成的交换子定义为：

$$\left[b, T_{\Omega,\alpha}\right] f(x) = b(x) T_{\Omega,\alpha} f(x) - T_{\Omega,\alpha}(bf)(x)。$$

2000 年，Alvarez 等人在文献[3]中提出 λ-中心有界平均震荡和 λ-中心 Morrey 空间，具体定义如下：

定义 1 令 $\lambda < 1/n$，$1<q<\infty$，则 λ-中心有界平均振荡空间 $CBMO^{q,\lambda}$ 定义为：

$$CBMO^{q,\lambda}(R^n) = \left\{ f \in L^q_{loc}(R^n) : \|f\|_{CBMO^{q,\lambda}} < \infty \right\},$$

其中 $\|f\|_{CBMO^{q,\lambda}} = \sup\limits_{R>0}\left(\frac{1}{|B(0,R)|^{1+q\lambda}} \int_{B(0,R)} \left| f(x) - f_{B(0,R)} \right|^q \mathrm{d}x \right)^{1/q}$，$f_{B(0,R)}$ 为 f 在 $B(0,R)$ 上的积分平均。

定义 2 令 $\lambda \in R$，$1<q<\infty$，则 λ-中心 Morrey 空间 $\dot{B}^{p,v}$ 定义为：

$$\dot{B}^{p,v}(R^n) = \left\{ f \in L^p_{loc}(R^n) : \|f\|_{\dot{B}^{p,v}} < \infty \right\},$$

其中 $\|f\|_{\dot{B}^{p,v}} = \sup\limits_{R>0}\left(\frac{1}{|B(0,R)|^{1+pv}} \int_{B(0,R)} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}$。

2002 年，Pérez 等人在文献[4]定义了奇异积分算子广义交换子，如下：

$$T_{\vec{b}}^m(f)(x) := p.v.\int_{R^n} K(x,y) \left[\prod_{j=1}^m b_j(x) - b_j(y) \right] f(y)\mathrm{d}y。$$

Tao 和 Shi 在文献[5]证明了上述积分算子广义交换子 $T_{\vec{b}}^m(f)(x)$ 在 λ-中心 Morrey 空间上的有界性。张和陶在文献[6]证明了带有粗糙核的奇异积分广义交换子 $T_{\Omega,\vec{b}}^m(f)(x)$ 的有界性。受上述启发，本文在 Pérez [4]中考虑的奇异积分算子广义交换子的基础上，定义了带粗糙核的分数次积分广义交换子，并讨论该交换子在 λ-中心 Morrey 空间上的有界性。

定义 3 令 $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$，$b_i \in CBMO^{s_i,\mu_i}(R^n)$，$i = 1,2,\cdots,m$。则带粗糙核的分数次积分广义交换子

定义为：

$$\left[\vec{b},T_{\Omega,\alpha}\right]f\left(x\right)=T_{\Omega,\alpha}^{\vec{b},m}\left(f\right)\left(x\right):=\int_{R^n}\frac{\Omega\left(x-y\right)}{\left|x-y\right|^{n-\alpha}}\prod_{j=1}^{m}\left[b_j\left(x\right)-b_j\left(y\right)\right]f\left(y\right)\mathrm{d}y\text{。}$$

本文的主要结果如下：

定理 1 令 $0<\alpha<n$，$\Omega\in L^s\left(S^{n-1}\right)$，$s>n/(n-\alpha)$，$1<p<n/\alpha$ 且 $1/q=\sum_{i=1}^{m}1/s_i+1/p-\alpha/n<1$，$\lambda=\sum_{i=1}^{m}\mu_i+v+\alpha/n<0$。如果 $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，其中 $b_i\in CBMO^{s_i,\mu_i}$，$1<s_i<\infty$，$0<\mu_i<1/n$，$i=1,\cdots,m$。并且上述指标满足 $\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}\le\frac{1}{p}$，$v<-\sum_{i=1}^{m}\mu_i-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{s}$ 和 $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s_i}\le\frac{1}{p'}$。则对任意 $f\in\dot{B}^{p,v}$，有：

$$\left\|\left[\vec{b},T_{\Omega,\alpha}\right]f\right\|_{\dot{B}^{q,\lambda}}\le C\prod_{i=1}^{m}\left\|b_i\right\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\left\|f\right\|_{\dot{B}^{p,v}}\text{。}$$

2. 主要结果的证明

引理 1 [2] 令 $0<\alpha<n$，$1<p<n/\alpha$ 且 $1/q=1/p-\alpha/n$。若 $\Omega\in L^s\left(S^{n-1}\right)$，$s>n/(n-\alpha)$，则

$$\left\|T_{\Omega,\alpha}f\right\|_{L^q}\le C\left\|f\right\|_{L^p}\text{。}$$

证明 不失一般性，我们仅考虑 $m=2$ 的情形，对于 $m>2$ 的情形可以类似推出。

固定常数 R，定义 $B=B(0,R)$ 以及 $2^{k+1}B=B\left(0,2^{k+1}R\right)$。对任意 $x\in B$，将交换子分解如下：

$$\begin{aligned}\left[\vec{b},T_{\Omega,\alpha}\right]^2(f)(x)=&\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]\left[b_2(x)-(b_2)_B\right]T_{\Omega,\alpha}(f)(x)\\&-\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)f\right)(x)\\&-\left[b_2(x)-(b_2)_B\right]T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_1(x)-(b_1)_B\right)f\right)(x)\\&+T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_1(x)-(b_1)_B\right)\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)f\right)(x),\end{aligned}$$

其中 $(b_1)_B,(b_2)_B$ 为 $b_1(x),b_2(x)$ 在 B 上的积分平均。

则有：

$$\begin{aligned}\left(\int_B\left|\left[\vec{b},T_{\Omega,\alpha}\right]^2(f)(x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\le&\left(\int_B\left|\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]\left[b_2(x)-(b_2)_B\right]T_{\Omega,\alpha}(f)(x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&-\left(\int_B\left|\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)f\right)(x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&-\left(\int_B\left|\left[b_2(x)-(b_2)_B\right]T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_1(x)-(b_1)_B\right)f\right)(x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&+\left(\int_B\left|T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_1(x)-(b_1)_B\right)\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)f\right)(x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\=&\mathrm{I}_1(x)+\mathrm{I}_2(x)+\mathrm{I}_3(x)+\mathrm{I}_4(x).\end{aligned}$$

记 $f=f\chi_{2B}+f\chi_{(2B)^C}=f_1+f_2$，其中 χ_{2B} 为 $2B$ 上的特征函数。下面分别估计 I_1、I_2、I_3 以及 I_4。

1) I_1 部分

首先由 f 的分解得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1(x) &\le \left(\int_B \left|\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]\left[b_2(x)-(b_2)_B\right]T_{\Omega,\alpha}(f_1)(x)\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_B \left|\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]\left[b_2(x)-(b_2)_B\right]T_{\Omega,\alpha}(f_2)(x)\right|^q \mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{12}.
\end{aligned}$$

对于 I_{11}，令 $\frac{1}{t}=\frac{1}{q}-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$，由 Hölder 不等式及 $T_{\Omega,\alpha}$ 从 L^p 到 L^t 的有界性可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{11} &\le \left(\int_B \left(b_1(x)-(b_1)_B\right)^{s_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\int_B \left(b_2(x)-(b_2)_B\right)^{s_2} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_2}} \left(\int_B \left|T_{\Omega,\alpha}(f_1)(x)\right|^t \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}} \\
&\le C|B|^{\frac{1}{s_1}+\mu_1+\frac{1}{s_2}+\mu_2} \prod_{i=1}^{2} \|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}} \left(\int_{2B} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}} \prod_{i=1}^{2} \|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}} \|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}.
\end{aligned}$$

对于 I_{12}，由 $\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}\le\frac{1}{p}$，可得 $\frac{1}{q}-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s}>0$，由 Minkowski 不等式，Hölder 不等式以及 $\nu<-\sum_{i=1}^{m}\mu_i-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{s}<-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{s}$，我们有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{12} &\le \left(\int_B \left|\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]\left[b_2(x)-(b_2)_B\right]T_{\Omega,\alpha}(f_2)(x)\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left(\int_B \left|\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]\left[b_2(x)-(b_2)_B\right]\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^k B} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y)\mathrm{d}y\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty} \left|2^k B\right|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{2^{k+1}B} \left(\int_B |\Omega(x-y)|^q \left|b_1(x)-(b_1)_B\right|^q \left|b_2(x)-(b_2)_B\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} f(y)\mathrm{d}y \\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty} \left|2^k B\right|^{\frac{\alpha}{n}-1} \left(\int_B \left|b_1(x)-(b_1)_B\right|^{s_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\int_B \left|b_2(x)-(b_2)_B\right|^{s_2} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_2}} |B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s}} \\
&\quad \int_{2^{k+1}B} \left(\int_B |\Omega(x-y)|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} |f(y)|\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由 $x\in B$，$y\in 2^{k+1}B$ 可得 $x-y\in 2^{k+2}B$，又 $\Omega\in L^s\left(S^{n-1}\right)$，从而有：

$$\begin{aligned}
\left(\int_B |\Omega(x-y)|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\int_{2^{k+2}B} |\Omega(z)|^s \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \left(\int_0^{2^{k+1}R}\int_{S^{n-1}} |\Omega(z')|^s \mathrm{d}\sigma(z') r^{n-1}\mathrm{d}r\right)^{1/s} \\
&= C\left|2^{k+1}B\right|^{1/s} \|\Omega\|_{L^s(S^{n-1})} \le C\left|2^k B\right|^{1/s}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

由 Hölder 不等式可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{12} &\le C|B|^{\frac{1}{q}+\mu_1+\mu_2-\frac{1}{s}} \prod_{i=1}^{2} \|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}} \sum_{k=1}^{\infty} \left|2^k B\right|^{\frac{\alpha}{n}-1} \left|2^k B\right|^{\frac{1}{s}} \left(\int_{2^{k+1}B} |f(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \left|2^{k+1}B\right|^{1-\frac{1}{p}} \\
&\le C|B|^{\frac{1}{q}+\mu_1+\mu_2-\frac{1}{s}} \sum_{k=1}^{\infty} \left|2^k B\right|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}+\nu} \prod_{i=1}^{2} \|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}} \|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}} \\
&\le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}} \prod_{i=1}^{2} \|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}} \|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}.
\end{aligned}$$

综上可得 $\mathrm{I}_1 \le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}$。

2) I_2 部分

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2 &\le \left(\int_B\left|\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)f_1\right)(x)\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&\quad+\left(\int_B\left|\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)f_2\right)(x)\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\mathrm{I}_{21}+\mathrm{I}_{22}.\end{aligned}$$

对于 I_{21}，令 $\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{p_2}-\frac{\alpha}{n}$，由 $1/q=\sum_{i=1}^{m}1/s_i+1/p-\alpha/n<1$，可得 $\frac{1}{p_2}=\frac{1}{s_2}+\frac{1}{p}$，则 $1<p_2<\frac{n}{\alpha}$。通过 Hölder 不等式以及 $T_{\Omega,\alpha}$ 从 L^{p_2} 到 L^{q_2} 的有界性，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{21} &\le \left(\int_B\left(b_1(x)-(b_1)_B\right)^{s_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_1}}\left(\int_B\left|T_{\Omega,\alpha}\left(\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)f_1\right)(x)\right|^{q_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_2}}\\&\le C|B|^{\frac{1}{s_1}+\mu_1}\|b_1\|_{CBMO^{s_1,\mu_1}}\left(\int_B\left|\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)f_1(x)\right|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_2}}\\&\le C|B|^{\frac{1}{s_1}+\mu_1}\|b_1\|_{CBMO^{s_1,\mu_1}}\left(\int_B\left|b_2(x)-(b_2)_B\right|^{s_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_2}}\left(\int_{2B}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}.\end{aligned}$$

对于 I_{22}，由 $\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}\le\frac{1}{p}$，$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s_i}\le\frac{1}{p'}$，可得 $\frac{1}{q}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s_1}>0$，$1-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{p}>0$。又 $\nu<-\sum_{i=1}^{m}\mu_i-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{s}<-\mu_1-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{s}$，通过 Minkowski 不等式，(2.1)和 Hölder 不等式可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{22} &\le C\left(\int_B\left|\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\left[b_2(y)-(b_2)_B\right]f(y)\mathrm{d}y\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{2^{k+1}B}\left(\int_B|\Omega(x-y)|^q\left|b_1(x)-(b_1)_B\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(b_2(y)-(b_2)_B\right)f(y)\mathrm{d}y\\&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\left(\int_B\left|b_1(x)-(b_1)_B\right|^{s_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_1}}|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}}\times\int_{2^{k+1}B}\left(\int_B|\Omega(x-y)|^s\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)f(y)\mathrm{d}y\\&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{\frac{\alpha}{n}-1+\frac{1}{s}}|B|^{\frac{1}{q}+\mu_1-\frac{1}{s}}\|b_1\|_{CBMO^{s_1,\mu_1}}\left(\int_B\left|b_2(y)-(b_2)_B\right|^{s_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_2}}\times\left(\int_{2^{k+1}B}|f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left|2^{k+1}B\right|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{s_2}}\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}+\mu_2+\nu}|B|^{\frac{1}{q}+\mu_1-\frac{1}{s}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}\\&\le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}.\end{aligned}$$

综上可得 $\mathrm{I}_2 \le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}$。

3) I_3 部分

由于 I_3 部分和 I_2 部分是对称的，因此类似于 I_2 的证明方法可得：

$$\mathrm{I}_3 \le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}} \prod_{i=1}^{2} \|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}} \|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}} 。$$

4) I_4 部分

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_4(x) &\le \left(\int_B \left|T_{\Omega,\alpha}\left(\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]\left[b_2(x)-(b_2)_B\right] f_1\right)(x)\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_B \left|T_{\Omega,\alpha}\left(\left[b_1(x)-(b_1)_B\right]\left[b_2(x)-(b_2)_B\right] f_2\right)(x)\right|^q \mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{I}_{41}+\mathrm{I}_{42}.\end{aligned}$$

对于 I_{41}，令 $\frac{1}{q_1}=\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{p}$，有 $1<q_1<\frac{n}{\alpha}$。由 $T_{\Omega,\alpha}$ 从 L^{q_1} 到 L^q 的有界及 Hölder 不等式，得：

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{41} &\le \left(\int_B \left|\left(b_1(x)-(b_1)_B\right)\left(\left(b_2(x)-(b_2)_B\right) f_1\right)(x)\right|^{q_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\le C\left(\int_B \left|b_1(x)-(b_1)_B\right|^{s_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\int_B \left|b_2(x)-(b_2)_B\right|^{s_2} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s_2}} \left(\int_{2B} \left|f(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}} \prod_{i=1}^{2} \|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}} \|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}.\end{aligned}$$

对于 I_{42}，由 $\frac{1}{q}-\frac{1}{s}>0$，$1-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}-\frac{1}{p}>0$ 又 $v<-\sum_{i=1}^{2}\mu_i-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{s}$，通过 Minkowski 不等式，(2.1)和 Hölder 不等式可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{42} &\le \left(\int_B \left|T_{\Omega,\alpha}\left(b_1(x)-(b_1)_B\right)\left(b_2(x)-(b_2)_B\right)\left(f_2\right)(x)\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \left(\int_B \left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\left(b_1(y)-(b_1)_B\right)\left(b_2(y)-(b_2)_B\right) f(y)\mathrm{d}y\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^k B\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{2^{k+1}B}\left(\int_B \left|\Omega(x-y)\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(b_1(y)-(b_1)_B\right)\left(b_2(y)-(b_2)_B\right) f(y)\mathrm{d}y \\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^k B\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{2^{k+1}B}\left(\int_B \left|\Omega(x-y)\right|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\left(b_1(y)-(b_1)_B\right)\left(b_2(y)-(b_2)_B\right) f(y)\mathrm{d}y \\ &\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^k B\right|^{\frac{\alpha}{n}-1+\frac{1}{s}}|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\left(\int_{2^{k+1}B}\left|b_1(y)-(b_1)_B\right|^{s_1}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s_1}}\left(\int_{2^{k+1}B}\left|b_2(y)-(b_2)_B\right|^{s_2}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s_2}} \\ &\quad \times\left(\int_{2^{k+1}B}\left|f(y)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left|2^{k+1}B\right|^{1-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}-\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\left|b_{2^{k+1}B}-b_B\right| &\le \sum_{j=0}^{k}\left|b_{2^{k+1}B}-b_{2^j B}\right| \le C\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{\left|2^{j+1}B\right|}\int_{2^{j+1}B}\left|b(y)-b_{2^{j+1}B}\right|^{s_1}\mathrm{d}y\right)^{1/s_1} \\ &\le C\sum_{j=0}^{k}2^{(j+1)n\mu_1}|B|^{\mu_1}\|b\|_{CBMO^{s_1,\mu_1}} \le C\left|2^{k+1}B\right|^{\mu_1}\|b\|_{CBMO^{s_1,\mu_1}},\end{aligned}$$

有：

$$\left(\int_{2^{k+1}B}\left|b_1(y)-(b_1)_B\right|^{s_1}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s_1}}$$
$$\le\left(\int_{2^{k+1}B}\left|b_1(y)-(b_1)_{2^{k+1}B}\right|^{s_1}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s_1}}+\left|(b_1)_{2^{k+1}B}-(b_1)_B\right|\left|2^{k+1}B\right|^{\frac{1}{s_1}}$$
$$\le C\left|2^{k+1}B\right|^{\frac{1}{s_1}+\mu_1}\left\|b_1\right\|_{CBMO^{s_1,\mu_1}}.$$

所以

$$\mathrm{I}_{42}\le C|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\prod_{i=1}^{2}\left\|b_i\right\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|2^kB\right|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{s}+\mu_1+\mu_2}\|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}$$
$$\le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\left\|b_i\right\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}.$$

综合可得 $\mathrm{I}_4\le C|B|^{\lambda+\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\left\|b_i\right\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}}$。

综合 $\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2,\mathrm{I}_3,\mathrm{I}_4$，再对所有的球 B 取上确界可得：

$$\left\|\left[\vec{b},T_{\Omega,\alpha}\right]^2 f\right\|_{\dot{B}^{q,\lambda}}\le C\prod_{i=1}^{2}\left\|b_i\right\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{\dot{B}^{p,\nu}},$$

证毕。

3. 结论

λ-中心 Morrey 空间和 λ-中心 BMO 空间引起了数学工作者的极大兴趣，并且也是调和分析领域的重要空间。关于此类空间的研究及其积分算子交换子在这些空间中的有界性，可以参见[3] [5]-[7]。与此同时，积分算子广义交换子是经典交换子的推广，文献[4]对此类广义交换子做了深入研究并且得到了一些有意义的结果。本文通过对由带有粗糙核的分数次积分算子和 λ-中心 BMO 函数空间生成的广义交换子进行环分解，利用 Hölder 不等式，以及带有粗糙核的分数次积分算子 $T_{\Omega,\alpha}$ 的有界性和 Minkowski 不等式，可得出带有粗糙核的分数次积分广义交换子在 λ-中心 Morrey 空间上的 λ-中心 BMO 估计。其中，本文中的主要结果是在 Fu、Lu 和 Lin [7]，得出具有粗糙核的分数次积分算子在中心 Morrey 空间上的有界性以及交换子 $\left[b,T_{\Omega,\alpha}\right]$ 在 λ-中心 Morrey 空间上的有界性的基础上进行推广，从而得出带有粗糙核的分数次积分广义交换子在 λ-中心 Morrey 空间上的有界性。本文对研究 λ-中心 Morrey 空间和 λ-中心 BMO 函数空间具有重要意义。

参考文献

[1] Ding, Y. and Lu, S. (1998) Weighted Norm Inequalities for Fractional Integral Operators with Rough Kernel. *Canadian Journal of Mathematics*, **50**, 29-39. https://doi.org/10.4153/cjm-1998-003-1

[2] Lu, S., Ding, Y. and Yan, D. (2007) Singular Integrals and Related Topics. World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789812770561

[3] Alvarez, J., Lakey, J. and Guzmán-Partida, M. (2000) Spaces of Bounded Lambda-Central Mean Oscillation, Morrey Spaces, and Lambda-Central Carleson Measures. *Collectanea Mathematica*, **51**, 1-47.

[4] Pérez, C. and Trujillo-González, R. (2002) Sharp Weighted Estimates for Multilinear Commutators. *Journal of the London Mathematical Society*, **65**, 672-692. https://doi.org/10.1112/s0024610702003174

[5] Tao, X.X. and Shi, Y.L. (2011) Multilinear Commutators of Calderón-Zygmund Operator on λ-Central Morrey Spaces. *Advances in Mathematics*, **40**, 47-59.

[6] 张慧慧, 陶祥兴. 一类带粗糙核的多线性奇异积分交换子的CBMO估计[J]. 浙江科技学院学报, 2011, 23(4): 257-261+270.

[7] Fu, Z.W., Lin, Y. and Lu, S.Z. (2008) λ-Central BMO Estimates for Commutators of Singular Integral Operators with Rough Kernels. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **24**, 373-386. https://doi.org/10.1007/s10114-007-1020-y