Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(11), 4742-4747
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311455

Hans汉斯

点到空间直线的距离求法研究

魏雨欣，郑　惠

阿坝师范学院数学学院，四川 汶川

收稿日期：2024年10月1日；录用日期：2024年10月25日；发布日期：2024年11月4日

摘　要

本文利用点到点的距离、点到平面的距离、平面束等方法给出点到空间直线距离的多种求法，减少了化直线一般方程为标准方程的繁琐环节。对教师提供了解析几何的研究领域，培养了学生的创新意识和创新能力。

关键词

解析几何，一般方程，点到直线的距离

Study on the Method of Calculating the Distance from a Point to a Straight Line in Space

Yuxin Wei, Hui Zheng

School of Mathematics, Aba Teachers University, Wenchuan Sichuan

Received: Oct. 1st, 2024; accepted: Oct. 25th, 2024; published: Nov. 4th, 2024

Abstract

In this paper, by using the methods of distance from point to point, distance from point to plane, plane beam, etc., various methods of calculating distance from point to space line are given. It reduces the tedious process of converting the general equation of a straight line into a standard equation, provides the teachers with the research field of analytic geometry, and cultivates the students' innovative consciousness and ability.

Keywords

Analytic Geometry, General Equation, Distance from a Point to a Straight

文章引用: 魏雨欣, 郑惠. 点到空间直线的距离求法研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 4742-4747.
DOI: 10.12677/aam.2024.1311455

1. 引言

点到直线的距离是解析几何的重要内容[1]，很多学者对其进行了研究[2]-[8]，但是大部分研究局限于平面解析几何，对点到空间直线的距离研究较少。教材[1]中给出了在已知直线标准方程的情况下，如何求点到空间直线的距离，即利用向量积的几何意义和等面积求解。当直线 l 方程是一般方程时，如何求解点到空间直线的距离，给读者留下了巨大的思索空间。本文将利用点到点的距离、点到平面的距离、平面束等方法给出点到直线的距离公式，减少化直线一般方程为标准方程的繁琐环节。

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{1}$$

2. 定理及证明

定理 1 已知一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，直线 l 的方程为(1)式，则点 P 到直线 l 的距离为

$$d=\sqrt{\left(\frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ D & B & C \end{vmatrix}}{W}-x_0\right)^2+\left(\frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A & D & C \end{vmatrix}}{W}-y_0\right)^2+\left(\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A & B & D \end{vmatrix}}{W}-z_0\right)^2}, \tag{2}$$

其中 $A=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$，$B=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$，$C=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$，$W=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}$。

证明 设 $A=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$，$B=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$，$C=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$，由于直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)=(A,B,C)$，则垂直于直线 l 且过点 P 的平面的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。故 π 与 l 的交点 $M(x_1,y_1,z_1)$ 满足方程

$$\begin{cases} A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1=0 \\ A_2x_1+B_2Y+C_2z_1+D_2=0 \\ Ax_1+By_1+Cz_1=Ax_0+By_0+Cz_0 \end{cases}.$$

设 $W=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}$，因为 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 不共线，所以 $W\neq 0$。由克拉默法则解得

$$x_1=\frac{D_1}{W},\quad y_1=\frac{D_2}{W},\quad z_1=\frac{D_3}{W},$$

其中 $D=Ax_0+By_0+Cz_0$，

$$D_1=\begin{vmatrix}-D_1 & B_1 & C_1\\ -D_2 & B_2 & C_2\\ D & B & C\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}A_1 & -D_1 & C_1\\ A_2 & -D_2 & C_2\\ A & D & C\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & -D_1\\ A_2 & B_2 & -D_2\\ A & B & D\end{vmatrix}。$$

故点 P 到直线 l 的距离为点 P 到 M 的距离 $|PM|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$，即得(2)式。证毕。

定理 2 已知一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，直线 l 的方程为(1)式，则点 P 到直线 l 的距离为

$$d=\sqrt{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2+(z'-z_0)^2+(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2+(z'-z_1)^2}. \tag{3}$$

其中 $x_1=\dfrac{W_1}{W}$，$y_1=\dfrac{W_2}{W}$，$z_1=\dfrac{W_3}{W}$，$D=Ax_0+By_0+Cz_0$，且

$$\begin{aligned}x'&=x_0-\frac{A_2(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)}{A_2^2+B_2^2+C_2^2}\\ y'&=y_0-\frac{B_2(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)}{A_2^2+B_2^2+C_2^2}\\ z'&=z_0-\frac{C_2(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)}{A_2^2+B_2^2+C_2^2}\end{aligned} \tag{4}$$

$$W_1=\begin{vmatrix}-D_1 & B_1 & C_1\\ -D_2 & B_2 & C_2\\ D & B & C\end{vmatrix},W_2=\begin{vmatrix}A_1 & -D_1 & C_1\\ A_2 & -D_2 & C_2\\ A & D & C\end{vmatrix},W_3=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & -D_1\\ A_2 & B_2 & -D_2\\ A & B & D\end{vmatrix},W=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A & B & C\end{vmatrix}. \tag{5}$$

证明 过点 P 作平面 π_2 的垂线，设垂足为 $N(x',y',z')$ 点，再过点 N 作直线 l 的垂线，设垂足为 Q 点，则点 P 到直线 l 的距离为 $|NQ|$。

因为直线 PN 的方向向量为 $\boldsymbol{n}_2(A_2,B_2,C_2)$，所以其坐标式参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+tA_2\\ y=y_0+tB_2\\ z=z_0+tC_2\end{cases}. \tag{6}$$

将(5)式带入 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 解得点 N 的坐标，即为(4)式。又因为点 Q 在直线 l 上，且 NQ 垂直于 π_2，所以有

$$\begin{cases}A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1=0\\ A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2=0\\ A_2(x_1-x')+B_2(y_1-y')+C_2(z_1-z')=0\end{cases} \tag{7}$$

由(7)式解得点 Q 的坐标

$$x_1=\frac{W_1}{W},\quad y_1=\frac{W_2}{W},\quad z_1=\frac{W_3}{W}。$$

其中 W_1,W_2,W_3,W 满足(5)式。又因为 $d=|PQ|=\sqrt{|PN|^2+|NQ|^2}$，将(4)式、(6)式代入(7)得(3)式。证毕。

定理 3 已知一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，直线 l 的方程为(1)式，则点 P 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{|A'x_0+B'y_0+C'y_0+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}. \tag{8}$$

其中

$$A=\begin{vmatrix}B_1 & A_1\\ B_2 & A_2\end{vmatrix}y_0+\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}z_0+\begin{vmatrix}D_1 & A_1\\ D_2 & A_2\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}x_0+\begin{vmatrix}C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix}z_0+\begin{vmatrix}D_1 & B_1\\ D_2 & B_2\end{vmatrix},$$
$$C=\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}x_0+\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}y_0+\begin{vmatrix}D_1 & C_1\\ D_2 & C_2\end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix}A_1 & D_1\\ A_2 & D_2\end{vmatrix}x_0+\begin{vmatrix}B_1 & D_1\\ B_2 & D_2\end{vmatrix}y_0+\begin{vmatrix}C_1 & D_1\\ C_2 & D_2\end{vmatrix}z_0. \tag{9}$$

$$A'=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}B+\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}C,\quad B'=\begin{vmatrix}B_1 & A_1\\ B_2 & A_2\end{vmatrix}A+\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}C,$$
$$C'=\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}A+\begin{vmatrix}C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix}B,\quad D'=\begin{vmatrix}D_1 & A_1\\ D_2 & A_2\end{vmatrix}A+\begin{vmatrix}D_1 & B_1\\ D_2 & B_2\end{vmatrix}B+\begin{vmatrix}D_1 & C_1\\ D_2 & C_2\end{vmatrix}C. \tag{10}$$

证明 设过点 P 与直线 l 的平面为 ω_1，过直线 l 且垂直于平面 ω_1 的平面为 ω_2，由于点 P 到直线 l 的距离 d 可以转化为点 P 到平面 ω_2 的距离。下面利用平面束求 ω_1、ω_2 的方程。设以直线 l 为中心的平面束为

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0,$$

其中 λ，μ 为参数。

因为点 P $P(x_0,y_0,z_0)$ 在平面 ω_1 上，所以 $\lambda:\ \mu=-\dfrac{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2}{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1}$，故平面 ω_1 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$ 其中 A，B，C，D 满足(9)式。

又因为平面 ω_1 垂直于平面 ω_2，可得平面 ω_2 的方程为 $A'x+B'y+C'z+D'=0$，其中 A',B',C',D' 满足(10)式，则 $d=\dfrac{|A'x_0+B'y_0+C'y_0+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$。证毕。

定理 4 已知一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，直线 l 的方程为(1)式，则点 P 到直线 l 的距离为

$$d=\sqrt{\frac{d_1^{\,2}(1-\cos^2\theta)+(d_2-d_1\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}. \tag{11}$$

其中

$$d_1=\frac{|A_1X_0+B_1Y_0+C_1Z_0+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad d_2=\frac{|A_2X_0+B_2Y_0+C_2Z_0+D_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \tag{12}$$

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{13}$$

证明 过点 P 分别作平面 π_1、π_2 的垂线，其垂足为点 M 与点 N。设点 P 到平面 π_1、π_2 的距离分别为 $d_1=|PM|$，$d_2=|PN|$，π_1、π_2 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\ \ |\boldsymbol{n}_2|}$，其中 d_1，d_2，θ 分别满足(12)式、(13)式。又因为

$$d=\frac{d_1}{\cos\theta}=\frac{d_2}{\cos(\theta-\varphi)}, \tag{14}$$

所以

$$\frac{d_1}{\cos\varphi}=\frac{d_2}{\cos\theta\cos\varphi+\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{1-\cos^2\varphi}},$$

可得 $\cos\varphi=\dfrac{d_1\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\sqrt{d_1^{\,2}(1-\cos^2\theta)+(d_2-d_1\cos\theta)^2}}$，代入(14)式即得(13)式。证毕。

3. 应用

下面利用定理 1~定理 4 以及文献[1]的方法求解点到直线的距离。

例 已知点 $P(1,1,2)$，直线 l 的方程为：$\begin{cases} x+2y+z+1=0 \\ 3x+y+z+2=0 \end{cases}$，求点 P 到直线 l 的距离。

方法一 利用定理 1，其中 $A=1$，$B=2$，$C=-5$，$W=30$，$D=-7$，代入(2)式，得点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{\sqrt{170}}{5}$。

方法二 利用定理 2，其中 $x'=-\dfrac{13}{11}$，$y'=\dfrac{3}{11}$，$z'=\dfrac{14}{11}$，代入(3)式，得点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{\sqrt{170}}{5}$。

方法三 利用定理 3，其中 $A=10$，$B=-10$，$C=-2$，$D=4$，$A'=54$，$B'=48$，$C'=30$，$D'=42$，代入(8)式，得点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{\sqrt{170}}{5}$。

方法四 利用定理 4，其中 $d_1=\sqrt{6}$，$d_2=\dfrac{8}{\sqrt{11}}$，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{6}{11}}$，代入(11)式，得点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{\sqrt{170}}{5}$。

方法五 利用文献[1]的方法，将直线的一般方程转化为标准方程，其中 l 的方向向量为 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(1,2,-5)$，令 $x=0$，则 $y=1$，$z=-3$，则 l 的标准方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{-5}$，再利用点到直线的距离公式 $d=\dfrac{\left|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}$，可得距离 $d=\dfrac{\sqrt{170}}{5}$。

4. 结束语

本文利用点到点的距离、点到平面的距离、平面束等方法给出点到直线的距离的多种求法，减少了化直线一般方程为标准方程的繁琐环节。首先，从教学研究的角度来看，该类一题多解的题型为教师提供了丰富的教学研究领域，教师可以通过深入研究不同解题方法的适用性、效果以及对学生学习的影响，进而不断改进自己的教学方法和策略。这种研究是基于课堂观察、学生反馈、教学实验等多种形式，有助于提高教学效果和质量。其次，解析几何的一题多解教学方法也为课程思政提供了重要的载体。通过让学生从不同的角度去思考和解决问题，可以培养学生的空间想象能力和创新思维。学生在解决问题时需要不断地思考、尝试新的方法，这有助于培养他们的创新意识和创新能力。通过引导学生探讨不同解法的优缺点、进行思维碰撞和交流，能够激发学生的学习兴趣，增加学习的趣味性和吸引力，提高了学习的积极性和主动性。总之，一题多解不仅对解析几何教学与研究有重要作用，还能推动教学改革与创新、学科研究与交流，可以进一步提升这种教学方法在解析几何领域的影响力和应用程度，为学生的数学学习和教育教学的发展做出积极贡献。

基金项目

阿坝师范学院质量工程项目(20210405002, 20220410003, 202401003, 20242001171)。

参考文献

[1] 吕林根，许子道. 解析几何[M]. 第 5 版. 北京：高等教育出版社, 2019.

[2] 唐明坤，刘远桃，张涛. 点到直线的距离公式的探讨——基于初等数学和高等数学两个视角[J]. 数学之友, 2022, 36(8): 52-54.

[3] 桂弢. 点到直线距离公式的研究性学习成果[J]. 数学通报, 2018, 57(1): 47-49+56.

[4] 石明. 点到直线的距离公式的探求及应用[J]. 黔南民族师范学院学报, 2002(3): 56-59.

[5] 王凯. 基于“两个过程”合理性理念的解析几何教学设计——以“点到直线的距离”为例[J]. 中国数学教育, 2022(20): 33-37.

[6] 魏禄侠. 从“点到直线的距离公式”的巧妙推导谈起[J]. 考试周刊, 2018(49): 93.

[7] 邓南昌. 与点有关的距离计算[J]. 数学学习与研究, 2012(8): 120.

[8] 李桂珍, 王全牢. 点到直线距离公式的多种推导方法[J]. 集宁师专学报, 2000(4): 93-94.