

具有一般非线性的广义Boussinesq方程的概周期解

汪 崧

南京航空航天大学数学学院, 江苏 南京

收稿日期: 2024年10月27日; 录用日期: 2024年11月21日; 发布日期: 2024年11月28日

摘 要

本文考虑了一类在铰接边界条件下具有一般非线性的广义Boussinesq方程。利用无限维KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 理论, 我们证明了在足够小的扰动下, 这类方程存在无限多个小振幅、实解析且线性稳定的概周期解。

关键词

概周期解, 广义Boussinesq方程, KAM

Almost Periodic Solutions of the Generalized Boussinesq Equations with General Nonlinearities

Song Wang

School of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

Received: Oct. 27th, 2024; accepted: Nov. 21st, 2024; published: Nov. 28th, 2024

Abstract

This paper considers a class of generalized Boussinesq equations with general nonlinearities under hinged boundary conditions. Using infinite-dimensional KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) theory, we prove that for sufficiently small perturbations, the equations admit infinitely many of small amplitude, real analytic and linearly stable almost periodic solutions.

Keywords

Almost Periodic Solution, Generalized Boussinesq Equation, KAM

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

考虑在铰接边界条件下的广义 Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + (u_{xx} - M_\xi u + f(u))_{xx} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, \pi], \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, \quad (2)$$

其中 M_ξ 是一个实 Fourier 乘子, 其定义为

$$M_\xi \sin(nx) = \xi_n \sin(nx), \quad \xi_n \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

非线性项为 $f(u) = (2p+2)u^{2p+1}$, p 是一个正整数。本文利用无限维 KAM 理论证明这类方程小振幅实解析概周期解的存在性与线性稳定性。

Boussinesq 型方程是描述浅水长波传播的一类重要数学物理方程, 后被推广至包含各种非线性效应和高阶项的广义 Boussinesq 方程(1)。这类方程在描述更广泛的物理现象方面发挥着关键作用, 如地震波传播、光纤中的脉冲传导以及等离子体波动等。

广义 Boussinesq 方程(1)具有 Hamilton 结构。Shi 等人在一系列论文[1]-[5]中, 运用 KAM 理论证明了具有不同非线性项的广义 Boussinesq 方程拟周期解的存在性及其线性稳定性。Wang、Lou 和 Si [6]则进一步获得了这类方程的拟周期 KAM 环面的非线性稳定性结果。

尽管广义 Boussinesq 方程的拟周期问题已得到广泛研究, 其概周期问题却尚未得到充分探讨。Pöschel [7]和 Bourgain [8]首先独立利用 KAM 理论研究了非线性 Schrödinger 方程的概周期解问题。此后, 关于非线性 Schrödinger 方程和波动方程这两类经典 Hamilton 偏微分方程的概周期解问题已得到了深入而广泛的研究, 请参考文献[9]-[16]。这一研究现状促使我们着手探讨广义 Boussinesq 方程概周期解的存在性和线性稳定性。我们的主要结果如下:

定理 1.1 考虑在铰接边界条件(2)下的一维广义 Boussinesq 方程(1), 存在一个类 Cantor 集 $B^* \subset B := [0, 1]^{\mathbb{N}}$, 使得对任意 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots) \in B^*$, 方程(1)存在一个小振幅、实解析且线性稳定的概周期解, 其形式为

$$u(t, x) = \sum_{j \geq 1} U_j(\omega t) \sin(jx)$$

其中, $U_j: \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ 是解析函数, 且当 $j \rightarrow +\infty$ 时以超指数衰减。频率 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots)$ 构成一个可数无穷序列的非共振频率, 这些频率接近于未扰动频率 $(j^2 + 1 + \xi_j)_{j \geq 1}$ 。

注 1.1 可以证明集合 B^* 的 Lebesgue 测度是正的。然而, 由于证明过程较为复杂, 且受限于本文篇幅, 我们无法在此详细展示。读者可参考文献[12]中的证明。

2. 预备知识

令 $a \geq 0, \rho > 0$, J 是一个正整数。我们考虑以下无限维相空间

$$\mathcal{P}^{a,\rho} = \mathbb{T}^J \times \mathbb{R}^J \times \ell^{a,\rho} \times \ell^{a,\rho}$$

其中 $\mathbb{T}^J = \mathbb{R}^J / (2\pi\mathbb{Z}^J)$ 。空间 $\ell^{a,\rho}$ 是由以下加权范数定义的复 Banach 空间: 对于 $z = (z_j)_{j \in \mathbb{N}}$,

$$\|z\|_{a,\rho} = \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{\rho j} j^a |z_j| < +\infty.$$

上述相空间的复化记作 $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{a,\rho} = \mathbb{C}^J \times \mathbb{C}^J \times \ell^{a,\rho} \times \ell^{a,\rho}$ 。对于 $s, r > 0$, 我们引入邻域

$$D(s, r) = \{(x, y, z, \bar{z}) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{a,\rho} : |\operatorname{Im} x| < s, |y| < r^2, \|z\|_{a,\rho} < r, \|\bar{z}\|_{a,\rho} < r\}.$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{C}^J$ 中向量的上确界范数。

设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^J$ 中具有正 Lebesgue 测度的紧集。在下文中, 任何函数关于 $\xi \in \mathcal{O}$ 的导数均以 Whitney 意义下理解。

对于定义在 $D(s, r) \times \mathcal{O}$ 上的函数 $F(x, y, z, \bar{z}; \xi) = \sum_{\alpha, \beta} F_{\alpha\beta}(x, y; \xi) z^\alpha \bar{z}^\beta$, 其中

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^J, l \in \mathbb{N}^J} F_{kl\alpha\beta}(\xi) y^l e^{i\langle k, \theta \rangle} \quad (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ 为标准内积记号})$$

$$\|F\|_{D(s,r),\mathcal{O}} \equiv \sup_{\|z\|_{a,\rho} < r, \|\bar{z}\|_{a,\rho} < r} \sum_{\alpha, \beta} \|F_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{O}} |z^\alpha| |\bar{z}^\beta|,$$

这里

$$\|F_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{O}} \equiv \sum_{k,l} |F_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}} r^{2|l|} e^{k|s|}, \quad |F_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}} = \sup_{\xi \in \mathcal{O}} \left(|F_{kl\alpha\beta}| + \left| \frac{\partial F_{kl\alpha\beta}}{\partial \xi} \right| \right).$$

对于定义在 $D(s, r) \times \mathcal{O}$ 上的函数 F , 与之对应的 Hamilton 向量场记为

$$X_F = (F_y, -F_x, \{iF_{z_n}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{-iF_{\bar{z}_n}\}_{n \in \mathbb{N}}).$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 。其加权范数定义为

$$\|X_F\|_{D(s,r),\mathcal{O}} = \|F_y\|_{D(s,r),\mathcal{O}} + \frac{1}{r^2} \|F_x\|_{D(s,r),\mathcal{O}} + \frac{1}{r} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n^a e^{n\rho} \|F_{z_n}\|_{D(s,r),\mathcal{O}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} n^a e^{n\rho} \|F_{\bar{z}_n}\|_{D(s,r),\mathcal{O}} \right).$$

3. 广义 Boussinesq 方程的 Hamilton 形式

设 $u_t = v_x$, 我们可以将广义 Boussinesq 方程(1)改写为如下 Hamilton 形式

$$\begin{cases} u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial v} \right) = v_x, \\ v_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = \partial_x (u - u_{xx} + M_\xi u - f(u)), \end{cases} \quad (4)$$

这里 Hamilton 函数为

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (u^2 + v^2 + u_x^2 + M_\xi u \cdot u) dx - \int_0^\pi g(u) dx \quad (5)$$

其中 $g(u) = \int_0^u f(s) ds$ 是 f 的原函数。

为了将系统(4)重写为无穷多个坐标下的 Hamilton 形式, 我们令

$$u = \sum_{j \geq 1} \frac{\zeta_j \sqrt{j}}{\sqrt{\lambda_j}} \phi_j, \quad v = \sum_{j \geq 1} \tilde{\zeta}_j \sqrt{j} \sqrt{\lambda_j} \tilde{\phi}_j, \quad \lambda_j = \sqrt{\mu_j},$$

其中 $\mu_j = j^2 + 1 + \xi_j$, $\phi_j = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx)$, 并且 $\tilde{\phi}_j = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(jx)$ 。在这些坐标下系统(4)变为

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_j = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{\zeta}_j} = -j\lambda_j \tilde{\zeta}_j, & j \geq 1, \\ \dot{\tilde{\zeta}}_j = \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} = j\lambda_j \zeta_j + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial \zeta_j}, & j \geq 1, \end{cases} \quad (6)$$

这里

$$H(\zeta, \tilde{\zeta}) = \frac{1}{2} \sum_{j \geq 1} j\lambda_j (\zeta_j^2 + \tilde{\zeta}_j^2) + G(\zeta). \quad (7)$$

且

$$G(\zeta) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2} \in \mathbb{N}} G_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2}} \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} \cdots \zeta_{j_{2p+2}},$$

其中

$$G_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2}} = -\frac{\sqrt{j_1 j_2 \cdots j_{2p+2}}}{\sqrt{\lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \cdots \lambda_{j_{2p+2}}}} \int_0^\pi \phi_{j_1} \phi_{j_2} \cdots \phi_{j_{2p+2}} dx.$$

可以证明 $G_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2}} = 0$, 除非对某些正负号组合使得 $j_1 \pm j_2 \pm \cdots \pm j_{2p+2} = 0$ 。

为了简化分析, 我们引入复坐标

$$w_j := \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta_j + i\tilde{\zeta}_j), \quad \bar{w}_j := \frac{1}{\sqrt{2}} (\zeta_j - i\tilde{\zeta}_j) \quad (8)$$

这个变换允许我们用复变量 w 和 $\bar{w}$ 来表示 Hamilton 函数, 从而得到一个具有辛结构 $i \sum_{j \geq 1} dw_j \wedge d\bar{w}_j$ 的实解析 Hamilton 函数

$$H = \sum_{j \geq 1} j\lambda_j w_j \bar{w}_j + G(w, \bar{w}), \quad (9)$$

其中

$$G(w, \bar{w}) = \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2} \in \mathbb{N}} G_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2}} (w_{j_1} + \bar{w}_{j_1}) (w_{j_2} + \bar{w}_{j_2}) \cdots (w_{j_{2p+2}} + \bar{w}_{j_{2p+2}}).$$

引理 3.1 对于 $a > 0$ 和 $\rho \geq 0$, 梯度 G_w 和 $G_{\bar{w}}$ 是从原点 $\ell^{a, \rho}$ 到原点 $\ell^{a, \rho}$ 的某个邻域的实解析映射, 满足

$$\|G_w\|_{a, \rho}, \|G_{\bar{w}}\|_{a, \rho} = O(\|w\|_{a, \rho}^{2p+1}).$$

证明 为了方便证明, 通过令 $w_j = \mathbf{w}_j$ 和 $\bar{w}_j = \mathbf{w}_{-j}$ 引入 $\ell^{a, \rho}$ 上的坐标 $(\cdots, \mathbf{w}_{-2}, \mathbf{w}_{-1}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots)$ 。在此变换下, 扰动 G 可表示为:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2} \in \mathbb{N}} G_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2}} (w_{j_1} + \bar{w}_{j_1}) (w_{j_2} + \bar{w}_{j_2}) \cdots (w_{j_{2p+2}} + \bar{w}_{j_{2p+2}}) \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathbf{G}_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2}} \mathbf{w}_{j_1} \mathbf{w}_{j_2} \cdots \mathbf{w}_{j_{2p+2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

这里新系数定义为

$$\mathbf{G}_{j_1, j_2, \dots, j_{2p+2}} = G_{|j_1| |j_2| \cdots |j_{2p+2}|}.$$

令 $\tilde{\mathbf{w}}_l = |\mathbf{w}_l| + |\mathbf{w}_{-l}|$ 。若 $\mathbf{w} \in \ell^{a, \rho}$, 那么 $\tilde{\mathbf{w}} \in \ell^{a, \rho}$ 。由(10)式, 我们推出

$$\left| \frac{\partial G}{\partial \mathbf{w}_l} \right| \leq c \sum_{\pm j_1 \pm j_2 \pm \dots \pm j_{2p+1} = l} |\mathbf{w}_{j_1}| |\mathbf{w}_{j_2}| \dots |\mathbf{w}_{j_{2p+1}}| \leq c \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_{2p+1} = l} \tilde{\mathbf{w}}_{j_1} \tilde{\mathbf{w}}_{j_2} \dots \tilde{\mathbf{w}}_{j_{2p+1}} \leq c \left(\underbrace{\tilde{\mathbf{w}} * \tilde{\mathbf{w}} * \dots * \tilde{\mathbf{w}}}_{2p+1} \right)_l,$$

其中 $*$ 表示离散卷积, c 是仅依赖于 p 的常数。由 $\ell^{a,\rho}$ 的Banach代数性质, 我们得到

$$\|G_w\|_{a,\rho} \leq c \left\| \underbrace{\tilde{\mathbf{w}} * \tilde{\mathbf{w}} * \dots * \tilde{\mathbf{w}}}_{2p+1} \right\|_{a,\rho} = c \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{a,\rho}^{2p+1} \leq c \|\mathbf{w}\|_{a,\rho}^{2p+1}.$$

这就完成了引理的证明。

为简单起见, 我们选择了前 J 个模 $\phi_1, \dots, \phi_J$ 为切方向, 其余模为法方向。令 $z = (w_j)_{j>J}$ 表示法向变量。我们引入作用-角变量如下

$$w_j = \sqrt{y_j + I_j} e^{ix_j}, \quad \bar{w}_j = \sqrt{y_j + I_j} e^{-ix_j}, \quad 1 \leq j \leq J, \quad (11)$$

其中振幅 $\{I_j\}$ 满足条件

$$I_j \in A_r = \{r^2 < I_j < r^{2\lambda} : 1 \leq j \leq J\}, \quad \frac{2}{3} < \lambda < 1.$$

相应的辛结构变为 $dy \wedge dx + idz \wedge d\bar{z}$ 。非线性项 G 现在可以表示为:

$$\begin{aligned} G(x, y, z, \bar{z}) &= G(w, \bar{w}) = \sum_{|\mu|+|\nu|+|\beta|=2p+2} G^{\mu\nu\beta} \sqrt{(y+I)}^\mu e^{i\langle\mu, x\rangle} \sqrt{(y+I)}^\nu e^{-i\langle\nu, x\rangle} q^\beta \\ &= \sum_{|\beta| \leq 2p+2} G^\beta(x, y) q^\beta, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $I = (I_1, \dots, I_J)$, $q = (z, \bar{z})$, 并且

$$G^\beta(x, y) = \sum_{|\mu|+|\nu|=2p+2-|\beta|} G^{\mu\nu\beta} e^{i\langle\mu-\nu, x\rangle} \sqrt{(y+I)}^{\mu+\nu}.$$

经过这个变换, 我们得到新Hamilton函数 H 的形式为

$$H \triangleq H(x, y, z, \bar{z}; I, \xi) = N(y, z, \bar{z}, \xi) + P(x, y, z, \bar{z}; I, \xi), \quad (13)$$

其中

$$N(y, z, \bar{z}, \xi) = \sum_{j=1}^J \omega_j(\xi) y_j + \sum_{j>J} \Omega_j(\xi) z_j \bar{z}_j, \quad (14)$$

切向频率为

$$\omega(\xi) = (\omega_1(\xi), \omega_2(\xi), \dots, \omega_J(\xi)) = (\lambda_1, 2\lambda_2, \dots, J\lambda_J), \quad (15)$$

法向频率为

$$\Omega(\xi) = (\Omega_j(\xi))_{j>J}, \quad \Omega_j(\xi) = j\sqrt{j^2 + 1 + \xi_j}. \quad (16)$$

扰动项为

$$P(x, y, z, \bar{z}; I, \xi) = G(x, y, z, \bar{z}), \quad (17)$$

与参数 ξ 无关。

记 $B^J = [0, 1]^J$, $B = [0, 1]^\mathbb{N}$, 考虑无穷维参数 ξ , 我们将 ξ 分解如下:

$$\xi = (\xi^J, \xi') \in B^J \times B' = B,$$

式中 B' 表示序列 $\xi' = (\xi_{J+1}, \xi_{J+2}, \dots)$ 的闭集。在当前分析中, ξ' 可视为辅助参数, 所有后续结果都对这些

参数一致成立。

命题 3.1 (1) 当 $1 \leq j \leq J$ 时, 切频率 $\omega_j(\xi)$ 满足 $|\omega_j(\xi)| \leq 2J^2$, 且存在一个常数 $M_0 > 0$, 使在 B^J 上有 $\left| \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right| \leq M_0$ 。

(2) 存在一个常数 $m_0 > 0$, 使得对于 $j \geq J$, 法频 Ω_j 满足

$$|\langle l, \Omega \rangle| \geq m_0 \langle l \rangle_2, \text{ 对所有满足 } 1 \leq |l| \leq 2 \text{ 的 } l \in \mathbb{Z}^\infty,$$

这个不等式在 B^J 上一致成立。这里, 对于 $d \geq 1$ $\langle l \rangle_d = \max \left\{ 1, \left| \sum_{j \geq J} j^d l_j \right| \right\}$, $\langle l, \Omega \rangle = \sum_{j \geq J} l_j \Omega_j$ 。

(3) 令 $\tau > J+1$ 其 $\gamma > 0$ 充分小。存在一个具有正 Lebesgue 测度的子集 $\mathcal{O} \subseteq B^J$ 满足对所有 $\xi' \in \mathcal{O}$, $\text{meas}(\mathcal{O}) \geq 1 - O(\gamma)$ 。

并且以下非共振条件对所有 $\xi' \in B'$ 一致成立:

$$\begin{aligned} |\langle k, \omega(\xi) \rangle| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \text{ 对所有 } k \in \mathbb{Z}^J \setminus \{0\}, \\ |\langle k, \omega(\xi) \rangle + \Omega_n(\xi)| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \text{ 对所有 } k \in \mathbb{Z}^J \setminus \{0\}, n, m \in \mathbb{N}, \\ |\langle k, \omega(\xi) \rangle + \Omega_n(\xi) + \Omega_m(\xi)| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \text{ 对所有 } k \in \mathbb{Z}^J \setminus \{0\}, n, m \in \mathbb{N}, \\ |\langle k, \omega(\xi) \rangle + \Omega_n(\xi) - \Omega_m(\xi)| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \text{ 对所有 } k \in \mathbb{Z}^J \setminus \{0\}, n, m \in \mathbb{N}, n \neq m. \end{aligned} \quad (18)$$

证明 (1) 关于切频向量 ω 的结论可直接由(15)式得出。

(2) 只需考虑 $l = e_i - e_j$ 的情况, 此时 $|\langle l, \Omega \rangle| = |\Omega_i - \Omega_j|$ 且 $\langle l \rangle_2 = |i^2 - j^2|$ 。通过(16)式中 Ω_j 的定义,

$$\Omega_j = j^2 + \frac{1}{2}\eta_j + \hat{\Omega}_j,$$

其中

$$\hat{\Omega}_j = \frac{-\eta_j^2}{4\sqrt{j^4 + j^2\eta_j} + 4j^2 + 2\eta_j}, \quad \eta_j = 1 + \xi_j \in [1, 2].$$

注意 $j \geq J \geq 3$, 我们有

$$|\hat{\Omega}_j| \leq \frac{4}{4\sqrt{j^4 + j^2} + 4j^2 + 2} \leq \frac{4}{4\sqrt{3^4 + 3^2} + 4 \cdot 3^2 + 2} \leq \frac{1}{18}.$$

因此,

$$\begin{aligned} |\Omega_i - \Omega_j| &= \left| i^2 - j^2 + \frac{\xi_i - \xi_j}{2} + \hat{\Omega}_i - \hat{\Omega}_j \right| \\ &\geq \left| i^2 - j^2 \right| - \frac{|\xi_i - \xi_j|}{2} - |\hat{\Omega}_i - \hat{\Omega}_j| \\ &\geq \left| i^2 - j^2 \right| - \frac{|i^2 - j^2|}{2} - \frac{|i^2 - j^2|}{9} \\ &= \frac{7}{18} |i^2 - j^2|. \end{aligned}$$

(3) 只需要考虑(18)式中的第四种非共振条件, 这是最困难的情况。令

$$S(\xi^J; \xi') = \langle k, \omega(\xi) \rangle + \Omega_n(\xi) - \Omega_m(\xi) = \sum_{i=1}^J i k_i \sqrt{l^2 + 1 + \xi_i} + \Omega_n(\xi) - \Omega_m(\xi).$$

注意到 $\omega(\xi)$ 与 ξ' 无关, 而 $\Omega_n(\xi)$ 和 $\Omega_m(\xi)$ 与 ξ^J 无关。设对某个 $1 \leq l \leq J$, 有 $k_l \neq 0$, 那么

$$\left| \frac{\partial S}{\partial \xi_l} \right| = \left| \frac{l k_l}{2\sqrt{l^2 + 1 + \xi_l}} \right| \geq \frac{1}{4}.$$

因此,

$$\text{meas} \left\{ \xi^J \in B^J : \left| S(\xi^J; \xi') \right| < \frac{\gamma}{|k|^r} \right\} \leq 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \frac{\gamma}{|k|^r} = 8\gamma.$$

命题 3.2 令 $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, $r = \varepsilon_0^{1/2}$, 以及 $s > 0$ 。扰动 P 的 Hamilton 向量场 X_P 定义了一个映射

$$X_P : D(s, r) \times B \rightarrow \mathcal{P}_C^{a, \rho},$$

满足以下性质:

(1) 对于每个 $\xi \in B$, 映射 $X_P(\cdot, \xi)$ 在 $D(s, r)$ 上是实解析的。

(2) 对于每个 $w \in D(s, r)$ 和 $\xi' \in B'$, 映射 $X_P(w, \cdot)$ 在 $\mathcal{O}$ 上是 Whitney 可微的。

此外, 存在一个与 r 和 s 无关的常数 $C > 0$ 使得当 $|y| < r^2$ 和 $\|z\|_{a, \rho} < r$ 时,

$$\|X_P\|_{D(s, r), B} < \varepsilon_0,$$

其中 $\varepsilon_0 = C\varepsilon_0^p$ 。

证明 根据引理 3.1 和(12)式, 存在一个常数 $C > 0$, 使得当 $|y| < r^2$ 且 $\|z\|_{a, \rho} < r$ 时, 有

$$|P_x|_{D(s, r), \mathcal{O}} \leq C \left(|y|^{p+1} + |y|^{p+1/2} \|z\|_{a, \rho} + |y|^p \|z\|_{a, \rho}^2 + \cdots + |y|^{1/2} \|z\|_{a, \rho}^{2p+1} + \|z\|_{a, \rho}^{2p+2} \right) \leq Cr^{2p+2}. \quad (19)$$

$$|P_y|_{D(s, r), \mathcal{O}} \leq C \left(|y|^p + |y|^{p-1/2} \|z\|_{a, \rho} + |y|^{p-1} \|z\|_{a, \rho}^2 + \cdots + |y|^{-1/2} \|z\|_{a, \rho}^{2p+1} \right) \leq Cr^{2p}. \quad (20)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^a e^{n\rho} \left(\|P_{z_n}\|_{D(s, r), \mathcal{O}} + \|P_{\bar{z}_n}\|_{D(s, r), \mathcal{O}} \right) \leq C \left(|y|^{p+1/2} + |y|^p \|z\|_{a, \rho} + \cdots + |y|^{1/2} \|z\|_{a, \rho}^{2p} + \|z\|_{a, \rho}^{2p+1} \right) \leq Cr^{2p+1}. \quad (21)$$

现在, 根据向量场的加权范数的定义, 我们推导出

$$\begin{aligned} \|X_P\|_{D(s, r), \mathcal{O}} &= |P_y|_{D(s, r), \mathcal{O}} + \frac{1}{r^2} |P_x|_{D(s, r), \mathcal{O}} + \frac{1}{r} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^a e^{n\rho} \left(\|P_{z_n}\|_{D(s, r), \mathcal{O}} + \|P_{\bar{z}_n}\|_{D(s, r), \mathcal{O}} \right) \\ &\leq Cr^{2p} = \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (22)$$

这就完成了证明。

4. KAM 步骤

在本文的剩余部分中, 我们采用以下符号约定: 符号 “+” 表示下一次迭代步骤中的量。符号 “ $\lesssim$ ” 表示在不等式中省略与迭代步骤和切频数量无关的各种常数。

4.1. 第一个 KAM 步骤

在区域 $D(s, r) \times \mathcal{O}$ 上考虑一个形式为(13)的 Hamilton 函数 $H = N + P$, 它满足命题 3.1 和 3.2 中的结论。下面, 我们将(18)式中的非共振条件写成更紧凑的形式:

$$|\langle k, \omega \rangle + \langle l, \Omega \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad (23)$$

其中 $(k, l) \in \mathbb{Z}^J \times \mathbb{Z}^\infty$ 且 $|l| \leq 2$ 。

令 $0 < s_+ < s$ 并为后续迭代定义以下参数:

$$\begin{aligned} r_+ &= \frac{r}{4} \varepsilon^{1/3} \left(\gamma^{-2} (s - s_+)^{-(2r+2)} \right)^{1/3}, \\ \varepsilon_+ &= C \left(\gamma^{-2} (s - s_+)^{-(2r+2)} \right)^{1/3} \varepsilon^{4/3}. \end{aligned} \quad (24)$$

我们的目标是构造一个辛变换

$$\Phi: D_+ \times \mathcal{O} = D(s_+, r_+) \times \mathcal{O} \rightarrow D(s, r) \times B$$

使得新的 Hamilton 函数 $H_+ = N_+ + P_+$ 由更新后的参数 $\varepsilon_+, s_+, \gamma_+, r_+$ 来定义。

4.1.1. 线性化方程的求解

我们将 P 展开成它的 Taylor-Fourier 级数:

$$P = \sum_{k \in \mathbb{Z}^J, l \in \mathbb{N}, \alpha, \beta} P_{kl\alpha\beta} y^l e^{i\langle k, x \rangle} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad (25)$$

其中 $k \in \mathbb{Z}^J$, $l \in \mathbb{N}$ 以及多指标 α 和 β 在所有无限维向量的集合上运行

设 R 是 P 的截断, 由

$$\begin{aligned} R(x, y, z, \bar{z}) &= R_0 + R_1 + R_2 \\ &= \sum_{k, |l| \leq 1} P_{kl00} e^{i\langle k, x \rangle} y^l + \sum_{k, n} (P_n^{k10} z_n + P_n^{k01} \bar{z}_n) e^{i\langle k, x \rangle} \\ &\quad + \sum_{k, n, m} (P_{nm}^{k20} z_n z_m + P_{nm}^{k11} z_n \bar{z}_m + P_{nm}^{k02} \bar{z}_n \bar{z}_m) e^{i\langle k, x \rangle} \end{aligned} \quad (26)$$

其中系数 $P_n^{k10} = P_{kl\alpha\beta}$ 且 $\alpha = e_n, \beta = 0$, $P_n^{k01} = P_{kl\alpha\beta}$ 且 $\alpha = 0, \beta = e_n$, $P_{nm}^{k20} = P_{kl\alpha\beta}$ 且 $\alpha = e_n + e_m, \beta = 0$, $P_{nm}^{k11} = P_{kl\alpha\beta}$ 且 $\alpha = e_n, \beta = e_m$, $P_{nm}^{k02} = P_{kl\alpha\beta}$ 且 $\alpha = 0, \beta = e_n + e_m$ 。这里, e_n 表示第 n 个分量为 1, 其他所有分量为 0 的向量。

在每次 KAM 迭代步骤中, 假设满足小除数条件, 我们寻找定义在 $D(s_+, r_+) = D_+$ 上的函数 F , 使得 Hamilton 向量场 X_F 的时间-1 映射 ϕ_F^1 定义了一个映射 $D_+ \rightarrow D$, 并将 H 变换为 H_+ 。设函数 F 具有如下形式

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \bar{z}) &= F_0 + F_1 + F_2 \\ &= \sum_{k \neq 0, |l| \leq 1} F_{kl00} e^{i\langle k, x \rangle} y^l + \sum_{k, n} (F_n^{k10} z_n + F_n^{k01} \bar{z}_n) e^{i\langle k, x \rangle} \\ &\quad + \sum_{k, n, m} (F_{nm}^{k20} z_n z_m + F_{nm}^{k02} \bar{z}_n \bar{z}_m) e^{i\langle k, x \rangle} + \sum_{|k|+|n-m| \neq 0} F_{nm}^{k11} z_n \bar{z}_m e^{i\langle k, x \rangle}, \end{aligned} \quad (27)$$

且满足下面的引理:

引理 4.1 存在形如(27)的函数 F 满足方程

$$\{N, F\} + R - P_{0000} - \langle \omega', y \rangle - \sum_n P_{nn}^{011} z_n \bar{z}_n = 0, \quad (28)$$

其中

$$\omega' = \int_{\mathbb{T}^J} \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\bar{z}=y=0} dx.$$

F 的 Taylor-Fourier 系数由以下方程定义

$$\begin{aligned}
 (\langle k, \omega \rangle) F_{kl00} &= -i P_{kl00}, k \neq 0, |l| \leq 1, \\
 (\langle k, \omega \rangle - \Omega_n) F_n^{k10} &= -i P_n^{k10}, \\
 (\langle k, \omega \rangle + \Omega_n) F_n^{k01} &= -i P_n^{k01}, \\
 (\langle k, \omega \rangle - \Omega_n - \Omega_m) F_{nm}^{k20} &= -i P_{nm}^{k20}, \\
 (\langle k, \omega \rangle - \Omega_n + \Omega_m) F_{nm}^{k11} &= -i P_{nm}^{k11}, |k| + |n - m| \neq 0, \\
 (\langle k, \omega \rangle + \Omega_n + \Omega_m) F_{nm}^{k02} &= -i P_{nm}^{k02}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

证明参考文献[9]中的引理 4.3。

4.1.2. 坐标变换的估计

如前所述, 由于在每次迭代步骤中切向频率的数量增加, 我们需要推导出比[2]中的估计更为精确的结果。我们首先引入以下引理, 它对于估计 X_F 和 ϕ_F^1 至关重要:

引理 4.2 [9] 设 $f(x, y, z, \bar{z}) = \sum_{k, n, m} f_{k, nm} e^{i\langle k, x \rangle} z_n \bar{z}_m$ 为一个实解析函数, 其中 $k \in \mathbb{Z}^J$, $n, m \in \mathbb{N}$ 。则以下不等式成立:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k, n, m} |f_{k, nm}| |z_n| |z_m| |k| e^{\left| k \left(s - \frac{1}{4}(s - s_+) \right) \right|} |k|^{2\tau+1} \\
 & \leq \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} (s - s_+)^{-(2\tau+2)} \sum_{k, n, m} |f_{k, nm}| |z_n| |z_m| e^{|k|s}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

引理 4.3 回顾 $\|X_P\|_{D(s, r), \mathcal{O}} < \varepsilon$ 。令

$$D_i = D\left(s_+ + \frac{i}{4}(s - s_+), \frac{i}{4}r\right), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

则对于引理 4.1 中定义的函数 F , 其 Hamilton 向量场 X_F 满足以下估计:

$$\|X_F\|_{D_3, \mathcal{O}} \lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s - s_+)^{-(2\tau+2)} \varepsilon \tag{31}$$

证明 我们分几个步骤进行证明:

(1) 我们估计 $\|F_x\|_{D_3, \mathcal{O}}$ 。对于(29)中的方程, 利用范数 $|\cdot|_{\mathcal{O}}$ 的定义和非共振条件(18), 我们得到 $k \neq 0$ 时的估计如下:

$$\begin{aligned}
 |F_{kl00}|_{\mathcal{O}} &\lesssim \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} |P_{kl00}|_{\mathcal{O}}; \\
 |F_n^{k10}|_{\mathcal{O}} &\lesssim \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} |P_n^{k10}|_{\mathcal{O}}; \\
 |F_n^{k01}|_{\mathcal{O}} &\lesssim \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} |P_n^{k01}|_{\mathcal{O}}; \\
 |F_{nm}^{k20}|_{\mathcal{O}} &\lesssim \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} |P_{nm}^{k20}|_{\mathcal{O}}; \\
 |F_{nm}^{k11}|_{\mathcal{O}} &\lesssim \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} |P_{nm}^{k11}|_{\mathcal{O}}, \quad |k| + |n - m| \neq 0; \\
 |F_{nm}^{k02}|_{\mathcal{O}} &\lesssim \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} |P_{nm}^{k02}|_{\mathcal{O}}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

根据加权范数的定义和引理 4.2, 可得:

$$\begin{aligned}
\|F_x\|_{D_3, \mathcal{O}} &\lesssim \sum_{\substack{|l| \leq 1 \\ k}} |k| |P_{kl00}|_{\mathcal{O}} r_3^{2|l|} \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} e^{\left|k\left(\frac{s-s_+}{4}\right)\right|} \\
&\quad + \sum_{k,n} |k| |P_n^{k10}|_{\mathcal{O}} \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} e^{\left|k\left(\frac{s-s_+}{4}\right)\right|} |z_n| \\
&\quad + \sum_{k,n} |k| |P_n^{k01}|_{\mathcal{O}} \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} e^{\left|k\left(\frac{s-s_+}{4}\right)\right|} |\bar{z}_n| \\
&\quad + \sum_{k,n,m} |k| |P_{nm}^{k20}|_{\mathcal{O}} \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} e^{\left|k\left(\frac{s-s_+}{4}\right)\right|} |z_n| |z_m| \\
&\quad + \sum_{k,n,m} |k| |P_{nm}^{k02}|_{\mathcal{O}} \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} e^{\left|k\left(\frac{s-s_+}{4}\right)\right|} |\bar{z}_n| |\bar{z}_m| \\
&\quad + \sum_{|k|+|n-m| \neq 0} |k| |P_{nm}^{k11}|_{\mathcal{O}} \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} e^{\left|k\left(\frac{s-s_+}{4}\right)\right|} |z_n| |\bar{z}_m|.
\end{aligned}$$

然后, 由引理 4.2, 我们推出

$$\begin{aligned}
\|F_x\|_{D_3, \mathcal{O}} &\lesssim \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+2)} \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} \\
&\quad \times \left[\sum_{\substack{|l| \leq 1 \\ k \neq 0}} |P_{kl00}|_{\mathcal{O}} r_3^{2|l|} e^{|k|s} + \sum_{k,n} |P_n^{k10}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |z_n| \right. \\
&\quad + \sum_{k,n} |P_n^{k01}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |\bar{z}_n| + \sum_{k,n,m} |P_{nm}^{k20}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |z_n| |z_m| \\
&\quad \left. + \sum_{k,n,m} |P_{nm}^{k02}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |\bar{z}_n| |\bar{z}_m| + \sum_{|k|+|n-m| \neq 0} |P_{nm}^{k11}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |z_n| |\bar{z}_m| \right].
\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}
\|R_x\|_{D, \mathcal{O}} &= \sup_{\substack{\|z\| < r \\ \|\bar{z}\| < r}} \left[\sum_{\substack{|l| \leq 1 \\ k}} |k_l| |P_{kl00}|_{\mathcal{O}} r^{2|l|} e^{|k|s} + \sum_{k,n} |k_l| |P_n^{k10}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |z_n| \right. \\
&\quad + \sum_{k,n} |k_l| |P_n^{k01}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |\bar{z}_n| + \sum_{k,n,m} |k_l| |P_{nm}^{k20}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |z_n| |z_m| \\
&\quad \left. + \sum_{k,n,m} |k_l| |P_{nm}^{k02}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |\bar{z}_n| |\bar{z}_m| + \sum_{k,n,m} |k_l| |P_{nm}^{k11}|_{\mathcal{O}} e^{|k|s} |z_n| |\bar{z}_m| \right],
\end{aligned}$$

并且 $\frac{1}{r^2} \|R_x\|_{D, \mathcal{O}} \leq \|X_R\|_{D, \mathcal{O}} \leq \|X_P\|_{D, \mathcal{O}} < \varepsilon$ 。因此我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} \|F_x\|_{D_3, \mathcal{O}} &\lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+2)} \frac{1}{r^2} \|R_x\|_{D, \mathcal{O}} \\
&\lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+2)} \|X_R\|_{D, \mathcal{O}} \\
&\lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+2)} \varepsilon.
\end{aligned}$$

同理, $\|F_y\|_{D_3, \mathcal{O}} \lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e}\right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+2)} \varepsilon$ 。

(2) 注意到由于 $F = F_0 + F_1 + F_2$ 且 $F_{0_{z_n}} = F_{0_{\bar{z}_n}} = 0$, 要估计 $\|X_F\|_{D_3, \mathcal{O}}$, 只需估计 $\|X_{F_1}\|_{D_3, \mathcal{O}}$ 和 $\|X_{F_2}\|_{D_3, \mathcal{O}}$ 。根据(32), 使用范数 $\|\cdot\|_{D_3, \mathcal{O}}$ 的定义和非共振条件(18), 我们得到

$$\|F_{1_{z_n}}\|_{D_3, \mathcal{O}} = \left\| \sum_k F_n^{k10} e^{i\langle k, x \rangle} \right\|_{D_3, \mathcal{O}} \lesssim \gamma^{-2} \sum_k |P_n^{k10}| |k|^{2\tau+2} e^{|k| \left(s - \frac{1}{4}(s-s_+) \right)}.$$

同理, $\|F_{1_{\bar{z}_n}}\|_{D_3, \mathcal{O}} \lesssim \gamma^{-2} \sum_k |P_n^{k01}| |k|^{2\tau+2} e^{|k| \left(s - \frac{1}{4}(s-s_+) \right)}$

应用引理 4.2, 我们推出

$$\frac{1}{r} \sum_{n>J} \|F_{1_{z_n}}\|_{D_3, \mathcal{O}} |n|^a e^{n|\rho|} \lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e}\right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+2)} \varepsilon.$$

类似的估计也适用于 $\frac{1}{r} \sum_{n>J} \|F_{1_{\bar{z}_n}}\|_{D_3, \mathcal{O}} |n|^a e^{n|\rho|}$ 。

根据向量场范数的定义, 我们有

$$\|X_{F_1}\|_{D_3, \mathcal{O}} \lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e}\right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+2)} \varepsilon. \quad (33)$$

此外, 由(32)式并使用类似的论证, 我们得到

$$\|F_{2_{z_n}}\|_{D_3, \mathcal{O}} \lesssim \gamma^{-2} \sum_{k,m} (|P_{nm}^{k20}| |z_m| + |P_{nm}^{k11}| |\bar{z}_m|) |k|^{2\tau+2} e^{|k| \left(s - \frac{1}{4}(s-s_+) \right)}. \quad (34)$$

类似的估计适用于 $\|F_{2_{\bar{z}_n}}\|_{D_3, \mathcal{O}}$ 。

再次应用引理 4.2 得到

$$\|X_{F_2}\|_{D_3, \mathcal{O}} \lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e}\right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+2)} \varepsilon. \quad (35)$$

由这些估计可以得出引理的结论。

引理 4.4 设 $\eta = \varepsilon^{1/3} \left(\gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+2)} \right)^{1/3}$ 并定义

$$D_{i\eta} = D \left(s_+ + \frac{i}{4}(s-s_+), \frac{i}{4}\eta r \right), \quad i=1,2,3,4.$$

若 $\varepsilon \ll \frac{1}{\sqrt{8}} \gamma^3 (s-s_+)^{3\tau+3}$, 则我们有

$$\phi_F^t : D_{2\eta} \rightarrow D_{3\eta}, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (36)$$

此外,

$$\|D\phi_F^t - Id\|_{D_\eta} \lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e}\right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+3)} \varepsilon. \quad (37)$$

这个引理的证明可直接从引理 4.3 推导出来, 可参考文献[9]中的引理 4.4, 故省略。

4.1.3. 新标准型与新扰动的估计

前面定义的映射 ϕ_F^1 将 H 变换为 $H_+ = H \circ \phi_F^1 = N_+ + P_+$, 其中新标准形 N_+ 为

$$N_+ = N + P_{0000} + \langle \omega', y \rangle + \sum_{n>J} P_{nn}^{011} z_n \bar{z}_n = \langle \omega^+, y \rangle + \sum_{n>J} \Omega_n^+ z_n \bar{z}_n, \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_i^+ &= \omega_i + P_{0e_i00}, \quad i=1, 2, \dots, J, \\ \Omega_n^+ &= \Omega_n + P_{nn}^{011}, \quad n > J. \end{aligned} \quad (39)$$

根据 P 的正则性, 我们得到以下估计

$$\left| \omega^+ - \omega \right|_{\mathcal{O}} < \varepsilon, \quad \left| \Omega_n^+ - \Omega_n \right|_{\mathcal{O}} < \varepsilon. \quad (40)$$

由于

$$\begin{aligned} P_+ &= \int_0^1 (1-t) \{ \{N, F\}, F \} \circ \phi_F^t dt + \int_0^1 \{R, F\} \circ \phi_F^t dt + (P-R) \circ \phi_F^1 \\ &= \int_0^1 \{R(t), F\} \circ \phi_F^t dt + (P-R) \circ \phi_F^1, \end{aligned}$$

其中 $R(t) = (1-t)(N_+ - N) + tR$, 所以我们得到

$$X_{P_+} = \int_0^1 (\phi_F^t)^* X_{\{R(t), F\}} dt + (\phi_F^1)^* X_{(P-R)}.$$

根据文献[17], 我们有以下结果:

$$\left\| (\phi_F^t)^* Y \right\|_{D_\eta} \leq \|Y\|_{D_{2\eta}}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (41)$$

由文献[9], 得

$$\left\| X_{\{R(t), F\}} \right\|_{D_{2\eta}} \lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+3)} \eta^{-2} \varepsilon^2$$

以及

$$\left\| X_{(P-R)} \right\|_{D_{2\eta}} \lesssim \eta \varepsilon < \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} \eta \varepsilon.$$

因此, 对于 $r_+ = \frac{1}{4} \eta r$, 我们得到

$$\left\| X_{P_+} \right\|_{D(s_+, r_+)} \lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} \left(\eta \varepsilon + \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+3)} \eta^{-2} \varepsilon^2 \right).$$

令 $\eta = \varepsilon^{1/3} \left(\gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+3)} \right)^{1/3}$, 故得

$$\left\| X_{P_+} \right\|_{D(s_+, r_+)} \lesssim \left(\frac{4(2\tau+2)}{e} \right)^{2\tau+2} \left(\eta \varepsilon + \gamma^{-2} (s-s_+)^{-(2\tau+3)} \eta^{-2} \varepsilon^2 \right). \quad (42)$$

4.2. 更多振子的激发

经过第一次迭代后, 我们得到了一个新的 Hamilton 函数 H_+ :

$$H_+ = H \circ \phi_F^1 = \sum_{1 \leq i \leq J} \omega_i^+ y_i + \sum_{n>J} \Omega_n^+ z_n \bar{z}_n + P_+(x, y, z, \bar{z}, \xi, I),$$

其中 $\phi_F^1: D(s_+, r_+) \times \mathcal{O} \rightarrow D(s, r) \times B^J$ 是一个辛变换, $\mathcal{O}$ 是 B^J 的一个子集, 新的参数集是

$$B_+ = \left\{ (\xi^J, \xi') : \xi^J \in \mathcal{O} \right\} \subset B.$$

在下一步迭代构造中, 以及所有后续步骤中, 我们将按如下方式进行: 考虑定义在区域 $D(s_+, r_+) \times B_+$ 上的 Hamilton 函数 H_+ 。

(1) 选择合适的 $J_+ > J$, 并通过设定以下形式激发更多振子;

$$z_j = \sqrt{y_j + I_j} e^{ix_j}, \quad \bar{z}_j = \sqrt{y_j + I_j} e^{-ix_j}, \quad J < j \leq J_+,$$

其中新的振幅满足

$$r_+^2 < I_j < r_+^{2\lambda}, \quad \frac{2}{3} < \lambda < 1 \quad (43)$$

其余法变量 $z_j, j > J_+$ 保持不变。

(2) 这个变换产生了一个新的 Hamilton 函数

$$H_+ = \sum_{1 \leq i \leq J_+} \omega_i^+ y_i + \sum_{n > J_+} \Omega_n^+ z_n \bar{z}_n + P_+(x, y, z_n, \bar{z}_n, \xi, I) \quad (44)$$

其中对于 $J < i \leq J_+$ 有 $\omega_i^+ = \Omega_i^+$, 且 H_+ 仍然定义在 $D(s_+, r_+)$ 上。

(3) 根据(42), 我们得到 $\|X_{p_+}\| < \varepsilon_+$ 。我们选择 $\gamma_+ = \gamma^\varrho$, 其中 $1 < \varrho < \frac{4}{3}$, 使其在 KAM 迭代的一步中起到与 γ 相同的作用。注意, P_+ 与 P 保持相同的结构。

(4) 最后, 我们再次将参数 $\xi \in B_+$ 划分为“本质的”部分和“虚拟的”部分 $\xi = (\xi^{J_+}, \xi'')$, 并考虑切片

$$B^{J_+} = \left\{ \xi^{J_+} : (\xi^{J_+}, \xi'') \in B_+ \right\} \subset \mathbb{R}^{J_+},$$

此过程使我们能够对 Hamilton 函数(44)执行另一次 KAM 迭代, 按照与第 4.1 节相同的程序。这意味着 KAM 步骤可以无限次迭代。

我们简要概述了迭代过程。在接下来的部分中, 我们将更详细地描述迭代过程。

5. 迭代引理与收敛性

随着每次迭代中被激发的振子数量 J_ν (其中 ν 表示第 ν 步) 的增加, 我们的主要目标是控制 J_ν 的增长率, 并确保 KAM 机制在无限步数下有效迭代下去。对于任意 $J \geq 1$, 我们定义如下序列

$$J_0 = J, \quad J_\nu = (\nu + 1)J, \quad \nu \geq 1 \quad (45)$$

此外, 对于给定 ε, r, s 和所有 $\nu \geq 0$, 我们定义如下序列

$$\begin{aligned} s_\nu &= s \left(1 - \sum_{i=2}^{\nu+1} 2^{-i} \right), \\ \gamma_0 &= \gamma = \varepsilon^{1/8}, \quad \gamma_\nu = \varepsilon_\nu^{1/8}, \\ \varepsilon_{\nu+1} &= \left(\frac{4(2\tau_\nu + 2)}{e} \right)^{2\tau_\nu + 2} \left(\gamma_\nu^{-2} (s_\nu - s_{\nu+1})^{-(2\tau_\nu + 3)} \right)^{1/3} \varepsilon_\nu^{4/3}, \\ \eta_\nu &= \varepsilon_\nu^{1/3} \left(\gamma_\nu^{-2} (s_\nu - s_{\nu+1})^{-(2\tau_\nu + 3)} \right)^{1/3}, \\ r_{\nu+1} &= \frac{1}{4} \eta_\nu r_\nu, \\ m_\nu &= \frac{m_0}{3} (2 + 2^{-\nu}), \\ \tau_\nu &= J_\nu + 2, \end{aligned} \quad (46)$$

其中 $s_0 = s$, $r_0 = r$, 以及 $\varepsilon_0 = \varepsilon$ 。

5.1. 迭代引理

上述分析可以总结为以下引理为

引理 5.1 设 ε 足够小且 $\nu \geq 0$ 。假设在 $D(s_\nu, r_\nu) \times B_\nu$ 上定义了 $H_\nu = N_\nu + P_\nu$, 其中

$$H_\nu = \sum_{1 \leq i \leq J_\nu} \omega_i^\nu(\xi) y_i + \sum_{n > J_\nu} \Omega_n^\nu(\xi) z_n \bar{z}_n + P_\nu(x, y, z, \bar{z}, \xi, I)$$

满足

$$\|X_{P_\nu}\|_{D(s_\nu, r_\nu) \times B_\nu} \leq \varepsilon_\nu, \quad |\omega^\nu - \omega^{\nu-1}|_{\mathcal{O}_\nu} < \varepsilon_{\nu-1}, \quad |\Omega_n^\nu - \Omega_n^{\nu-1}|_{\mathcal{O}_\nu} < \varepsilon_{\nu-1}$$

且对所有满足 $|l| \leq 2$ 的整数向量 $(k, l) \in \mathbb{Z}^{J_\nu} \times \mathbb{Z}^\infty$, 非共振条件

$$|\langle k, \omega^\nu \rangle + \langle l, \Omega^\nu \rangle| \geq \frac{\gamma_\nu}{|k|^{\tau_\nu}}, |\langle l, \Omega^\nu \rangle| \geq m_\nu \langle l \rangle_2$$

在 $B_\nu = \{(\xi^{J_\nu}, \xi^\nu) : \xi^{J_\nu} \in \mathcal{O}_\nu\}$ 上成立。

那么存在一族辛坐标变换

$$\Phi_{\nu+1} : D(s_{\nu+1}, r_{\nu+1}) \times B^{\nu+1} \rightarrow D(s_\nu, r_\nu)$$

及一个闭子集

$$B_{\nu+1} = \{(\xi^{J_{\nu+1}}, \xi^{\nu+1}) : \xi^{J_{\nu+1}} \in \mathcal{O}_{\nu+1}\},$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\nu+1} &= B^{\nu+1} \setminus \left(\bigcup_{k,l} \mathcal{R}_{k,l}^{\nu+1} \right), \\ B^{\nu+1} &= \{ \xi^{J_{\nu+1}} : (\xi^{J_{\nu+1}}, \xi^{\nu+1}) \in B_\nu \} \subset \mathbb{R}^{J_{\nu+1}}, \\ \mathcal{R}_{k,l}^{\nu+1} &= \left\{ \xi \in B^{\nu+1} : |\langle k, \omega^{\nu+1} \rangle + \langle l, \Omega^{\nu+1} \rangle| < \frac{\gamma_{\nu+1}}{|k|^{\tau_{\nu+1}}} \right\}, \end{aligned}$$

对于所有满足 $|l| \leq 2$ 的整数向量 $(k, l) \in \mathbb{Z}^{J_{\nu+1}} \times \mathbb{Z}^\infty$, 使得对于 $H_{\nu+1} = H_\nu \circ \Phi_{\nu+1} = N_{\nu+1} + P_{\nu+1}$, 在激发 $J_{\nu+1} - J_\nu$ 个振子后, 以 $\nu+1$ 代替 ν 满足相同的假设。

5.2. 收敛性

假设 Hamilton 函数的两个性质都得到了满足。为应用在 $\nu > 0$ 时的迭代引理, 设 $s_0 = s$, $r_0 = r$, $H_0 = H$, $\gamma_0 = \gamma$, 设初始频率数为 $J_0 = J$, 设 $B_{-1} = B$, $B_0 = \{(\xi^J, \xi^0) : \xi^J \in \mathcal{O}_\gamma\}$ 满足小除数条件, 其中

$$\mathcal{O}_\gamma = B^0 \setminus \left(\bigcup_{k,l} \mathcal{R}_{k,l}^0(\gamma) \right).$$

因此, 迭代引理可以归纳地应用。当 $\nu \geq 1$ 时, 我们得到如下变换序列

$$\Psi^\nu = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \cdots \circ \Phi_\nu : D(s_\nu, r_\nu) \times B^\nu \rightarrow D(s_0, r_0),$$

使得

$$H_\nu = H \circ \Psi^\nu = \sum_{1 \leq i \leq J_\nu} \omega_i^\nu(\xi) y_i + \sum_{n > J_\nu} \Omega_n^\nu(\xi) z_n \bar{z}_n + P_\nu(x, y, z, \bar{z}, \xi, I).$$

设 $B^* = \bigcap_{\nu=0}^{\infty} B_\nu$ 。如文献[9]中所述, 并且由于引理 4.4, 我们可以得出 Ψ^ν 和 $D\Psi^\nu$ 在 $D\left(\frac{s}{2}, r_\infty\right) \times B^*$ 上一致收敛的结论, 最终 Hamilton 函数为

$$H_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^\infty(\xi) y_n.$$

我们有

$$\varepsilon_{\nu+1} = \left(\frac{4(2\tau_\nu + 2)}{e} \right)^{2\tau_\nu+2} \left(\gamma_\nu^{-2} (s_\nu - s_{\nu+1})^{-(2\tau_\nu+3)} \right)^{1/3} \varepsilon_\nu^{4/3}, \quad \gamma_\nu = \varepsilon_\nu^{1/8}.$$

为了简化符号, 令 $C_\nu = \left(\frac{4(2\tau_\nu + 2)}{e} \right)^{2\tau_\nu+2}$ 和 $C'_\nu = 2\tau_\nu + 3$ 。因此

$$\varepsilon_{\nu+1} = C_\nu (s_\nu - s_{\nu+1})^{-C'_\nu/3} \varepsilon_\nu^{5/4}. \quad (47)$$

现在我们将证明, 当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$, 并且每一步的 KAM 估计都是有效的。

由于 $J_0 = J$, 由(5.3)式及 C_ν 和 C'_ν 的定义可知, 若 $\varepsilon_0 = \varepsilon$ 足够小, 则存在 $1 < \kappa < 5/4$ 的常数 κ , 使得

$$\varepsilon_1 = C_0 (s_0 - s_1)^{-C'_0/3} \varepsilon^{5/4} = \varepsilon^\kappa. \quad (48)$$

因此, $\varepsilon_1 < \varepsilon$ 。由于我们设定 $J_\nu = (\nu+1)J_0$, 因此被激发的振子的数量增加缓慢。因此, 通过同样的分析, 我们得到

$$\varepsilon_2 = C_1 (s_1 - s_2)^{-C'_1/3} \varepsilon_1^{5/4} \leq \varepsilon_1^\kappa = \varepsilon^{\kappa^2}, \quad (49)$$

即 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, 通过归纳法, 我们得到

$$\varepsilon_{\nu+1} = C_\nu (s_\nu - s_{\nu+1})^{-C'_\nu/3} \varepsilon_\nu^{5/4} \leq \varepsilon_\nu^\kappa \leq \varepsilon^{\kappa^{\nu+1}}. \quad (50)$$

因此, 当 ε 足够小时, 就有 $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow \infty$ 。此外, ε_ν 随迭代步骤 ν 呈超指数衰减, 即 $\varepsilon_\nu \leq \varepsilon^{\kappa^\nu}$ 。当 J_ν 缓慢增长时, 我们可以确保 KAM 估计在每一步都是有效的。

设 ϕ_H^t 为 X_H 的流量。由于 $H \circ \Psi^\nu = H_\nu$, 我们有

$$\Psi^\nu \circ \phi_H^t = \phi_{H_\nu}^t \circ \Psi^\nu. \quad (51)$$

Ψ^ν 和 $D\Psi^\nu$ 的一致收敛意味着可以在(51)式的两边取极限。因此, 在 $D\left(\frac{s}{2}, 0\right) \times B^*$ 上, 我们得到

$$\Psi^\infty \circ \phi_H^t = \phi_{H_\infty}^t \circ \Psi^\infty \quad (52)$$

和

$$\Psi^\infty : D\left(\frac{s}{2}, 0\right) \times B^* \rightarrow D(s, r) \times B.$$

由(52)式可知, 我们得到了在 $\xi \in B^*$ 处的初始扰动 Hamilton 系统的不变无限维环面 $\Psi^\infty(\mathbb{T}^\mathbb{N} \times \{\xi\})$, 从而得到了频率为 $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots$ 的概周期解, 并且这些频率逐渐趋近于这些参数下的初始频率。

6. 总结

本文首先将广义 Boussinesq 写成 Hamilton 形式, 然后对线性方程进行求解以及估计坐标变换, 得到新标准型与新扰动的估计, 最后构造 KAM 迭代, 本文的创新之处在于证明了存在无限多个小振幅、实

解析且线性稳定的概周期解。本文由于 Boussinesq 方程中非线性项向量场正则性的缺失，导致测度估计不能很好地进行，仍待后续的研究。在此之后，作者会对高维广义 Boussinesq 方程的概周期解的存在性与稳定性问题进行相关研究。

基金项目

飞行器数学建模与高性能计算工信部重点实验室基金资助项目(项目编号：202408)。

参考文献

- [1] Shi, Y. and Xu, J. (2023) Quasi-Periodic Solutions for a Generalized Higher-Order Boussinesq Equation. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **22**, Article No. 139. <https://doi.org/10.1007/s12346-023-00840-w>
- [2] Shi, Y., Xu, J. and Xu, X. (2014) On Quasi-Periodic Solutions for a Generalized Boussinesq Equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **105**, 50-61. <https://doi.org/10.1016/j.na.2014.04.007>
- [3] Shi, Y., Xu, J. and Xu, X. (2015) On Quasi-Periodic Solutions for Generalized Boussinesq Equation with Quadratic Nonlinearity. *Journal of Mathematical Physics*, **56**, Article ID: 022703. <https://doi.org/10.1063/1.4906810>
- [4] Shi, Y., Xu, J. and Xu, X. (2017) Quasi-periodic Solutions of Generalized Boussinesq Equation with Quasi-Periodic Forcing. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—B*, **22**, 2501-2519. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017104>
- [5] Shi, Y., Xu, J., Xu, X. and Jiang, S. (2014) On the Quasi-Periodic Solutions for Generalized Boussinesq Equation with Higher Order Nonlinearity. *Applicable Analysis*, **94**, 1977-1996. <https://doi.org/10.1080/00036811.2014.967506>
- [6] Wang, S., Lou, Z. and Si, J. (2020) Long Time Stability of KAM Tori for the Generalized Boussinesq Equation. *Nonlinear Analysis*, **200**, Article ID:112084. <https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112084>
- [7] Pöschel, J. (2002) On the Construction of Almost Periodic Solutions for a Nonlinear Schrödinger Equation. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **22**, 1537-1549. <https://doi.org/10.1017/s0143385702001086>
- [8] Bourgain, J. (2005) On Invariant Tori of Full Dimension for 1D Periodic NLS. *Journal of Functional Analysis*, **229**, 62-94. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.10.019>
- [9] Niu, H. and Geng, J. (2007) Almost Periodic Solutions for a Class of Higher-Dimensional Beam Equations. *Nonlinearity*, **20**, 2499-2517. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/20/11/003>
- [10] Geng, J. (2009) Almost Periodic Solutions for a Class of Higher Dimensional Schrödinger Equations. *Frontiers of Mathematics in China*, **4**, 463-482. <https://doi.org/10.1007/s11464-009-0029-1>
- [11] Geng, J. (2012) Invariant Tori of Full Dimension for a Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Differential Equations*, **252**, 1-34. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.09.006>
- [12] Geng, J. and Xu, X. (2013) Almost Periodic Solutions of One Dimensional Schrödinger Equation with the External Parameters. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **25**, 435-450. <https://doi.org/10.1007/s10884-013-9302-9>
- [13] Cong, H., Mi, L., Shi, Y. and Wu, Y. (2019) On the Existence of Full Dimensional KAM Torus for Nonlinear Schrödinger Equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **39**, 6599-6630. <https://doi.org/10.3934/dcds.2019287>
- [14] Cong, H. and Yuan, X. (2021) The Existence of Full Dimensional Invariant Tori for 1-Dimensional Nonlinear Wave Equation. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **38**, 759-786. <https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2020.09.006>
- [15] Massetti, J.E., Procesi, M. and Biasco, L. (2021) Almost Periodic Invariant Tori for the NLS on the Circle. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **38**, 711-758. <https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2020.09.003>
- [16] Biasco, L., Massetti, J.E. and Procesi, M. (2023) Small Amplitude Weak Almost Periodic Solutions for the 1D NLS. *Duke Mathematical Journal*, **172**, 2643-2714. <https://doi.org/10.1215/00127094-2022-0089>
- [17] Pöschel, J. (1996) A KAM-Theorem for Some Nonlinear Partial Differential Equations. *Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze*, **23**, 119-148. http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1996_4_23_1_119_0