Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(11), 4753-4760
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311457

求解$\mathcal{M}$张量多线性系统的一种新预处理Richardson迭代法

苟小飞

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年10月1日；录用日期：2024年10月25日；发布日期：2024年11月4日

摘 要

Richardson迭代法是求解$\mathcal{M}$张量多线性系统的一种有效方法。为了进一步加快其收敛速度，本文给出一个新的预处理子并提出一种新预处理Richardson迭代法。理论上证明所提预处理Richardson迭代法的收敛性。最后，通过数值例子验证该方法的有效性和可行性。

关键词

多线性系统，$\mathcal{M}$张量，Richardson迭代法，预处理子，收敛性

A New Preconditioned Richardson Iterative Method for Solving Multi-Linear Systems with $\mathcal{M}$-Tensors

Xiaofei Gou

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Oct. 1st, 2024; accepted: Oct. 25th, 2024; published: Nov. 4th, 2024

Abstract

The Richardson iterative method is an effective method for solving multi-linear systems with $\mathcal{M}$-tensors. In this paper, a new preconditioner and new preconditioned Richardson iterative method are proposed to accelerate the convergence of multi-linear systems with $\mathcal{M}$-tensors. In the theory, the convergence of the preconditioned Richardson iterative method is proved. Finally, a numerical example is given to verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

文章引用：苟小飞. 求解$\mathcal{M}$张量多线性系统的一种新预处理 Richardson 迭代法[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 4753-4760. DOI: 10.12677/aam.2024.1311457

Keywords

Multi-Linear Systems, $\mathcal{M}$-Tensor, Richardson Iteration Method, Preconditioner, Convergence

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

考虑下面的多线性系统

$$\mathcal{A}x^{m-1}=b, \tag{1}$$

其中 $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个 m 阶 n 维的张量， $x\in\mathbb{R}^{n}$ 是一个 n 维向量。张量向量积的第 i 个分量被定义为

$$\left(\mathcal{A}x^{m-1}\right)_i=\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

多线性系统在偏微分方程[1]，张量互补问题[2] [3]，张量特征值问题[4]，信息处理[5] [6]和高阶马尔可夫链[7]等方面有着广泛的应用。

对于多线性系统已经有一些理论结果和数值算法。2016 年，Ding 和 Wei [1]首先证明了 $\mathcal{M}$ 张量多线性系统具有唯一正解，从而确定了 $\mathcal{M}$ 张量多线性系统解的存在性。在数值解法方面，有全局二次收敛算法[8]，同伦方法[9]，张量分裂法[10]，基于神经网络的方法[11]，Richardson 及其预处理迭代法[12]，张量方法[13]和非线性共轭梯度法[14]等。为了进一步提高算法的效率，2018 年，Li 和 Liu [15]把多线性系统和预处理技术结合起来，有了下面的预处理多线性系统

$$P\mathcal{A}x^{m-1}=Pb, \tag{2}$$

其中， P 是一个非奇异矩阵，被称为预处理子。

在本文中，我们研究的是求解 $\mathcal{M}$ 张量多线性系统的一种新预处理 Richardson 迭代法。文章结构组织如下，在第二节，我们给出了一些相关的预备知识。在第三节，我们给出了 Richardson 迭代法和其预处理形式，并提出新预处理 Richardson 迭代法。在第四节，我们分析了新预处理 Richardson 迭代法的收敛性。在第五节，我们给出了一个数值例子来验证所提方法的有效性和可行性。在最后一节，我们给出一些结论。

2. 预备知识

在这一节，我们将给出有关 $\mathcal{M}$ 张量相关的定义，引理和定理，这将在后续的章节中用到。

定义 2.1 [16] 设 $\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)\in C^{[m,n]}$， $i_1,i_2,\cdots i_m=1,2,\cdots n$， 其元素 $a_{ii\cdots i}$ (其中 $1\le i\le n$)被称为对角元素，其余元素被称为非对角元素。当且仅当其非对角元素为零时， $\mathcal{A}$ 是一个对角张量。如果张量 $\mathcal{A}$ 中的所有元素 $a_{i_1i_2\cdots i_m}\ge 0$， 则 $\mathcal{A}$ 是一个非负张量。

定义 2.2 [17] 设 $\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)\in R^{[m,n]}$， 张量 $\mathcal{A}$ 的主化矩阵 $M\left(\mathcal{A}\right)$ 是一个 $n\times n$ 的矩阵，其元素 $M\left(\mathcal{A}\right)_{ij}=a_{ij\cdots j}$， 其中 $i,j=1,2,\cdots n.$

定义 2.3 [18] [19] 设 $\mathcal{A}=\left(a_{i_1i_2\cdots i_m}\right)\in R^{[m,n]}$， 如果张量 $\mathcal{A}$ 的非对角元素都是非正的，则 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{Z}$ 张量。如果存在一个非负张量 $\mathcal{B}$ 和一个正实数 $\eta\ge\rho\left(\mathcal{B}\right)$， 使得

$$\mathcal{A} = \eta \mathcal{I} - \mathcal{B},$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{M}$ 张量，其中 $\mathcal{I}$ 是单位张量。如果 $\eta > \rho(\mathcal{B})$，则称 $\mathcal{A}$ 是一个强(非奇异) $\mathcal{M}$ 张量。

定理 2.1 [18] 设 $\mathcal{A} = \left(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \in R^{[m,n]}$，如果 $(\lambda, x) \in C \times \left\{C^n \setminus \{0\}\right\}$ 满足以下方程，则它是 $\mathcal{A}$ 的一个特征对(特征值－特征向量)

$$\mathcal{A}x^{m-1} = \lambda x^{[m-1]},$$

其中 $x^{[m-1]} = \left(x_1^{m-1}, x_2^{m-1}, \cdots, x_n^{m-1}\right)^{\mathrm{T}}$。如果 $(\lambda, x) \in R \times \left\{R^n \setminus \{0\}\right\}$，则它是一个 H-特征对。$\mathcal{A}$ 的谱半径用 $\rho(\mathcal{A})$ 表示，定义为 $\rho(\mathcal{A}) = \max\left\{|\lambda| \middle| \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\right\}$，其中 $\sigma(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的所有特征值的集合。

定理 2.2 [1] 如果 $\mathcal{A}$ 是一个强 $\mathcal{M}$ 张量，那么对于每一个正向量 b，多线性系统 $\mathcal{A}x^{m-1} = b$ 都有一个唯一的正解。

定义 2.4 [10] 设 $\mathcal{A}$，$\mathcal{E}$，和 $\mathcal{F}$ 是相同阶数和维度的张量，如果 $\mathcal{E}$ 是左非奇异的，则 $\mathcal{A} = \mathcal{E} - \mathcal{F}$ 是

(1) $\mathcal{A}$ 的一个分裂；

(2) 一个正则分裂，如果 $M(\mathcal{E})^{-1} \geq O$ 且 $\mathcal{F} \geq \mathcal{O}$；

(3) 一个弱正则分裂，如果 $M(\mathcal{E})^{-1} \geq O$ 且 $M(\mathcal{E})^{-1}\mathcal{F} \geq \mathcal{O}$；

(4) 一个收敛分裂，如果 $\rho\left(M(\mathcal{E})^{-1}\mathcal{F}\right) < 1$。

在这里，O 和 $\mathcal{O}$ 通常用来表示零矩阵和零张量。

引理 2.1 [3] 如果 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{Z}$ 张量，下面的条件是等价的

(1) $\mathcal{A}$ 是一个强 $\mathcal{M}$ 张量；

(2) 存在一个可逆正定 Z-矩阵 B 和一个半正的 $\mathcal{Z}$ 张量 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{A} = B\mathcal{C}$；

(3) $\mathcal{A}$ 有一个收敛的(弱)正则分裂；

(4) $\mathcal{A}$ 的所有的(弱)正则分裂是收敛的。

定理 2.3 [12] $\mathcal{A}x^{m-1} = b$ 是一个多线性系统，其中 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ 是一个强 $\mathcal{M}$ 张量，$b > 0$，精确解 $x_* > 0$。如果 $\alpha \in \left(0, \min\limits_{\lambda \in \sigma(C)} \dfrac{2\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}\right)$，那么迭代法(4)是收敛的，其中 $C = \left(diag\left(\boldsymbol{x}_*^{[m-2]}\right)\right)^{-1} \mathcal{A}\boldsymbol{x}^{m-2}$，$\sigma(C)$ 是矩阵 C 的特征值。

3. Richardson 迭代法和新预处理 Richardson 迭代法

在本节中，我们将给出 Richardson 迭代法和其预处理形式，并提出新预处理 Richardson 迭代法。

2023 年，Liang [12]已经提出了多线性系统的 Richardson 迭代法及其预处理的迭代形式。首先，多线性系统(1)可以表示成下面的不动点问题

$$\mathcal{I}x^{m-1} = (\mathcal{I} - \alpha\mathcal{A})x^{m-1} + \alpha b, \tag{3}$$

其中，α 是一个参数，$\alpha > 0$，$\mathcal{I}$ 是单位张量。根据(3)式，Richardson 迭代法被定义为

$$\mathcal{I}x_{k+1}^{m-1} = \mathcal{I}x_k^{m-1} + \alpha\left(b - \mathcal{A}x_k^{m-1}\right), k = 0,1,2,\cdots, \tag{4}$$

其中，x_0 是初始向量，$b - \mathcal{A}x_k^{m-1}$ 是第 k 次迭代时的误差。

2018 年 Li 等人[15]提出了预处理子 $P_1 = I + S_\beta$，其中

$$S_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_1 a_{12\cdots2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 a_{23\cdots3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta_{n-1} a_{(n-1)n\cdots n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$\beta_j \in [0,1]$， $j=1,2,\cdots,n-1$。2020 年 Liu 等人[20]提出了又提出了预处理子 $P_2 = I + R_\beta$，其中

$$R_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta_1 a_{21\cdots1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{n-2} a_{(n-1)1\cdots1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta_{n-1} a_{n1\cdots1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$\beta_j \in [0,1]$， $j=1,2,\cdots,n-1$。后来，Cui 等人[21]在同一年再次提出了另一个预处理子 $P_3 = I + T_\beta$，其中

$$T_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_1 a_{12\cdots2} & -\beta_2 a_{13\cdots3} & \cdots & -\beta_{n-1} a_{1n\cdots n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$\beta_j \in [0,1]$， $j=1,2,\cdots,n-1$。我们知道，以上三种预处理子是结合张量分裂法来求解多线性系统的有效方法。2023 年，Liang [12]把以上三种预处理子和 Richardson 迭代法结合起来，用预处理 Richardson 迭代法求解了 $\mathcal{M}$ 张量多线性系统。由(2)式和(4)式我们知道，预处理的 Richardson 迭代法被定义为

$$\mathcal{I}x_{k+1}^{m-1} = \mathcal{I}x_k^{m-1} + \alpha P\left(b - \mathcal{A}x_k^{m-1}\right), k = 0,1,2,\cdots, \tag{5}$$

其中， $\alpha P\mathcal{A}$ 是一个张量， αPb 是一个向量。不同的预处理子 P 对多线性系统有不同的预处理效果，当选择合适且有效的预处理子时，可以有效改变迭代法的收敛速度，从而极大地提高求解多线性系统的效率。

在本文中，我们提出一个新的预处理子 $P = I + H_\beta$，它是一个一般的预处理子，其中

$$H_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_{12} a_{12\cdots2} & -\beta_{13} a_{13\cdots3} & \cdots & -\beta_{1n} a_{1n\cdots n} \\ -\beta_{21} a_{21\cdots1} & 0 & -\beta_{23} a_{23\cdots3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{(n-1)1} a_{(n-1)1\cdots1} & 0 & 0 & \cdots & -\beta_{(n-1)n} a_{(n-1)n\cdots n} \\ -\beta_{n1} a_{n1\cdots1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$\beta_{ij} \in [0,1]$，$i,j=1,2,\cdots,n$。如果给非奇异矩阵 P 的某些位置取 0 元素，它就会变成以上的几种预处理子。当 $\beta_{ij} = \begin{cases} \beta_{ij}, & j=i+1 \\ 0, & j \neq i+1 \end{cases}$，我们提出的预处理子就变成了 P_1。当 $\beta_{ij} = \begin{cases} \beta_{ij}, & j=1, i=2,3,\cdots,n \\ 0, & j\neq 1, i=1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$，我们提出的预处理子就变成了 P_2。当 $\beta_{ij} = \begin{cases} \beta_{ij}, & i=1, j=2,3,\cdots,n \\ 0, & i\neq 1, j=1,2,\cdots,n \end{cases}$，我们提出的预处理子就变成了 P_3。我们把新提出的预处理子 $P = I + H_\beta$ 和(5)式结合起来就得到新预处理 Richardson 迭代法。

4. 新预处理 Richardson 迭代法的收敛性

为了加快本文提出的新预处理 Richardson 迭代法的收敛速度，我们对具有正向量 b 的强 $\mathcal{M}$ 张量多线性系统采用了预处理子 P， 下面的引理 3.1 和定理 3.4 保证了多线性系统(1)正解的不变性。

引理 3.1 [12] 如果张量$\mathcal{A}$是一个强$\mathcal{M}$张量，那么对于任意的$\alpha>0$，$\alpha\mathcal{A}$也是一个强$\mathcal{M}$张量。

定理 3.4 设$\mathcal{A}$是m阶n维强$\mathcal{M}$张量，b是n维正向量。然后预处理的多线性系统$\alpha P\mathcal{A}x^{m-1}=\alpha Pb$与原系统$\mathcal{A}x^{m-1}=b$具有相同的唯一正解。

证明 首先，我们证明$P\mathcal{A}$是一个强$\mathcal{M}$张量，考虑它的非对角元素

$$\hat{a}_{ji_2\cdots i_m}=\begin{cases}a_{ji_2\cdots i_m}-\sum_{j_2=2}^{n}\beta_{(j_2-1)j_2}a_{j_2-1j_2\cdots j_2}a_{j_2i_2\cdots i_m}, & j=1\\ a_{ji_2\cdots i_m}-\beta_{j(j+1)}a_{jj+1\cdots j+1}a_{j+1i_2\cdots i_m}-\beta_{j1}a_{j1\cdots 1}a_{1i_2\cdots i_m}, & 2\le j\le n-1\\ a_{ji_2\cdots i_m}-\beta_{j1}a_{j1\cdots 1}a_{1i_2\cdots i_m}, & j=n\end{cases}$$

当$(j,i_2,\cdots,i_m)\neq(j,j,\cdots,j)$，$\beta_{ij}\in[0,1]$，我们有$\hat{a}_{ji_2\cdots i_m}\le 0$，那么$P\mathcal{A}$是一个$\mathcal{Z}$张量。我们将$\mathcal{A}$分裂为$\mathcal{A}=\mathcal{I}-\mathcal{L}-\mathcal{F}$，令$P\mathcal{A}=\tilde{\mathcal{E}}-\tilde{\mathcal{F}}$，那么$\tilde{\mathcal{E}}=(I+H_\beta)(\mathcal{I}-\mathcal{L})$，$\tilde{\mathcal{F}}=(I+H_\beta)\mathcal{F}$，显然，$\tilde{\mathcal{A}}=\tilde{\mathcal{E}}-\tilde{\mathcal{F}}$，$\tilde{\mathcal{F}}\ge\mathcal{O}$。因为$M(\tilde{\mathcal{E}})^{-1}\tilde{\mathcal{F}}=(I-L)^{-1}(I+H_\beta)^{-1}(I+H_\beta)\mathcal{F}=(I+L)^{-1}\mathcal{F}\ge\mathcal{O}$，其中$I$是单位矩阵，$-L$是主化矩阵$M(\mathcal{E})$的严格下三角部分，所以$\tilde{\mathcal{A}}=\tilde{\mathcal{E}}-\tilde{\mathcal{F}}$是一个弱正则分裂，又$\mathcal{A}$是一个强$\mathcal{M}$张量，根据定义 2.4 的等价条件和引理 2.1，我们证明了$P\mathcal{A}$是一个强$\mathcal{M}$张量。由引理 3.1 我们知道$P\mathcal{A}$是一个强$\mathcal{M}$张量，那么，$\alpha P\mathcal{A}$也是一个强$\mathcal{M}$张量。显然，$b>0$，那么$\alpha b>0$，根据定理 2.2，可以证明预处理的多线性系统$\alpha P\mathcal{A}x^{m-1}=\alpha Pb$与原系统$\mathcal{A}x^{m-1}=b$具有相同的唯一正解。

接下来我们分析新预处理 Richardson 迭代法的收敛性。

引理 3.2 设$\mathcal{A}$是一个强$\mathcal{M}$张量，$\tilde{\mathcal{A}}=\alpha P\mathcal{A}$，$\alpha\in\left(0,\frac{1}{\max_{i\in\langle n\rangle}a_{ii\cdots i}}\right]$，$\beta_{ij}\in[0,1]$，$i,j=1,2,\cdots,n$。

那么，$\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{I}-(\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}})$是$\tilde{\mathcal{A}}$的一个正则分裂。

证明 首先，$\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{I}-(\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}})$是$\tilde{\mathcal{A}}$的一个分裂，根据定义 2.2，我们知道$M(\mathcal{I})$是一个单位矩阵，单位张量$\mathcal{I}$是左非奇异的，$M(\mathcal{I})^{-1}=I\ge O$，我们只需要证明$\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{I}-\alpha P\mathcal{A}\ge\mathcal{O}$，因为$\tilde{\mathcal{A}}=\alpha P\mathcal{A}$是一个强$\mathcal{M}$张量，$\tilde{\mathcal{A}}$的非对角元素是非正的，这表明张量$\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}}$的非对角元素的非负的，接下来，我们考虑张量$\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}}$的对角元素。因为$P=I+H_\beta$，$\tilde{\mathcal{A}}=\alpha P\mathcal{A}$，所以

$$\hat{a}_{jj\cdots j}=\begin{cases}\alpha a_{jj\cdots j}-\alpha\sum_{j_2=2}^{n}\beta_{j_2-1j_2}a_{j_2-1j_2\cdots j_2}a_{j_21\cdots 1}, & j=1\\ \alpha a_{jj\cdots j}-\alpha\beta_{jj+1}a_{jj+1\cdots j+1}a_{j+1j\cdots j}-\alpha\beta_{j1}a_{j1\cdots 1}a_{1j\cdots j}, & 2\le j\le n-1\\ \alpha a_{jj\cdots j}-\alpha\beta_{j1}a_{j1\cdots 1}a_{1j\cdots j}, & j=n\end{cases}$$

又$\alpha\in\left(0,\frac{1}{\max_{i\in\langle n\rangle}a_{ii\cdots i}}\right]$，所以$1-\hat{a}_{jj\cdots j}\ge 0$，张量$\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}}$的对角元素是非负的，我们证明了$\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{I}-\alpha P\mathcal{A}\ge\mathcal{O}$，又$M(\mathcal{I})^{-1}=I\ge O$，所以$\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{I}-(\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}})$是$\tilde{\mathcal{A}}$的一个正则分裂。

定理 3.5 设$\mathcal{A}$是一个强$\mathcal{M}$张量，$\tilde{\mathcal{A}}=\alpha P\mathcal{A}$，其中，$\alpha\in\left(0,\frac{1}{\max_{i\in\langle n\rangle}a_{ii\cdots i}}\right]$，那么$\rho(\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}})<\rho(\mathcal{I}-\alpha\mathcal{A})<1$。

证明 因为$\alpha\in\left(0,\frac{1}{\max_{i\in\langle n\rangle}a_{ii\cdots i}}\right]$，我们有$\mathcal{I}-\alpha\mathcal{A}\ge\mathcal{O}$，根据定理 2.1，存在$\lambda\ge 0$和一个非负向量$y\neq 0$满

足$\lambda \le \rho(\mathcal{I}-\alpha\mathcal{A})<1$，此时：

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}})\boldsymbol{y}^{m-1}-\lambda\boldsymbol{y}^{[m-1]}&=(\mathcal{I}-\alpha P\mathcal{A})\boldsymbol{y}^{m-1}-\lambda\boldsymbol{y}^{[m-1]}\\&=(1-\lambda)\boldsymbol{y}^{[m-1]}-\alpha P\mathcal{A}\boldsymbol{y}^{m-1}\\&=(1-\lambda)\boldsymbol{y}^{[m-1]}-P(1-\lambda)\boldsymbol{y}^{[m-1]}\\&=(I-P)(1-\lambda)\boldsymbol{y}^{[m-1]}.\end{aligned}\tag{6}$$

根据定理 2.3，我们有$\lambda \le \rho(\mathcal{I}-\alpha\mathcal{A})<1$。因为$\lambda<1$且$y\ne 0$，根据(6)式，有$(\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}})y^{m-1}<\lambda y^{[m-1]}$，所以$\rho(\mathcal{I}-\tilde{\mathcal{A}})<\lambda\le\rho(\mathcal{I}-\alpha\mathcal{A})<1$。

根据定理 3.5，我们可以得出结论，新预处理的 Richardson 迭代法比 Richardson 迭代方法收敛得更快。

5. 数值实验

在本节中，我们给出一个数值例子，分别从迭代步数(“IT”)和运行时间(“CPU”)来验证所提方法的可行性和有效性。在计算过程时，我们给定的误差界是 1 × 10^{-11}，迭代的最大次数是 2000，当误差小于给定的误差界或迭代步数超过迭代的最大步数时，迭代终止。以下数值结果是 1.80 GHZ 的中央处理器(Intel(R)Core(TM)i7-8550U)和内存为 8 GB 的个人计算机在 Windows11 环境下使用 MATLABR2023a 进行计算的。

例 5.1. 我们构造一个三阶三维$\mathcal{M}$张量的多线性系统。首先，我们使用 MATLAB 随机生成一个三阶三维的非负张量$\mathcal{B}$。

$$\mathcal{B}_{(1)}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}a_{111}&a_{121}&a_{131}&a_{112}&a_{122}&a_{132}&a_{113}&a_{123}&a_{133}\\a_{211}&a_{221}&a_{231}&a_{212}&a_{222}&a_{232}&a_{213}&a_{223}&a_{233}\\a_{311}&a_{321}&a_{331}&a_{312}&a_{322}&a_{332}&a_{313}&a_{323}&a_{333}\end{array}\right)$$
$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0.9528&0.5982&-0.8368&-0.3758&-0.1995&-0.9102&-0.0344&-0.0595&-0.3123\\-0.7040&-0.8407&-0.5187&-0.8985&0.3031&-0.5252&-0.7153&-0.6270&-0.5226\\-0.9538&-0.4428&-0.0222&-0.4290&-0.5382&-0.3068&-0.7687&-0.2651&0.4086\end{array}\right),$$

其中$\mathcal{B}_{(1)}$表示的是按模 1 把张量展开。接下来，我们定义标量

$$s=(1+\varepsilon)\cdot\max_{i=1,2,\cdots,n}\left(\mathcal{B}\boldsymbol{e}^2\right),\quad \varepsilon>0.$$

在这里，我们取$e=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\varepsilon=0.05$，$b=[9,14,13]^{\mathrm{T}}$。然后由$\mathcal{A}=s\mathcal{I}-\mathcal{B}$，我们得到张量$\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_{(1)}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}a_{111}&a_{121}&a_{131}&a_{112}&a_{122}&a_{132}&a_{113}&a_{123}&a_{133}\\a_{211}&a_{221}&a_{231}&a_{212}&a_{222}&a_{232}&a_{213}&a_{223}&a_{233}\\a_{311}&a_{321}&a_{331}&a_{312}&a_{322}&a_{332}&a_{313}&a_{323}&a_{333}\end{array}\right)$$
$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}4.9856&-0.5981&-0.8368&-0.3758&-0.1995&-0.9102&-0.0344&-0.0595&-0.3123\\-0.7040&-0.8407&-0.5187&-0.8985&5.6353&-0.5252&-0.7153&-0.6270&-0.5226\\-0.9538&-0.4428&-0.0222&-0.4290&-0.5382&-0.3068&-0.7687&-0.2651&5.5297\end{array}\right)$$

表 1 显示了五种不同的 Richardson 迭代法求解$\mathcal{M}$张量多线性系统的迭代次数(“IT”)和计算时间(“CPU”)。P_1R，P_2R，P_3R和PR分别表示的是带有预处理子P_1，P_2，P_3和P的 Richardson 迭代法，P_1，P_2，P_3和P在第四节已经给出。

Table 1. Numerical results
表 1. 数值结果

	Richardson		P_1R		P_2R		P_3R		PR	
α	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
0.04	381	0.005645	316	0.002217	250	0.005570	287	0.004143	216	0.003131
0.08	183	0.004595	151	0.002090	120	0.001249	136	0.002655	100	0.001596
0.12	117	0.001367	96	0.001267	78	0.000804	86	0.001345	60	0.001181
0.16	84	0.001575	68	0.000902	59	0.000919	60	0.000930	41	0.000655
0.20	64	0.000919	51	0.000708	48	0.000886	45	0.000545	30	0.000566
0.24	51	0.002115	40	0.000587	43	0.000607	40	0.000390	22	0.000565
0.28	102	0.001560	55	0.000683	98	0.001400	102	0.000968	17	0.000231
0.32	2000	0.053824	136	0.001851	2000	0.036499	2000	0.048126	20	0.000311

在表 1 中，参数 $\alpha \in (0, 0.32]$，步长为 0.04，从表中可以看出，当迭代步数达到最大的迭代步数时，P_2R，P_3R 两种方法还没有收敛到精确解。我们提出的新预处理 Richardson (PR)的迭代步数和计算时间在计算过程中都是最小的，因此，不难看出该方法是最有效的。

6. 总结

本文提出了一个新的预处理子并给出了一种新预处理 Richardson 迭代法，然后证明了该方法的收敛性和有效性。通过将新预处理 Richardson 迭代法与以往研究中的四种方法进行比较，结果表明，在迭代步数和 CPU 方面，我们所提出的方法更好一点，有效改变了 Richardson 迭代法的收敛速度，在张量特征值和张量互补问题有一定的应用。然而，不同的预处理子对多线性系统有不同的预处理效果，我们只考虑了一个预处理子。在今后的研究中，我们可以考虑其它的预处理子对多线性系统的预处理效果，同时也可以研究包括预处理技术更多的加速方法。

参考文献

[1] Ding, W. and Wei, Y. (2016) Solving Multi-Linear Systems with $\mathcal{M}$-Tensors. *Journal of Scientific Computing*, **68**, 689-715. https://doi.org/10.1007/s10915-015-0156-7

[2] Luo, Z., Qi, L. and Xiu, N. (2017) The Sparsest Solutions to $\mathcal{Z}$-Tensor Complementarity Problems. *Optimization Letters*, **11**, 471-482. https://doi.org/10.1007/s11590-016-1013-9

[3] Xu, H.R., Li, D.H. and Xie, S.L. (2019) An Equivalent Tensor Equation to the Tensor Complementarity Problem with Positive Semi-Definite $\mathcal{Z}$-Tensor. *Optimization Letters*, **13**, 685-694.https://doi.org/10.1007/s11590-018-1268-4

[4] Liang, M., Zheng, B. and Zhao, R. (2019) Alternating Iterative Methods for Solving Tensor Equations with Applications. *Numerical Algorithms*, **80**, 1437-1465. https://doi.org/10.1007/s11075-018-0601-4

[5] Yang, J.H., Zhao, X.L., Ji, T.Y., Ma, T.H. and Huang, T.Z. (2020) Low-Rank Tensor Train for Tensor Robust Principal Component Analysis. *Applied Mathematics and Computation*, **367**, Article 124783. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124783

[6] Yang, J., Zhao, X., Mei, J., Wang, S., Ma, T. and Huang, T. (2019) Total Variation and High-Order Total Variation Adaptive Model for Restoring Blurred Images with Cauchy Noise. *Computers & Mathematics with Applications*, **77**, 1255-1272. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.11.003

[7] Liu, D., Li, W. and Vong, S. (2019) Relaxation Methods for Solving the Tensor Equation Arising from the Higher-Order Markov Chains. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **26**, e2260. https://doi.org/10.1002/nla.2260

[8] He, H., Ling, C., Qi, L. and Zhou, G. (2018) A Globally and Quadratically Convergent Algorithm for Solving Multilinear

Systems with $\mathcal{M}$-Tensors. *Journal of Scientific Computing*, **76**, 1718-1741. https://doi.org/10.1007/s10915-018-0689-7

[9] Han, L. (2017) A Homotopy Method for Solving Multilinear Systems with $\mathcal{M}$-Tensors. *Applied Mathematics Letters*, **69**, 49-54. https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.01.019

[10] Liu, D., Li, W. and Vong, S. (2018) The Tensor Splitting with Application to Solve Multi-Linear Systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **330**, 75-94. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.08.009

[11] Wang, X., Che, M. and Wei, Y. (2019) Neural Networks Based Approach Solving Multi-Linear Systems with $\mathcal{M}$-Tensors. *Neurocomputing*, **351**, 33-42.https://doi.org/10.1016/j.neucom.2019.03.025

[12] Liang, Y., Ibrahim, A. and Omar, Z. (2023) Richardson Iterative Method for Solving Multi-Linear System with $\mathcal{M}$-Tensor. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, **17**, 645-671. https://doi.org/10.47836/mjms.17.4.08

[13] Xie, Z.J., Jin, X.Q. and Wei, Y.M. (2018) Tensor Methods for Solving Symmetric $\mathcal{M}$-Tensor Systems. *Journal of Scientific Computing*, **74**, 412-425. https://doi.org/10.1007/s10915-017-0444-5

[14] Liu, J., Du, S. and Chen, Y. (2020) A Sufficient Descent Nonlinear Conjugate Gradient Method for Solving $\mathcal{M}$-Tensor Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **371**, Article 112709. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112709

[15] Li, W., Liu, D. and Vong, S.W. (2018) Comparison Results for Splitting Iterations for Solving Multi-Linear Systems. *Applied Numerical Mathematics*, **134**, 105-121. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2018.07.009

[16] Qi, L. and Luo, Z. (2017) Tensor Analysis: Spectral Theory and Special Tensors. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[17] Pearson, K. (2010) Essentially Positive Tensors. *International Journal of Algebra*, **4**, 421-427.

[18] Ding, W., Qi, L. and Wei, Y. (2013) $\mathcal{M}$-Tensors and Nonsingular $\mathcal{M}$-Tensors. *Linear Algebra and Its Applications*, **439**, 3264-3278. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.08.038

[19] Zhang, L., Qi, L. and Zhou, G. (2014) $\mathcal{M}$-Tensors and Some Applications. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **35**, 437-452. https://doi.org/10.1137/130915339

[20] Liu, D., Li, W. and Vong, S.W. (2020) A New Preconditioned SOR Method for Solving Multi-Linear Systems with an $\mathcal{M}$-Tensor. *Calcolo*, **57**, Article No. 15. https://doi.org/10.1007/s10092-020-00364-8

[21] Cui, L.B., Zhang, X.Q. and Wu, S.L. (2020) A New Preconditioner of the Tensor Splitting Iterative Method for Solving Multi-Linear Systems with $\mathcal{M}$-Tensors. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, Article No. 173. https://doi.org/10.1007/s40314-020-01194-8