Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(11), 4781-4792
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311460

Hans汉斯

若干凸多胞体图的容错度量维数

宣高闵*，**康　娜**#

河北地质大学数学理教学部，河北　石家庄

收稿日期：2024年10月1日；录用日期：2024年10月25日；发布日期：2024年11月4日

摘　要

图的容错度量维数的概念是由Hernand等人于2008年提出的，它是度量维数的一个新变形，也是图论和组合优化交叉研究的内容，在机器导航、医药化学、组合优化和图像处理等领域有着广泛的应用。由于图的容错度量维数比其度量维数有更好的适应性，所以图的容错度量维数的研究越来越受到人们的关注。对于给定的图和正整数k确定该图的容错度量维数是否不超过k是NP-难的。本文通过构作凸多胞体图B_n，C_n和E_n的容错解析集，得到了当$n \ge 6$时凸多胞体图B_n，C_n和E_n的容错度量维数都为4。这些成果在图论和组合优化中具有重要的理论价值，并在网络电信和图像处理等方面有重要应用。

关键词

度量维数，容错度量维数，凸多胞体图

Fault-Tolerant Metric Dimension of Some Convex Polytope Graphs

Gaomin Xuan*, **Na Kang**#

School of Mathematics and Science, Hebei GEO University, Shijiazhuang Hebei

Received: Oct. 1st, 2024; accepted: Oct. 25th, 2024; published: Nov. 4th, 2024

Abstract

The concept of fault-tolerant metric dimension of a graph was introduced by Hernand *et al.* in 2008. It is a distortion of the metric dimension of a graph and is the intersection of graph theory and combinatorial optimization. It has been widely used in many fields, such as machine navigation, medicinal

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 宣高闵, 康娜. 若干凸多胞体图的容错度量维数[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 4781-4792.
DOI: 10.12677/aam.2024.1311460

chemistry, combinatorial optimization and image processing. The study of fault-tolerant metric dimension of a graph gets more and more attention from people, since it has better adaptability than the metric dimension of a graph. For a given graph and a positive integer *k*, deciding whether its fault-tolerant metric dimension is less than or equal to *k* is an NP-complete problem. In this paper, by constructing the fault-tolerant resolving sets of convex polytope graphs B_n, C_n and E_n, respectively, we obtain their fault-tolerant metric dimensions are all 4 for $n \ge 6$. These results have theoretical value in graph theory and combinatorial optimization and have important applications in network telecommunications, image processing, etc.

Keywords

Metric Dimension, Fault-Tolerant Metric Dimension, Convex Polytope Graphs

1. 引言

设图 G 是一个简单无向的连通图，$V(G)$ 是图 G 的顶点集，$E(G)$ 是图 G 的边集。设顶点 $u,v \in V(G)$，顶点 u 和 v 之间最短路的长度被称为顶点 u,v 之间的距离 $d(u,v)$。设 W 是 $V(G)$ 的一个子集，若对于任意两个顶点 $v_1,v_2 \in V(G)$ 都存在 $x \in W$ 使得 $d(x,v_1) \ne d(x,v_2)$，则称 W 是图 G 的解析集。称基数最小的解析集为图 G 的度量基，其基数叫做图 G 的度量维数，记作 $\dim(G)$。图的度量维数作为图论和组合优化领域的重要组成部分，渐渐地成为了数学以及其他领域学者的热门话题。1953 年，Blumenthal [1]引入了一般空间中度量维数的概念，在此之后，Slater [2]在 1975 年为了确定网络中入侵者的位置，首次提出了解析集和度量维数的概念。随后越来越多的学者加入图度量维数的研究中，目前已经在机器导航[3]、医药化学[4]、组合优化[5]以及图像处理[6]等领域有着广泛的应用。

Hernand 等人[7]提出了度量维数的一个新的变形——容错度量维数。其定义如下：对于图 G 的一个解析集 W_f，对于任意的 $w \in W_f$，如果 $W_f \setminus \{w\}$ 仍是一个解析集，则称 W_f 是图 G 的容错解析集。称基数最小的容错解析集为图 G 的容错度量基，其基数叫做图 G 的容错度量维数，记作 $\dim_f(G)$。对于给定的图 G 和正整数 k，确定 $\dim_f(G) \le k$ 是 NP-难的。容错度量维数在网络电信[8]、药物化学[9] [10]以及机器导航[11]等领域有着进一步的应用。因此，研究图容错度量维数尤其重要。本文研究了凸多胞体图 B_n、C_n 以及 E_n 的容错度量维数。

2. 凸多胞体图 B_n 的容错度量维数

首先介绍凸多胞体图 B_n，凸多胞体图 B_n 有 $5n$ 个点和 $9n$ 条边，如图 1 所示。图 B_n 的顶点集和边集定义如下：

$$V(B_n) = \{a_i, b_i, c_i, d_i, f_i : 1 \le i \le n\};$$

$$\begin{aligned} E(B_n) = &\{a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1}, d_i d_{i+1}, f_i f_{i+1} : 1 \le i \le n\} \\ &\cup \{a_i b_i, b_i c_i, b_{i+1} c_i, c_i d_i, d_i f_i : 1 \le i \le n\}. \end{aligned}$$

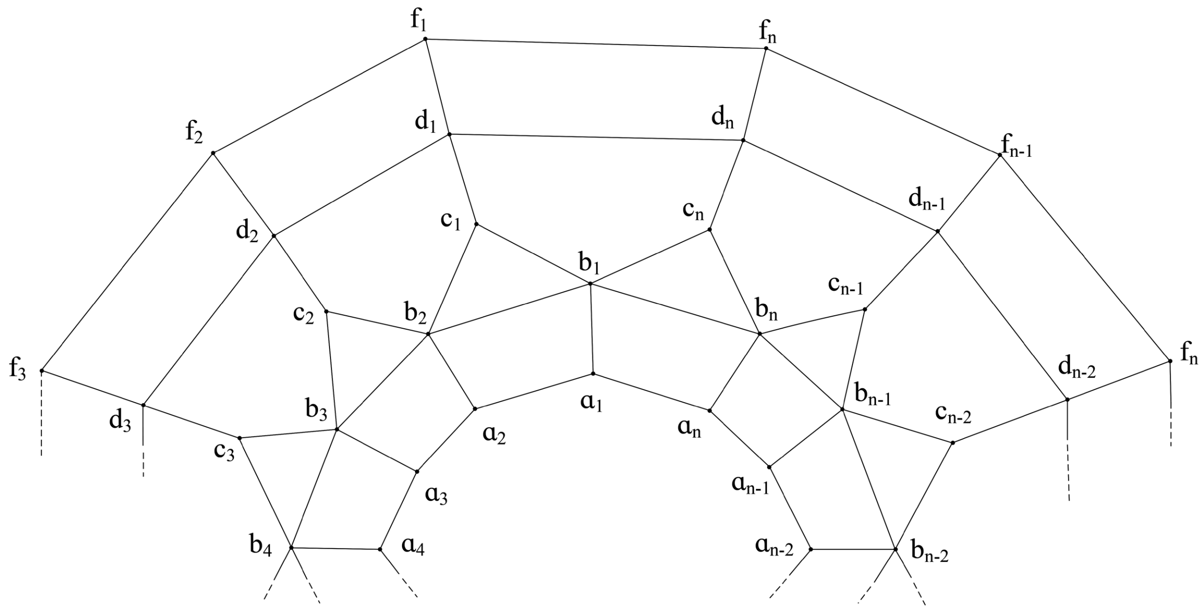

Figure 1. The convex polytope graph B_n
图 1. 凸多胞体图 B_n

引理 1.1 [12] 设 $G=(V,E)$ 是一个简单无向的连通图，则 $\dim_f(G)\geq \dim(G)+1$。

引理 1.2 [13] 当 $n\geq 6$ 时，凸多胞体图 B_n 的度量维数 $\dim(B_n)=3$。

定理 1.1 当 $n\geq 6$ 时，凸多胞体图 B_n 的容错度量维数 $\dim_f(B_n)=4$。

证明：当 $n\geq 6$ 时，设 $W_f=\left\{a_1,a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\right\}$。下面证明 W_f 是凸多胞体图 B_n 的一个容错解析集。B_n 中的每个顶点关于 W_f 的度量表示如下：

$$r(a_i\mid W_f)=\begin{cases}\left(0,1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1\right), & i=1;\\ \left(i-1,i-2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+2\right), & 2\leq i\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,1,0\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2;\\ \left(n-i+1,n-i+2,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq i\leq n;\end{cases}\tag{1}$$

$$r(b_i\mid W_f)=\begin{cases}\left(1,2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right), & i=1;\\ \left(i,i-1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+3\right), & 2\leq i\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,2,1\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2;\\ \left(n-i+2,n-i+3,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\leq i\leq n;\end{cases}\tag{2}$$

$$r\left(c_i \mid W_f\right)=\begin{cases}\left(2,2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right), & i=1;\\ \left(i+1,i,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+3\right), & 2\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,2,2\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(n-i+2,n-i+3,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\le i\le n;\end{cases} \tag{3}$$

$$r\left(d_i \mid W_f\right)=\begin{cases}\left(3,3,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2\right), & i=1;\\ \left(i+2,i+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+3,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4\right), & 2\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,3,3\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(n-i+3,n-i+4,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\le i\le n;\end{cases} \tag{4}$$

$$r\left(f_i \mid W_f\right)=\begin{cases}\left(4,4,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2\right), & i=1;\\ \left(4,4,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+3\right), & i=2;\\ \left(i+2,i+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+5\right), & 3\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+3,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,4,4\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3,4,4\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2;\\ \left(n-i+4,n-i+5,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\le i\le n;\end{cases} \tag{5}$$

从度量表示(1)~(5)可以看出，$V\left(B_n\right)$ 中的任意两个顶点关于集合 W_f 有不同的度量表示，所以 W_f 是图 B_n 的解析集。从 W_f 中任意去掉一个顶点可得 W_f 的四个子集，分别是 $W_1=\left\{a_1,a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\right\}$，$W_2=\left\{a_1,a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\right\}$，$W_3=\left\{a_1,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\right\}$ 和 $W_4=\left\{a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\right\}$。由上面的(1)~(5)可以看出，$V\left(B_n\right)$ 中的任意两个顶点关于 $W_i\left(1\le i\le 4\right)$ 有不同的度量表示，$W_i\left(1\le i\le 4\right)$ 是 B_n 的解析集。由容错解析集的定义可知 W_f 是 B_n 的容错解析集。因此，$\dim_f\left(B_n\right)\le 4$。由引理 1.1 和 1.2，可得 $\dim_f\left(B_n\right)\ge 4$。综上，当 $n\ge 6$ 时，$\dim_f\left(B_n\right)=4$。

3. 凸多胞体图 C_n 的容错度量维数

首先介绍凸多胞体图 C_n，凸多胞体图 C_n 有 $5n$ 个点和 $10n$ 条边，如图 2 所示。图 C_n 的顶点集和边集

定义如下：

$$V(C_n)=\{a_i,b_i,c_i,d_i,f_i:1\le i\le n\};$$

$$E(C_n)=\{a_ia_{i+1},b_ib_{i+1},d_id_{i+1},f_if_{i+1}:1\le i\le n\}$$
$$\cup\{a_ib_i,b_ic_i,c_id_i,d_if_i,b_{i+1}c_i,d_{i+1}f_i:1\le i\le n\}.$$

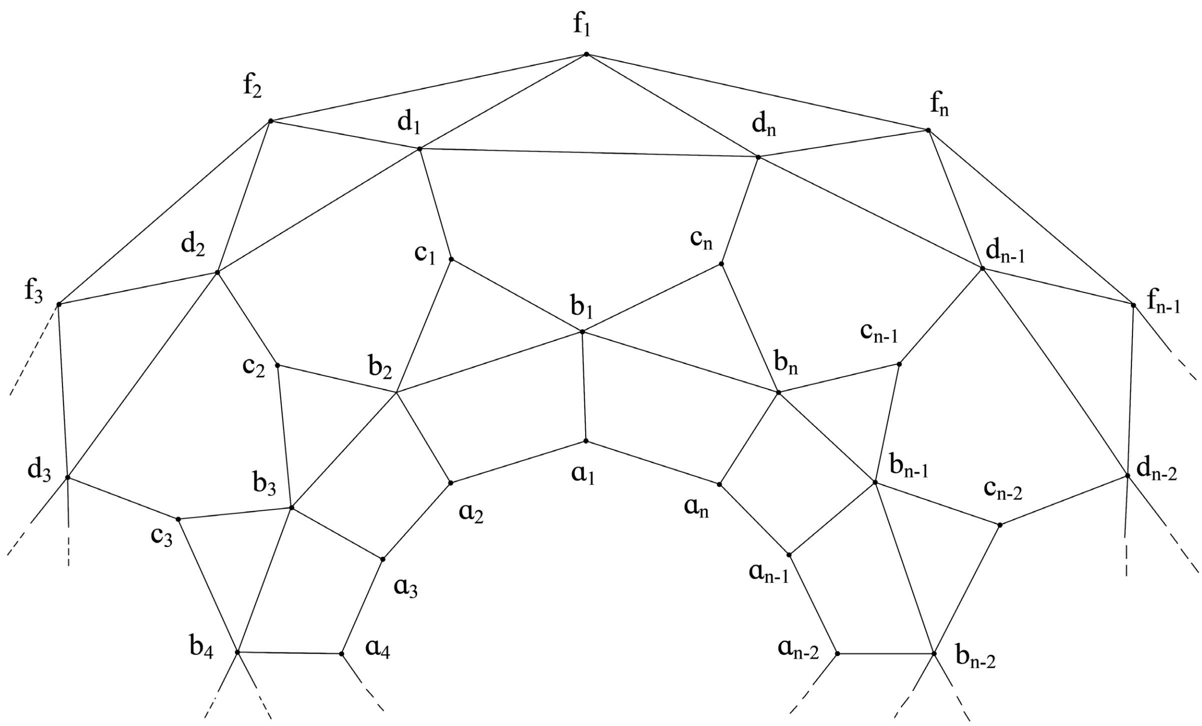

Figure 2. The convex polytope graph C_n
图 2. 凸多胞体图 C_n

引理 2.1 [13] 当 $n\ge 6$ 时，凸多胞体图 C_n 的度量维数 $\dim(C_n)=3$。

定理 2.1 当 $n\ge 6$ 时，凸多胞体图 C_n 的容错度量维数 $\dim_f(C_n)=4$。

证明： 当 $n\ge 6$ 时，设 $W_f=\left\{a_1,a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2}\right\}$。下面证明 W_f 是凸多胞体图 C_n 的一个容错度量解析集。C_n 中的每个顶点关于 W_f 的度量表示如下：

$$r(a_i\mid W_f)=\begin{cases}\left(0,1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1\right), & i=1;\\ \left(i-1,i-2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+2\right), & 2\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,1,0\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2;\\ \left(n-i+1,n-i+2,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\le i\le n;\end{cases}\tag{6}$$

$$r\left(b_i \mid W_f\right)=\begin{cases}\left(1,2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right), & i=1;\\ \left(i,i-1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+3\right), & 2\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,2,1\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2;\\ \left(n-i+2,n-i+3,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\le i\le n;\end{cases}\tag{7}$$

$$r\left(c_i \mid W_f\right)=\begin{cases}\left(2,2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1\right), & i=1;\\ \left(i+1,i,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+3\right), & 2\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,2,2\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(n-i+2,n-i+3,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\le i\le n;\end{cases}\tag{8}$$

$$r\left(d_i \mid W_f\right)=\begin{cases}\left(3,3,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2\right), & i=1;\\ \left(i+2,i+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+3,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4\right), & 2\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,3,3\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(n-i+3,n-i+4,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\le i\le n;\end{cases}\tag{9}$$

$$r\left(f_i \mid W_f\right)=\begin{cases}\left(4,4,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2\right), & i=1;\\ \left(4,4,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\right), & i=2;\\ \left(i+2,i+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+5\right), & 3\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor;\\ \left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3,i+1,4,4\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2,i+1,4,4\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2;\\ \left(n-i+4,n-i+5,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\le i\le n;\end{cases}\tag{10}$$

从度量表示(6)~(10)可以看出，$V(C_n)$ 中的任意两个顶点关于集合 W_f 有不同的度量表示，所以 W_f 是图 C_n 的解析集。从集合 W_f 中任意去掉一个顶点可得 W_f 的四个子集，分别是 $W_1=\left\{a_1,a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\right\}$，$W_2=\left\{a_1,a_2,a_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2}\right\}$，$W_3=\left\{a_1,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2}\right\}$ 和 $W_4=\left\{a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2}\right\}$。由上面的(6)~(10)可以看出，$V(C_n)$ 中的任意两个顶点关于 $W_i(1\le i\le 4)$ 有不同的度量表示，$W_i(1\le i\le 4)$ 是 C_n 的解析集。由容错解析集的定义可知 W_f 是 C_n 的容错解析集。因此，$\dim_f(C_n)\le 4$。由引理 1.1 和 2.1，可得 $\dim_f(C_n)\ge 4$。综上，当 $n\ge 6$ 时，$\dim_f(C_n)=4$。

4. 凸多胞体图 E_n 的容错度量维数

首先给出凸多胞体图 E_n 的定义，凸多胞体图 E_n 有 $5n$ 个点和 $11n$ 条边，如图 3 所示。图 E_n 的顶点集和边集定义如下：

$$V(E_n)=\{a_i,b_i,c_i,d_i,f_i:1\le i\le n\};$$

$$E(E_n)=\{a_ia_{i+1},b_ib_{i+1},d_id_{i+1},f_if_{i+1}:1\le i\le n\}$$
$$\cup\{a_ib_i,b_ic_i,c_id_i,d_if_i,a_{i+1}b_i,b_{i+1}c_i,d_{i+1}f_i:1\le i\le n\}.$$

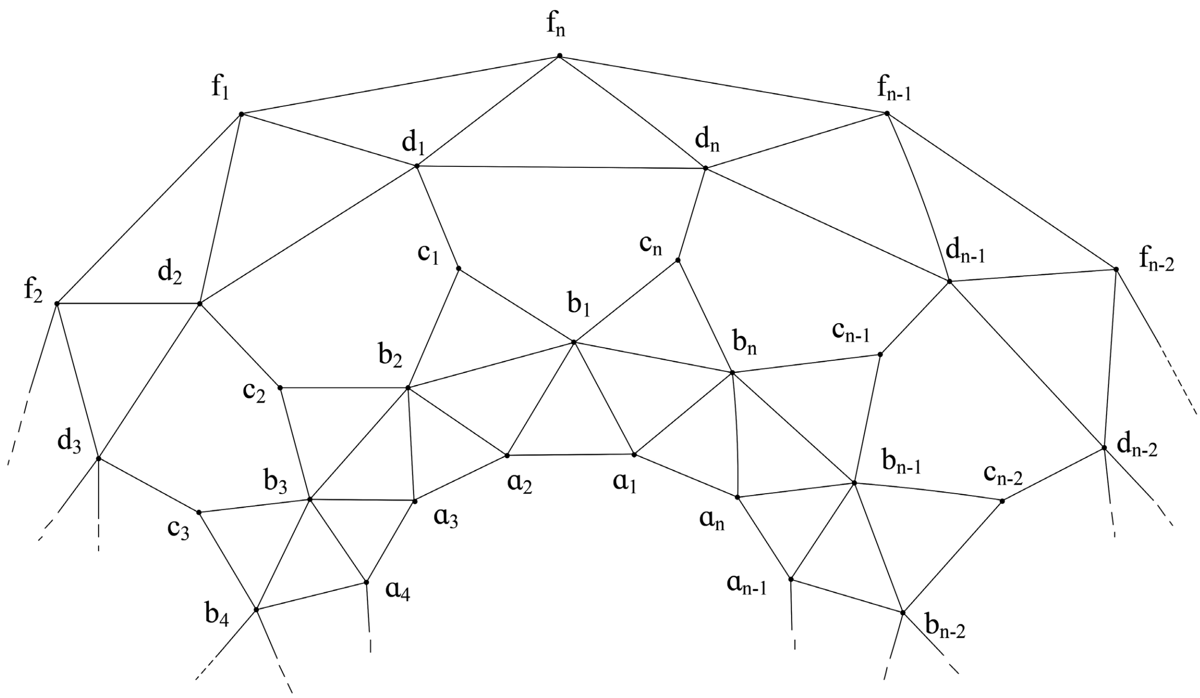

Figure 3. The convex polytope graph E_n
图 3. 凸多胞体图 E_n

引理 3.1 [13] 当 $n\ge 6$ 时，凸多胞体图 E_n 的度量维数 $\dim(E_n)=3$。

定理 3.1 当 $n\ge 6$ 时，凸多胞体图 E_n 的容错度量维数 $\dim_f(E_n)=4$。

证明：(1) 当 $6\le n\le 8$ 时，容易计算，凸多胞体图 E_n 的容错度量基和容错度量维数如表 1 所示。

Table 1. The fault-tolerant metric basis and the fault-tolerant metric dimension of E_n where $6 \le n \le 8$

表 1. $6 \le n \le 8$ 时图 E_n 的容错度量基和容错度量维数

n	E_n 的容错度量基	$\dim_f(E_n)$
6	$\{a_1, a_3, f_1, f_6\}$	4
7	$\{a_1, a_2, a_4, a_6\}$	4
8	$\{a_1, a_3, a_5, a_7\}$	4

(2) 当 $n = 2s+1(s \ge 4)$ 时，设 $W_f = \left\{a_1, a_2, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+3}\right\}$。下面证明 W_f 是凸多胞体图 E_n 的一个容错度量解析集。E_n 中的每个顶点关于 W_f 的度量表示如下：

$$r(a_i \mid W_f) = \begin{cases} \left(i-1, 2-i, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + i - 2\right), & 1 \le i \le 2; \\ \left(i-1, i-2, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 3\right), & 3 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1; \\ \left(n-i+1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 3\right), & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3; \\ \left(n-i+1, n-i+2, i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3\right), & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 4 \le i \le n; \end{cases} \tag{11}$$

$$r(b_i \mid W_f) = \begin{cases} \left(i, 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + i - 1\right), & 1 \le i \le 2; \\ \left(i, i-1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 3\right), & 3 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor; \\ \left(n-i+1, i-1, i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 3\right), & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2; \\ \left(n-i+1, n-i+2, i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right), & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le i \le n; \end{cases} \tag{12}$$

$$r(c_i \mid W_f) = \begin{cases} \left(2, 2, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right), & i = 1; \\ \left(i+1, i, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 3\right), & 2 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1; \\ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, i, 2, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i + 3\right), & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1; \\ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, 3, 2\right), & i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2; \\ \left(n-i+1, n-i+2, i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right), & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \le i \le n-1; \\ \left(2, 2, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), & i = n; \end{cases} \tag{13}$$

$$r\left(d_i \mid W_f\right)=\begin{cases}\left(3,3,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\right), & i=1;\\ \left(i+2,i+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4\right), & 2\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1;\\ \left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,i+1,3,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1;\\ \left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,4,3\right), & i=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2;\\ \left(n-i+2,n-i+3,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\le i\le n-1;\\ \left(3,3,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right), & i=n;\end{cases}\tag{14}$$

$$r\left(f_i \mid W_f\right)=\begin{cases}\left(4,4,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\right), & i=1;\\ \left(i+3,i+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+2,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4\right), & 2\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2;\\ \left(i+3,i+2,4,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+4\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor;\\ \left(n-i+2,n-i+3,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3,4\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2;\\ \left(n-i+2,n-i+3,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right), & \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3\le i\le n-2;\\ \left(4,4,n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-i+2,i-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right), & n-1\le i\le n;\end{cases}\tag{15}$$

从度量表示(11)~(15)可以看出，$V\left(E_n\right)$ 中的任意两个顶点关于集合 W_f 有不同的度量表示，所以 W_f 是图 E_n 的解析集。从集合 W_f 任意去掉一个顶点可得 W_f 的四个子集，分别是 $W_1=\left\{a_1,a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\right\}$，$W_2=\left\{a_1,a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3}\right\}$，$W_3=\left\{a_1,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3}\right\}$ 和 $W_4=\left\{a_2,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3}\right\}$。由上面的(11)~(15)可以看出 $V\left(E_n\right)$ 中的任意两个顶点关于 $W_i\left(1\le i\le 4\right)$ 有不同的度量表示。$W_i\left(1\le i\le 4\right)$ 是 E_n 的解析集。由容错解析集的定义可知 W_f 是 E_n 的容错解析集。因此，$\dim_f\left(E_n\right)\le 4$。结合引理 1.1 和 3.1，可得 $\dim_f\left(E_n\right)\ge 4$。综上，当 $n=2s+1$ $\left(s\ge 4\right)$ 时，$\dim_f\left(E_n\right)=4$。

(3) 当 $n=2s$ $\left(s>4\right)$ 时，设 $W_f=\left\{a_1,a_3,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3}\right\}$。下面证明 W_f 是凸多胞体图 E_n 的一个容错度量解析集。E_n 中的每个顶点关于 W_f 的度量表示如下：

$$r\left(a_i\,|\,W_f\right)=\begin{cases}\left(i-1,3-i,\dfrac{n}{2}-i+1,\dfrac{n}{2}+i-3\right), & 1\le i\le 3;\\ \left(i-1,i-3,\dfrac{n}{2}-i+1,\dfrac{n}{2}-i+3\right), & 4\le i\le \dfrac{n}{2}+1;\\ \left(n-i+1,i-\dfrac{n}{2}+3,i-\dfrac{n}{2}-1,\dfrac{n}{2}-i+3\right), & \dfrac{n}{2}+2\le i\le \dfrac{n}{2}+3;\\ \left(n-i+1,n-i+3,i-\dfrac{n}{2}-1,i-\dfrac{n}{2}-3\right), & \dfrac{n}{2}+4\le i\le n;\end{cases}\tag{16}$$

$$r\left(b_i\,|\,W_f\right)=\begin{cases}\left(i,3-i,\dfrac{n}{2}-i+1,\dfrac{n}{2}+i-2\right), & 1\le i\le 2;\\ \left(i,i-2,\dfrac{n}{2}-i+1,\dfrac{n}{2}-i+3\right), & 3\le i\le \dfrac{n}{2};\\ \left(n-i+1,i-2,i-\dfrac{n}{2},\dfrac{n}{2}-i+3\right), & \dfrac{n}{2}+1\le i\le \dfrac{n}{2}+2;\\ \left(n-i+1,n-i+3,i-\dfrac{n}{2},i-\dfrac{n}{2}-2\right), & \dfrac{n}{2}+3\le i\le n;\end{cases}\tag{17}$$

$$r\left(c_i\,|\,W_f\right)=\begin{cases}\left(i+1,2,\dfrac{n}{2}-i+1,\dfrac{n}{2}+i-1\right), & 1\le i\le 2;\\ \left(i+1,i-1,\dfrac{n}{2}-i+1,\dfrac{n}{2}-i+3\right), & 3\le i\le \dfrac{n}{2}-1;\\ \left(n-i+1,i-1,2,\dfrac{n}{2}-i+3\right), & \dfrac{n}{2}\le i\le \dfrac{n}{2}+1;\\ \left(n-i+1,n-i+3,i-\dfrac{n}{2}+1,2\right), & \dfrac{n}{2}+2\le i\le \dfrac{n}{2}+3;\\ \left(n-i+1,n-i+3,i-\dfrac{n}{2}+1,i-\dfrac{n}{2}-1\right), & \dfrac{n}{2}+4\le i\le n-1;\\ \left(2,3,\dfrac{n}{2}+1,\dfrac{n}{2}-1\right), & i=n;\end{cases}\tag{18}$$

$$r\left(d_i\,|\,W_f\right)=\begin{cases}\left(i+2,3,\dfrac{n}{2}-i+2,\dfrac{n}{2}+i\right), & 1\le i\le 2;\\ \left(i+2,i,\dfrac{n}{2}-i+2,\dfrac{n}{2}-i+4\right), & 3\le i\le \dfrac{n}{2}-1;\\ \left(n+2-i,i,3,\dfrac{n}{2}-i+4\right), & \dfrac{n}{2}\le i\le \dfrac{n}{2}+1;\\ \left(n-i+2,n-i+4,i-\dfrac{n}{2}+2,3\right), & \dfrac{n}{2}+2\le i\le \dfrac{n}{2}+3;\\ \left(n-i+2,n-i+4,i-\dfrac{n}{2}+2,i-\dfrac{n}{2}\right), & \dfrac{n}{2}+4\le i\le n-1;\\ \left(3,4,\dfrac{n}{2}+2,\dfrac{n}{2}\right), & i=n;\end{cases}\tag{19}$$

$$r\left(f_i|W_f\right)=\begin{cases}\left(i+3,4,\dfrac{n}{2}-i+2,\dfrac{n}{2}+2\right), & 1\le i\le 2;\\ \left(i+3,i+1,\dfrac{n}{2}-i+2,\dfrac{n}{2}-i+4\right), & 3\le i\le \dfrac{n}{2}-2;\\ \left(\dfrac{n}{2}+2,i+1,4,\dfrac{n}{2}-i+4\right), & \dfrac{n}{2}-1\le i\le \dfrac{n}{2};\\ \left(n-i+2,\dfrac{n}{2}+2,i-\dfrac{n}{2}+3,4\right), & \dfrac{n}{2}+1\le i\le \dfrac{n}{2}+2;\\ \left(n-i+2,n-i+4,i-\dfrac{n}{2}+3,i-\dfrac{n}{2}+1\right), & \dfrac{n}{2}+3\le i\le n-2;\\ \left(4,n-i+4,\dfrac{n}{2}+2,i-\dfrac{n}{2}+1\right), & n-1\le i\le n;\end{cases} \tag{20}$$

从度量表示(16)~(20)可以看出，$V\left(E_n\right)$中的任意两个顶点关于集合W_f有不同的度量表示，所以W_f是图E_n的解析集。从集合W_f中去掉任意一个顶点可得W_f的四个子集，分别是$W_1=\left\{a_1,a_3,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\right\}$，$W_2=\left\{a_1,a_3,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3}\right\}$，$W_3=\left\{a_1,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3}\right\}$和$W_4=\left\{a_3,a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1},a_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+3}\right\}$。由上面的(16)~(20)可以看出，$V\left(E_n\right)$中的任意两个顶点关于$W_i\left(1\le i\le 4\right)$有不同的度量表示。$W_i\left(1\le i\le 4\right)$是$E_n$的解析集。由容错解析集的定义可知$W_f$是$E_n$的容错解析集。因此，$\dim_f\left(E_n\right)\le 4$。由引理 1.1 和 3.1，可得$\dim_f\left(E_n\right)\ge 4$。综上，当$n=2s$ $\left(s>4\right)$时，$\dim_f\left(E_n\right)=4$。

定理成立。

5. 总结

本文通过构作凸多胞体图B_n，C_n和E_n的容错解析集，证明了当$n\ge 6$时凸多胞体图B_n，C_n和E_n的容错度量维数都为 4。这些成果在图论和组合优化中具有一定的理论价值，并在组合优化、网络电信等方面有重要应用。由引理 1.1 可知，图的容错度量维数大于等于图的度量维数加 1。本文证明了凸多胞体图B_n，C_n和E_n $\left(n\ge 6\right)$的容错度量维数恰好等于其度量维数加 1。一个自然的问题是：是否存在其它凸多胞体图，其容错度量维数大于其度量维数加 1？这将是我们今后继续研究的问题。

基金项目

国家自然基金面上项目(11971146)，河北省创新能力培养资助项目(CXZZSS2024108)。

参考文献

[1] Blumenthal, L.M. (1953) Theory and Applications of Distance Geometry. *The Mathematical Gazette*, **38**, 216-217.

[2] Slater, P.J. (1975) Leaves of Trees. *Congressus Numerantium*, **14**, 549-559.

[3] Khuller, S., Raghavachari, B. and Rosenfeld, A. (1996) Landmarks in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **70**, 217-229. https://doi.org/10.1016/0166-218x(95)00106-2

[4] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A. and Oellermann, O.R. (2000) Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **105**, 99-113. https://doi.org/10.1016/s0166-218x(00)00198-0

[5] Sebő, A. and Tannier, E. (2004) On Metric Generators of Graphs. *Mathematics of Operations Research*, **29**, 383-393. https://doi.org/10.1287/moor.1030.0070

[6] Melter, R.A. and Tomescu, I. (1984) Metric Bases in Digital Geometry. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*,

25, 113-121. https://doi.org/10.1016/0734-189x(84)90051-3

[7] Hernando, C., Mora, M., Slater, P.J., *et al*. (2008) Fault-Tolerant Metric Dimension of Graphs. *Convexity in Discrete Structures*, **5**, 81-85.

[8] Raza, H., Hayat, S. and Pan, X. (2018) On the Fault-Tolerant Metric Dimension of Certain Interconnection Networks. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **60**, 517-535. https://doi.org/10.1007/s12190-018-01225-y

[9] Koam, A.N.A., Ahmad, A., Abdelhag, M.E. and Azeem, M. (2021) Metric and Fault-Tolerant Metric Dimension of Hollow Coronoid. *IEEE Access*, **9**, 81527-81534. https://doi.org/10.1109/access.2021.3085584

[10] Sharma, S.K. and Bhat, V.K. (2021) Fault-Tolerant Metric Dimension of Two-Fold Heptagonal-Nonagonal Circular Ladder. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, **14**, Article ID: 2150132. https://doi.org/10.1142/s1793830921501329

[11] Hamilton, D.L., Walker, I.D. and Bennett, J.K. (1996) Fault Tolerance versus Performance Metrics for Robot Systems. *Reliability Engineering & System Safety*, **53**, 309-318. https://doi.org/10.1016/s0951-8320(96)00041-5

[12] Chaudhry, M.A., Javaid, I. and Salman, M. (2010) Fault-Tolerant Metric and Partition Dimension of Graphs. *Utilitas Mathematica*, **83**, 187-199.

[13] Imran, M., Bokhary, S.A.U.H. and Baig, A.Q. (2016) On the Metric Dimension of Rotationally-Symmetric Convex Polytopes. *Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications*, **3**, 45-59. https://doi.org/10.13069/jacodesmath.47485