Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2024, 13(12), 5268-5274**
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1312508

凸集的支持函数与支撑函数的关系

梅　红，成开劲，罗　淼*

贵州师范大学数学科学学院，贵州　贵阳

收稿日期：2024年11月24日；录用日期：2024年12月18日；发布日期：2024年12月26日

摘　要

本文通过椭圆的支持函数与支撑函数间的关系，研究了一般凸集的支持函数与支撑函数之间的关系，得到了它们之间的代数关系式。

关键词

椭圆，凸集，支持函数，支撑函数

The Relationship between the Support Function 1 and the Support Function 2 of the Convex Set

Hong Mei, Kaijin Cheng, Miao Luo*

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Nov. 24th, 2024; accepted: Dec. 18th, 2024; published: Dec. 26th, 2024

Abstract

In this paper, the relationship between the support function 1 and the support function 2 of the general convex set is studied through the relationship between the support function 1 and the support function 2 of the ellipse, and the algebraic relationship between them is obtained.

Keywords

Ellipse, Convex Set, Support Function 1, Support Function 2

*通讯作者。

文章引用: 梅红, 成开劲, 罗淼. 凸集的支持函数与支撑函数的关系[J]. 应用数学进展, 2024, 13(12): 5268-5274.
DOI: 10.12677/aam.2024.1312508

1. 引言

凸集在几何学中占据重要地位，其对应的支持函数和支撑函数是研究凸集的重要工具。因此探讨同一个凸集的支持函数与支撑函数之间的内在联系具有重要意义。文献[1]研究了一些凸集的支撑函数，但都没有讨论两者之间的关系。本文基于凸集的支持函数和支撑函数的定义，通过对椭圆的支持函数与支撑函数进行研究，得到了椭圆的支持函数和支撑函数之间的关系式，从而对任意凸集的支持函数与支撑函数之间的关系进行了探讨。

2. 预备知识

设 C 为欧氏平面 R^2 上一非空子集，如果当 $A\in C$ 和 $B\in C$ 时，连结 A、B 二点的线段也属于 C，则称 C 为凸集[1]。具有非空内点的凸集称为凸域；紧凸域称为凸体。

在平面直角坐标系 xoy 中，直线 G 的法式方程为

$$G(p,\varphi): x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0\text{，}(0\le p<+\infty\text{，}\ 0\le\varphi<2\pi)$$

其中 p 表示原点到直线 G 的距离，φ 表示从 x 正半轴到直线 G 的法线的角。

定义 1 [2]在平面上任意选取坐标系 xoy，自原点 O 引射线 OR，作垂直于 OR 且与 C 相遇的任一直线 $G_1(p_1,\varphi)$，集 $\{p_1\}$ 之上确界记为 p，即

$$p=\sup\{p_1: G_1(p_1,\varphi)\cap C\ne\varnothing\}\text{，}$$

其中记号 $G_1\cap C\ne\varnothing$ 表示“G_1 与 C 的交为非空”，即 G_1 与 C 相交的意思。直线 $G(p,\varphi)$ 为 C 的支持线，称为 C 沿 φ 方向的支持线。函数 $p(\varphi)$ 称为凸集 C 的支持函数。

定义 2 [3]设 C 为欧氏平面 R^2 中的一个紧凸集，它的支撑函数 $h(C,\cdot): R^2\to R$ 可以定义为

$$h(C,\boldsymbol{x})=\max\{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}:\boldsymbol{y}\in C\}\text{，}$$

其中 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 表示 R^2 中 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的标准内积。由紧凸集 C 的支撑函数 $h(C,\boldsymbol{x})$ 的定义式可以验证它是一阶齐次次线性的，即对于 $\lambda\ge 0$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^2$ 有

$$h(C,\lambda\boldsymbol{x})=\lambda h(C,\boldsymbol{x})\text{，}$$

$$h(C,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\le h(C,\boldsymbol{x})+h(C,\boldsymbol{y})\text{。}$$

紧凸集由它的支持函数所唯一确定，且一个一阶齐次次线性函数唯一确定一紧凸集[4]。

定义 1 中的支持函数是从几何上给出凸集的一个相关概念，而定义 2 中的支撑函数则是从代数上给出凸集的一个相关概论。那么同一个凸集的支持函数和支撑函数有什么关系呢？

引理 1 [2] 以 2π 为周期的周期函数 $p(\varphi)$ 是一个凸集的支持函数的充要条件是

$$p(\varphi)+p''(\varphi)>0\text{，}(0\le\varphi<2\pi)\text{。}$$

引理 2 [5] 若 $h: R^2\to R$ 是一个一阶齐次次线性函数，则它是紧凸集的支撑函数。

3. 主要结论及证明

定理 1 若椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，自原点 O 引射线 OR，则椭圆 C 的支持函数和支撑函数分别为

$$p(\varphi)=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\text{ 和 }h(C,\boldsymbol{x})=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}\text{，且 }p(\varphi)=\frac{h(C,\boldsymbol{x})}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{。}$$

其中 φ 是由 ox 到射线 OR 的角，$\boldsymbol{x}=(x,y)$ 是任意取定的非零方向向量。

证明：(一) 椭圆的支持函数

如图 1 所示，设 φ 是由 ox 到射线 OR 的角，根据 $G(p,\varphi)$ 的定义可知，直线 $G(p,\varphi)$ 与椭圆只有一个交点，记交点为 H。

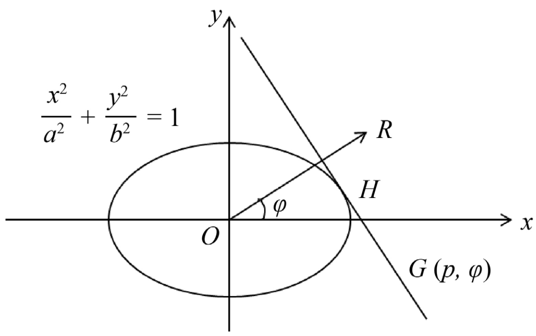

Figure 1. Support function 1 for ellipse
图 1. 椭圆的支持函数

1) 当 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$ 时，直线 $G(p,\varphi)$ 与椭圆的交点坐标为 $(a,0)$ 或 $(-a,0)$，此时

$$p(\varphi)=a\cos0+0\sin0=a\text{ 或 }p(\varphi)=-a\cos\pi+0\sin\pi=a\text{ 。}$$

2) 当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 或 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ 时，直线 $G(p,\varphi)$ 与椭圆的交点坐标为 $(0,b)$ 或 $(0,-b)$，此时

$$p(\varphi)=0\cos\frac{\pi}{2}+b\sin\frac{\pi}{2}=b\text{ 或 }p(\varphi)=0\cos\frac{3\pi}{2}+(-b)\sin\frac{3\pi}{2}=b\text{ 。}$$

3) 当 $\varphi\neq0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ 时，设由 ox 到射线 OR 的角为 φ，直线 $G(p,\varphi)$ 的方程为 $y=-\frac{1}{\tan\varphi}x+m$ 与椭圆的交点坐标为 (x_0,y_0)，由方程

$$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{\tan\varphi}x+m,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$$

消去 y，得

$$\left(b^2+\frac{a^2}{\tan^2\varphi}\right)x^2-\frac{2ma^2}{\tan\varphi}x+a^2\left(m^2-b^2\right)=0\text{ 。}$$

因为直线 $G(p,\varphi)$ 与椭圆只有一个交点，所以

$$\Delta=\left(-\frac{2ma^2}{\tan\varphi}\right)^2-4\left(b^2+\frac{a^2}{\tan^2\varphi}\right)\cdot a^2\left(m^2-b^2\right)=0\text{，}$$

解得

$$m=\pm\sqrt{b^2+\frac{a^2}{\tan^2\varphi}}\text{。}$$

根据支持函数的定义可得：当 $\varphi\in(0,\pi)$ 时，$m=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{\tan^2\varphi}}$；

当 $\varphi\in(\pi,2\pi)$ 时，$m=-\sqrt{b^2+\frac{a^2}{\tan^2\varphi}}$。

不妨设 $\varphi\in(0,\pi)$，则 $y=-\frac{1}{\tan\varphi}x+\sqrt{b^2+\frac{a^2}{\tan^2\varphi}}$，

则由方程可得

$$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{\tan\varphi}x+\sqrt{b^2+\dfrac{a^2}{\tan^2\varphi}},\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$$

解得

$$x_0=\frac{\dfrac{a^2}{\tan\varphi}}{\sqrt{b^2+\dfrac{a^2}{\tan^2\varphi}}},y_0=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+\dfrac{a^2}{\tan^2\varphi}}}\text{。}$$

此时

$$p(\varphi)=\frac{\dfrac{a^2}{\tan\varphi}}{\sqrt{b^2+\dfrac{a^2}{\tan^2\varphi}}}\cos\varphi+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+\dfrac{a^2}{\tan^2\varphi}}}\sin\varphi=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\text{。}$$

综上所述

$$p(\varphi)=\begin{cases}a,\varphi=0\text{或}\pi\\ b,\varphi=\dfrac{\pi}{2}\text{或}\dfrac{3\pi}{2}\\ \sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi},\varphi\neq0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

即

$$p(\varphi)=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\text{。}$$

(二) 椭圆的支撑函数

设 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 为任意取定的非零方向向量，根据 $G(p,\varphi)$ 的定义可知，直线 $G(p,\varphi)$ 与椭圆只有一个交点。

1) 当 $y \neq 0, x \in R$ 时，交点坐标为 $\left(\frac{a^2 \frac{x}{y}}{\sqrt{b^2 + a^2 \frac{x^2}{y^2}}}, \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \frac{x^2}{y^2}}} \right)$，则

$$h(C, \boldsymbol{x}) = \left(\frac{a^2 \frac{x}{y}}{\sqrt{b^2 + a^2 \frac{x^2}{y^2}}}, \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \frac{x^2}{y^2}}} \right) \cdot (x, y) = \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} \text{ 。}$$

2) 当 $y = 0, x > 0$ 时，交点坐标为 $(a, 0)$，则

$$h(C, \boldsymbol{x}) = (a, 0) \cdot (x, 0) = ax \text{ 。}$$

3) 当 $y = 0, x < 0$ 时，交点坐标为 $(-a, 0)$，则

$$h(C, \boldsymbol{x}) = (-a, 0) \cdot (x, 0) = -ax \text{ 。}$$

综上所述

$$h(C, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}, \ y \neq 0, x \in R \\ ax, \ y = 0, x > 0 \\ -ax, \ y = 0, x < 0. \end{cases}$$

即

$$h(C, \boldsymbol{x}) = \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} \text{ 。}$$

由此得到椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的支持函数和支撑函数分别为

$$p(\varphi) = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \text{ 和 } h(C, \boldsymbol{x}) = \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} \text{ 。}$$

观察椭圆的支持函数和支撑函数，不难发现，

当 $\boldsymbol{x} = (x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$，即 $|\boldsymbol{x}| = 1$ 时，椭圆的支持函数和支撑函数是相等的。

当 $\boldsymbol{x} = (x, y) \neq (\cos\varphi, \sin\varphi)$，即 $|\boldsymbol{x}| \neq 1$ 时，椭圆的支持函数和支撑函数是不相等的。

从推导的过程可知

$$\begin{cases} p(\varphi) = \frac{\frac{a^2}{\tan\varphi}}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{\tan^2\varphi}}} \cos\varphi + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{\tan^2\varphi}}} \sin\varphi = \left(\frac{\frac{a^2}{\tan\varphi}}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{\tan^2\varphi}}}, \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{\tan^2\varphi}}} \right) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi), \\ h(C, \boldsymbol{x}) = \left(\frac{a^2 \frac{x}{y}}{\sqrt{b^2 + a^2 \frac{x^2}{y^2}}}, \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \frac{x^2}{y^2}}} \right) \cdot (x, y) \end{cases}$$

$\frac{1}{\tan\varphi} = \frac{x}{y}$，$(\cos\varphi, \sin\varphi) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$，有

$$\begin{aligned}
p(\varphi) &= \left(\frac{\dfrac{a^2}{\tan\varphi}}{\sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{\tan^2\varphi}}}, \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{\tan^2\varphi}}} \right) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi) \\
&= \left(\frac{a^2 \dfrac{x}{y}}{\sqrt{b^2 + a^2 \dfrac{x^2}{y^2}}}, \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \dfrac{x^2}{y^2}}} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(\frac{a^2 \dfrac{x}{y}}{\sqrt{b^2 + a^2 \dfrac{x^2}{y^2}}}, \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \dfrac{x^2}{y^2}}} \right) \cdot (x, y) \\
&= \frac{h(C, \boldsymbol{x})}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{h(C, \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|}.
\end{aligned}$$

所以

$$p(\varphi) = \frac{h(C, \boldsymbol{x})}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{h(C, \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|}。$$

对于任意一个凸集的支持函数和支撑函数之间的关系，我们得到如下定理：

定理 2 设 C 是欧氏平面 R^2 中一紧凸集，若 C 的支持函数和支撑函数分别为 $p(\varphi)$ 和 $h(C, \boldsymbol{x})$，则

$$p(\varphi) = \frac{h(C, \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|}$$

其中 φ 表示由原点引出的非零向量 $\boldsymbol{x}$ 与 x 轴正向的夹角。

证明： 如图 2 所示，φ 表示由坐标原点 O 引出的非零向量 $\boldsymbol{x}$ 与 x 轴正向的夹角。事实上，当 $\boldsymbol{x}$ 取定后，根据定义 1 可知，$\boldsymbol{x}$ 方向上的支持线 $G(p,\varphi)$ 被唯一确定。记支持线 $G(p,\varphi)$ 与凸集 C 的交点为 A。若 $\forall P \in C$，都有 $\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{OA} \cdot \boldsymbol{x}$，不妨记 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{OA}$，$\boldsymbol{OA}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的夹角为 θ (如图 2 所示)，则支持线 $G(p,\varphi)$ 与凸集 C 的交点 A 的向径在 $\boldsymbol{x}$ 方向上的投影也是唯一确定的，即

$$p(\varphi) = prj_x^y = \frac{|\boldsymbol{x}|\, prj_x^y}{|\boldsymbol{x}|}, \quad \boldsymbol{y} \in C, \quad \theta = \angle AOB$$

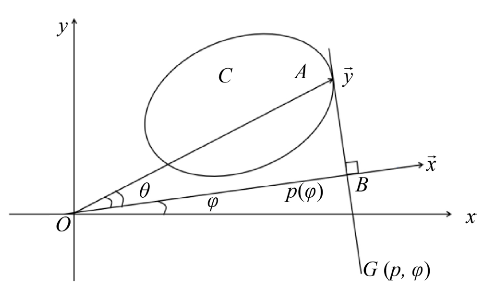

Figure 2. The support function 1 and support function 2 of the convex set
图 2. 凸集的支持函数与支撑函数

根据支撑函数 $h(C,\boldsymbol{x})$ 定义 2 有：$h(C,\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$，$\boldsymbol{y}\in C$，
从而

$$p(\varphi)=prj_x^y=\frac{|\boldsymbol{x}|\,prj_x^y}{|\boldsymbol{x}|}=\frac{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta}{|\boldsymbol{x}|}=\frac{h(C,\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}|}。$$

故定理得证。

推论 1 若 C 是欧氏平面 R^2 中一紧凸集，C 的支持函数和支撑函数分别为 $p(\varphi)$ 和 $h(C,\boldsymbol{x})$，且 $\boldsymbol{x}$ 是单位向量，则

$$p(\varphi)=h(C,\boldsymbol{x})。$$

本文通过研究椭圆的支持函数和支撑函数之间的关系，进一步得到了对于一般凸集的支持函数和支撑函数之间的关系。在凸几何基础中，利用凸集的支持函数刻画了凸集的周长和面积，一个自然的问题，能否利用凸集的支撑函数刻画凸集的周长和面积呢？这将是我们后续研究的内容。

基金项目

2019 年度贵州省基础研究计划(黔科合基础[2019]1228 号)。

参考文献

[1] 高慧如. 典型凸体的支撑函数问题研究[J]. 数学之友, 2022, 36(11): 65-69.
[2] 任德麟. 积分几何学引论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
[3] Guggenheimer, H.W. (1967) The Analytic Geometry of the Unsymmetric Minkowski Plane. University of Minnesota.
[4] 罗淼. Bonnesen 型对称混合等似不等式与 L_p 混合质心体[D]: [博士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2016.
[5] 李晓. 关于(p,q)-对偶曲率测度的仿射等周不等式[D]: [博士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2020.