Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(12), 5338-5342
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1312515

Hans汉斯

《抽象代数》教学探讨：群的表示与置换表示

张国平[*]，石桂其，刘雨喆[#]

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2024年11月27日；录用日期：2024年12月21日；发布日期：2024年12月30日

摘　要

本文对《抽象代数》中群的置换表示的教学进行了探讨，并将之与群的典范表示、群在集合上的作用进行了比较。由于《抽象代数》课程的高度抽象化和逻辑化，且许多教师在《抽象代数》教学过程中对算例本身的重视程度不足，因此本科生学习抽象代数时，其理解能力受到了很大的限制。为此，本文还提供了一些教学用的简单算例，并在课堂利用这些算例进行教学。相比较不使用算例的教学而言，拥有算例的抽象代数教学产生的教学成果有着明显的提升。

关键词

《抽象代数》教学研究，群在集合上的作用，典范表示，置换群，一般线性群

Teaching Research of *Abstract Algebra*: The Representations and Permutation Representation of Groups

Guoping Zhang[*], Guiqi Shi, Yuzhe Liu[#]

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Nov. 27th, 2024; accepted: Dec. 21st, 2024; published: Dec. 30th, 2024

Abstract

This paper we consider the teaching research of *Abstract Algebra*, and the relations of permutation representations of groups, canonical representations of groups, and the actions on sets. Due to the highly abstract and logicality of *Abstract Algebra*, and the insufficient emphasis placed by many

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 张国平, 石桂其, 刘雨喆. 《抽象代数》教学探讨: 群的表示与置换表示[J]. 应用数学进展, 2024, 13(12): 5338-5342. DOI: 10.12677/aam.2024.1312515

teachers on the examples themselves during the teaching process, undergraduate students' understanding ability is greatly limited when studying abstract algebra. Thus, this article provides some simple examples for teaching purposes, and uses these examples for teaching in the classroom. Compared to teaching without using examples, teaching abstract algebra with examples has a significant improvement in teaching outcomes.

Keywords

***Abstract Algebra* Teaching Research, The Group Actions on Sets, Canonical Representations, Permutation Representations, General Linear Groups**

1. 引言

《抽象代数》是现代大学数学系中的必修课程之一，也是《高等代数》的后续课程。其中，群则是《抽象代数》的最基本的概念，它是一个定义了二元运算 $\mu: G\times G\to G$，$\mu(g_1,g_2)=g_1\cdot g_2$ 的集合，满足：

(1) 存在 $e\in G$，使得 $e\cdot g=g\cdot e$ 对任意 $g\in G$ 成立；

(2) 对任意 $g\in G$，存在 $g'\in G$ 使得 $gg'=e=g'g$；

(3) 对任意 $g_1,g_2,g_3\in G$，有 $(g_1\cdot g_2)\cdot g_3=g_1\cdot(g_2\cdot g_3)$。

参考[1] [2]。

在《抽象代数》教学过程中，我们经常会提及这样一个事实：研究两个群 $G=(G,\cdot)$ 和 $H=(H,\circ)$ 之间的群同态，即映射 $\varphi: G\to H$ 使得 $\varphi(g_1\cdot g_2)=\varphi(g_1)\circ\varphi(g_2)$，是研究群的基本手段之一。然而，对于刚接触群这一概念的本科生而言，他们并没有“以映射研究集合”的这一基本数学意识。基于此，笔者将在本文中对上述所遇到的教学难点展开一些探讨。笔者在讲授《抽象代数》时，采用的教材为[1]-[3]作为教学过程中的辅助教材。本文所讨论的教学内容对应[1]的第一章，第 1.6 节。

2. 群的同态与表示

假设本科《抽象代数》的教学进度已经完成了群的讲授，即绝大部分学生已经对群有了一些基本的认识，并能较为熟练的掌握一些简单的群，例如模 n 的剩余类群 $\boldsymbol{Z}_n=(\boldsymbol{Z}_n,+)=\{1,2,\cdots,n\}$，域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶可逆矩阵构成的一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，以及集合 $\mathbb{N}^+_{\le n}=\{t\in\mathbb{N}^+ \mid t\le n\}$ 上的全体双射构成的置换群 S_n 等。

2.1. 群的同态

在群同态的教学过程中，笔者发现，绝大部分本科生对群同态的定义是能够理解的，并具有初步的认识——他们能够意识到群同态是保持一种运算的映射。因此，遵循本节的假设，笔者认为，在群表示的教学过程中，可以通过一些简单的例子强调以下两点：

- 群的同态 $\varphi: G\to H$ 是建立两个群 G 和 H 之间的联系，并用其中一者研究另一者。具体地说，如果我们对 G 的性质是熟知的，那么可以通过 G 研究 H；如果我们对 H 的性质是熟知的，则反过来可以通过 H 研究 G。**例 1** 是笔者在教学过程中常用的算例，它是通过 G 研究 H 的一个例子，也是《抽象代数》教学过程中，教材和许多教师使用的最经典的交换群的例子。
- 与**例 1** 所要说明的观点相反，群的表示则是为了通过 H 研究 G。

例 1. 本例提供一个群同态 $\varphi: G \to H$，它是通过 G 来研究 H 的例子。

整数集在通常的四则运算加法意义下构成的整数加群 $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ 以及关于模 $n = 7$ 的剩余类加法群 $\boldsymbol{Z}_7 = (\boldsymbol{Z}_7, +) = \{0, 1, \cdots, 6\}$ 之间的映射 $f: \mathbb{Z} \to \boldsymbol{Z}_n (\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 是一个群同态。对 $\boldsymbol{Z}_7$ 而言，它的元素以及元素之间的加法运算(即模 7 的剩余类加法)本质上是通过 $\mathbb{Z}$ 中的元素以及元素之间的四则运算加法来刻画的。例如，对 $3, 6 \in \boldsymbol{Z}_7$，其按模 7 的剩余类加法进行计算，有 $3 + 6 = 2$。此计算本质上分为两步：先将 $\boldsymbol{Z}_7$ 的元素 3 和 6 通过群同态 f 在 $\mathbb{Z}$ 中寻找一个原像，例如 3 和 6 自身(亦或者 10 和 13)；再将原像在 $\mathbb{Z}$ 中求和，即 $3 + 6 = 9$ (对应地，$10 + 13 = 23$)；最后，将所求和的结果通过群同态 f 映射到 $\boldsymbol{Z}_7$ 中(即除以 7 取余数)，得到 $f(9) = 2$ (对应地，$f(23) = f(3 \cdot 7 + 2) = 3f(7) + f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$)。

2.2. 群的表示

定义 1. 设 G 是群。群 G 的一个表示(representation，也叫典范表示，canonical representation)是一个群同态

$$r: G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0 \right\},$$

其中 $\mathbb{F}$ 是一个域。

从定义来看，群 G 的表示是为了通过一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 来研究 G，更直观地说，是将 G 中的元素或者运算结构实现为矩阵或者矩阵的乘法运算。**例 2** 是笔者在《抽象代数》课堂上所使用的 3 个例子。

例 2. (1) 从模 3 的剩余类加法群 $\boldsymbol{Z}_3$ 到一般线性群 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$ 的群同态

$$r_1: \boldsymbol{Z}_3 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}), \quad t \mapsto \boldsymbol{A}^t$$

是 $\boldsymbol{Z}_3$ 的一个表示，其中，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。群同态 r_1 将 $\boldsymbol{Z}_3$ 的单位元 0 映射为 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$ 的单位元 $\boldsymbol{A}$，将 1 和 2 分别映为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^2$。如此一来，$\boldsymbol{Z}_3$ 中的元素 $t \in \{0, 1, 2\}$ 被实现为 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$ 中的矩阵 $\boldsymbol{A}^t \in \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2\}$，$\boldsymbol{Z}_3$ 上的剩余类加法被实现为 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2$ 之间的矩阵乘法。

(2) 下面 6 个对应给出了从 3 阶置换群 S_3 到一般线性群 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$ 的群同态 $r_2: S_3 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$：

$$(1) \mapsto \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (12) \mapsto \boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (13) \mapsto \boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(23) \mapsto \boldsymbol{E}_{2\leftrightarrow 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (123) \mapsto \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (132) \mapsto \boldsymbol{X}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

群同态 r_2 将 S_3 中的所有置换实现为 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$ 中的矩阵，将任意两个置换的复合被实现为 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$ 中的矩阵乘法，例如 $(12) \circ (123) = (23)$，对应 $\boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow 2}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}_{2\leftrightarrow 3}$。

(3) 由下述对应

$$r_3((1)) = r_3((123)) = r_3((132)) = \boldsymbol{E}; \quad r_3((12)) = r_3((13)) = r_3((23)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{Y}$$

定义的 S_3 到 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F})$ 的映射 $r_3: S_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ 也是群同态。它将 S_3 中的每一个奇置换映射为 $\boldsymbol{Y}$，每一个奇

置换映射$\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{E}$。该表示通过一般线性群$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$反映了这样一个事实：$S_3$中的置换可以被分为两类，一类属于$\ker(r_3)$，它是所有偶置换构成的集合，也是$S_3$的正规子群$A_3$；另一类则是全体奇置换构成的集合，它们由$\boldsymbol{Y}$的原像集$r_3^{-1}(\boldsymbol{Y})$给出。

3. 群的置换表示

3.1. 群的置换表示

下面定理指出，任何一个群可以视为某个置换群的子群。

定理 1 (Cayley 定理). 对任意群 G，存在置换群S_n的子群 T 使得$G\cong T$，等价地说，总是存在一个$G\to S_n$形式的群的单同态。 □

Cayley 定理指出任何群 G 的元素可以实现为某个集合$\mathbb{N}_{\le n}^{+}$上的双射，且群 G 上的乘法实现为这些双射的复合。

例 3. 在**例 2** (1)中，群$\boldsymbol{Z}_3$的元素 0、1、2 就可以分别地实现为置换(1)、(123)、(132)所对应的双射。$\boldsymbol{Z}_3$上的加法运算则可以实现为这些双射的复合，例如在$\boldsymbol{Z}_3$中，$1+2=0$被实现为$(123)\circ(132)=(1)$。

3.2. 群在集合上的作用与群的典范表示和置换表示之间的联系

在《抽象代数》教学中，教师应当强调，群的置换表示和典范表示有着密切联系。这种联系可以通过群在集合上的作用来联系。

定义 2. 群 G 在集合$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$上作用(action)是一个二元映射

$$G\times X\to X,\quad (g,x)\mapsto g\cdot x,$$

使得对任意$x\in X$以及$g_1,g_2,g\in G$，有：

(i) $1.x=x$；

(ii) $(g_1g_2).x=g_1.(g_2.x)$ (因此，可简写为$g_1g_2.x$)。

进一步地，对每一个 g，群作用$G\times X\to X$本质上是将序列$x_1,\cdots,x_n$映射为$x_{\sigma_g(1)},\cdots,x_{\sigma_g(n)}$ (其中，$\sigma_g:\mathbb{N}_{\le n}^{+}\to\mathbb{N}_{\le n}^{+}$是双射)，这意味着 g 作用到 X 上本质上是引起了 X 上的一个置换σ_g。进而有对应

$$\pi:G\to S_n,\quad g\mapsto\sigma_g,$$

使得

$$\pi(g_1g_2)=\sigma_{g_1g_2}=\sigma_{g_1}\sigma_{g_2}=\pi(g_1)\pi(g_2)。$$

从而，π是一个单的群同态。

另一方面，我们知道S_n的一组生成元是$\{(1j)\mid 1\le j\le n\}$，每个双射$(1j):\mathbb{N}_{\le n}^{+}\to\mathbb{N}_{\le n}^{+}$对应$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$中的矩阵$\boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow j}$ (即交换单位矩阵$\boldsymbol{E}$的第 1 行第 j 列所得的初等矩阵)。由此可知S_n中的所有矩阵都可以视为若干形如$\boldsymbol{E}_{1\leftrightarrow j}$的矩阵的乘积，进而存在一个形如$S_n\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$的群的单同态。于是，复合映射$G\xrightarrow{\pi}S_n\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$诱导了一个表示$\tilde{\pi}:G\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$。

4. 群的典范/置换表示与群在线性空间上的作用

根据**定理 1**，可知每个群 G 都有一个单的置换表示$\pi:G\to S_n$。再者，每个置换群都有一个形如$S_n\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$的典范表示，由此可知置换表示$\pi$可以被转化为典范表示$\tilde{\pi}:G\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，如此就得到了下述结论。

定理 2. 任何群 G 都存在一个单的典范表示。 □

上述定理是抽象代数中的一个经典结论，它为每个群提供了一个非平凡的典范表示。下面事实是《抽象代数》课程教学过程中可以提及的。

定理 3. 任意典范表示 $r:G\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 可以诱导一个群 G 在线性空间 $V\cong \mathbb{F}^n$ 上的作用 $G\times V\to V$，使得对任意 $g_1,g_2\in G$， $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V$， 以及 $\lambda\in\mathbb{F}$，有：

(1) $1.\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$；

(2) $(g_1g_2).\boldsymbol{v}=g_1.(g_2.\boldsymbol{v})$；

(3) $g.(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=g.\boldsymbol{v}_1+g.\boldsymbol{v}_2$；

(4) $g.(\lambda\boldsymbol{v})=\lambda\cdot g.\boldsymbol{v}$。

证. 事实上，(1)和(2)是复合群在集合 V 上的作用的定义。(3)和(4)则来自典范表示 $r:G\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，$r$ 将群 G 的元素 g 映射为矩阵 $r(g)=\boldsymbol{G}$，进而元素 g 对向量 $\boldsymbol{v}\in V$ 的作用就是 $g.\boldsymbol{v}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}$，从而，利用矩阵的加法和乘法可知(3)和(4)成立。 □

注意，笔者认为**定理 3** 在《抽象代数》教学中可以提及的原因在于它的结论可以对比线性空间的定义。我们知道，域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 是一个满足下述条件的 Abel 群(例如，参考[4] [5])：对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$，$\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V$，有：

(1) $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$；

(2) $(\lambda\mu)\boldsymbol{v}=\lambda(\mu\boldsymbol{v})$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\lambda\boldsymbol{v}_1+\lambda\boldsymbol{v}_2$；

(4) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{v}$。

因此，将 $\mathbb{F}^*:=\mathbb{F}\setminus\{0\}$ 视为群 $(\mathbb{F}^*,\cong)$ 时，向量空间 V 本质上可以视为一个 Abel 群附带群作用

$$\mathbb{F}\times V\to V,\quad \lambda.\boldsymbol{v}:=\lambda\boldsymbol{v}。$$

此时，可以看到此处的(1)、(2)、(3)分别对应**定理 3** 中的(1)、(2)、(3)。此处的(4)则是由 $\mathbb{F}$ 上的加法结构额外给出的(而群中只有一种运算，不具备此结构)。这一对比也有利于后续对环以及模的讲解(例如[2]，第五章)。

基金项目

本文由贵州省科技厅科学计划项目(合同号：黔科合基础-ZK[2024]一般 015，黔科合基础-ZK[2024]一般 066)，贵州大学引进人才科研启动基金项目(合同号：贵大人基合字(2023)16 号，(2022) 53 号，(2022) 65 号)，贵州大学高等教育研究项目(项目申请号：703217243301)资助。

参考文献

[1] 冯克勤，李尚志，章璞. 近世代数引论[M]. 第四版. 合肥：中国科学技术大学出版社, 2018.

[2] 聂灵沼，丁石孙. 代数学引论[M]. 第二版. 北京：高等教育出版社, 2016.

[3] Jacobsom, N. (1985) Basic Algebra I. Second Edition, W. H. Freeman & Company.

[4] Hogben, L. (2006) Handbook of Linear Algebra. CRC Press.

[5] 徐云阁，章超，廖军. 高等代数[M]. 北京：科学出版社, 2021.