Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(12), 5350-5357
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1312517

Hans汉斯

笛卡尔积图的*f*-点稳定数

肖李宵，买吐肉孜·买司地克*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2024年11月27日；录用日期：2024年12月21日；发布日期：2024年12月30日

摘 要

图的不变量点稳定数是最近的热点问题之一，它被应用于设计算法解决图论的某些特定问题。设 f 是图不变量，图 G 的 f -点稳定数 $vs_f(G)$ 定义为使得 $f(G-V')\neq f(G)$ 成立的最小点子集 V' 的基数。在本文中，通过不变量 f 的性质，讨论笛卡尔积图的 f -点稳定数的界。

关键词

笛卡尔积图，不变量，点稳定数

The *f*-Vertex Stability Number of Cartesian Product Graphs

Lixiao Xiao, Metsidik·Metrose*

College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Nov. 27th, 2024; accepted: Dec. 21st, 2024; published: Dec. 30th, 2024

Abstract

The invariant vertex stability number of graph is one of the recent hot topics, which is applied to design algorithms to solve certain problems in graph theory. Let f be an invariant of graphs, and the f -vertex stability number $vs_f(G)$ of a graph G is defined as the cardinality of the minimum vertex subset V' such that $f(G-V')\neq f(G)$. In this paper, we discuss the bounds of the f -vertex stability number for Cartesian product graphs through the properties of the invariant f .

*通讯作者。

文章引用: 肖李宵, 买吐肉孜·买司地克. 笛卡尔积图的 *f*-点稳定数[J]. 应用数学进展, 2024, 13(12): 5350-5357.
DOI: 10.12677/aam.2024.1312517

Keywords

Cartesian Product Graph, Invariant, Vertex Stability Number

1. 引言

本文考虑有限简单图$G=(V,E)$，同时假设图不变量f是一个非负实函数。图不变量是指图在同构条件下仍然保持不变的一种性质，它往往和图的自身结构和特征有关，不依赖于图的某一种表示。研究图不变量不仅可以让我们深刻理解图的结构特性，还能借此设计算法用于解决图论当中各种各样的问题。文献[1]-[4]中发现对给定图的不变量稳定数，可以通过删除点，删除边，增加点以及增加边的方式进行改变。Haynes [3]等人通过对图G进行删点，删边和加边的方式考虑不变量是否改变，给出了最大度$\Delta(G)$，最小度$\delta(G)$，独立数$\alpha(G)$等不变量的一般性结论。Bauer [4]等人给出了使得图的独立数增加或减少的条件，同时对图的f-边稳定数$es_f(G)$进行了定义，即在图G中能找到一个最小的边集E'使得$f(G-E')\neq f(G)$，则有$es_f(G)=|E'|$。Kemnitz [5] [6]等人对色束缚数和边色数相等的图进行考虑，并给出了一般性结论，其中色束缚数指的是任意两个色类之间的最小边数，给出了f-边稳定数上界和下界的一般性结论，考虑了当图G满足$f=\chi'(G)$时特定图类的色边稳定数。Akbari [7]等人在图G满足

$$\chi(G)\in\{\Delta(G),\Delta(G)+1\}$$

的条件下证明了

$$vs_\chi(G)=ivs_\chi(G)$$

其中$ivs_\chi(G)$是独立色点稳定数，即使得色数$\chi(G)$改变的独立集的最小点数；同时也给出了当图G满足

$$\chi(G)\geq\frac{\Delta(G)+1}{2}$$

则有$vs_\chi(G)=es_\chi(G)$成立。

文献[8] [9]中根据图的最大度给出了图G边色稳定数的严格上界，并考虑了$es_\chi(G)=1$的图和k小于等于5的k正则图的特征描述。Kemnitz and Marangio [10]给出了一些关于f-点稳定数的一般性结论，并利用f-点稳定数对著名的Gallai定理进行了证明，同时关注了色数这一结构参数，通过一系列的图确定了色数点稳定数，其次考虑了色边稳定数和色点稳定数的关系，证明了它们的差和比率可以变成任意大。

本文利用图不变量f的性质，如可加性，可乘性等，进一步给出了笛卡尔积图f-点稳定数的相关结论，在不同条件下，通过f-点稳定数探究了笛卡尔积图与子图之间的关系。第二部分给出了定理证明需要的相关引理以及相关的定义。第三部分给出了笛卡尔积图f-点稳定数的界。

2. 相关定义和引理

定义 2.1 [5]. 设图$G=H_1\cup H_2$且H_1和H_2是两个互不相交的图。若不变量f满足

$$f(G)=f(H_1\cup H_2)=f(H_1)+f(H_2),$$

则称不变量f具有可加性。

定义 2.2. 设图 $G=H_1\cup H_2$ 且 H_1 和 H_2 是两个互不相交的图。若不变量 f 满足

$$f(G)=f(H_1\cup H_2)=f(H_1)\cdot f(H_2),$$

则称不变量 f 具有可乘性。

定义 2.3 [5]. 设图 $G=H_1\cup H_2$ 且 H_1 和 H_2 是两个互不相交的图。若不变量 f 满足

$$f(G)=f(H_1\cup H_2)=\max\{f(H_1),f(H_2)\},$$

则称不变量 f 具有最大性。

定义 2.4. 设图 $G=H_1\cup H_2$ 且 H_1 和 H_2 是两个互不相交的图。若不变量 f 满足

$$f(G)=f(H_1\cup H_2)=\min\{f(H_1),f(H_2)\},$$

则称不变量 f 具有最小性。

定义 2.5. 设图的 f-点稳定数 $vs_f(G)$ 定义为

$$vs_f(G)=\begin{cases}\infty, & f(G-V')=f(G)\text{且对所有的点子集}V'\subseteq V(G);\\ \min\{|V'|:V'\subseteq V(G)\text{且}f(G-V')\neq f(G)\}, & \text{其它}.\end{cases}$$

引理 2.6 [10]. 若 V' 是图 G 的一个点子集，则有

$$vs_f(G)\le|V'|+vs_f(G-V')。$$

定义 2.7. 设图 H 是图 G 的一个子图，f 是一个图不变量，若有

$$f(G)\ge f(H),$$

则称不变量 f 是单调递增的；反之，则称不变量 f 是单调递减的。

定义 2.8 [11]**.** 设 G_1,G_2 是两个简单图，图 G 是由 G_1 和 G_2 构成的笛卡尔积图，记作

$$G=G_1\square G_2,$$

其中，定义图 G 顶点集为

$$V(G)=V(G_1)\times(G_2),$$

其边集为

$$E(G)=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2):u_1=u_2\text{且}v_1v_2\in E(G_2)\vee v_1=v_2\text{且}u_1u_2\in E(G_1)\}。$$

3. 笛卡尔积图的 *f*-点稳定数的界

定理 3.1. 设 H_1,H_2 是两个互不相交的图，$G=H_1\square H_2$ 且不变量 f 满足可加性。若图 G 中存在一个点集 V' 使得 $G-V'=H_i\cup G'$，$i=1,2$，则有

$$vs_f(G)\le|V'|+\min\{vs_f(H_i):i=1,2\}。$$

证明 若图 $H_i(i=1,2)$ 中找不到任何点集使得 $f(H_i)$ 改变，由定义可知 $vs_f(H_i)=\infty$，结论显然成立。设

$$vs_f(H_1)=\min\{vs_f(H_1):i=1,2\},$$

令 $V''\subseteq V(H_1)$ 是图 H_1 的一个点子集，使得 $vs_f(H_1)=|V''|$，则有

$$f(H_1-V'')\neq f(H_1)。$$

现设图 G 存在一个点子集 V' 且 $G-V'=H_1\cup G'$，根据不变量 f 的可加性条件，得到

$$\begin{aligned} f(G-V'-V'') &= f((H_1-V'')\cup G') = f(H_1-V'')+f(G') \\ &\neq f(H_1)+f(G') = f(H_1\cup G') \\ &= f(G-V') \end{aligned}$$

由定义可知

$$vs_f(G-V')\le |V''| = vs_f(H_1)，$$

根据引理 2.6 有

$$vs_f(G)\le vs_f(G-V')+|V'|\le vs_f(H_1)+|V'|。$$

同理当 $G-V'=H_2\cup G'$ 时，有

$$vs_f(G)\le vs_f(G-V')+|V'|\le vs_f(H_2)+|V'|，$$

则

$$vs_f(G)\le |V'|+\min\{vs_f(H_i):i=1,2\}。$$ □

定理 3.2. 设 H_1,H_2 是两个互不相交的图，$G=H_1\square H_2$，不变量 f 满足可乘性且非零。若图 G 中存在一个点集 V' 使得 $G-V'=H_i\cup G'$，$i=1,2$，则有

$$vs_f(G)\le |V'|+\min\{vs_f(H_i):i=1,2\}。$$

证明 若 $vs_f(H_i)=\infty$，$i=1,2$，则结论显然成立。

现证 $vs_f(H_i)<\infty$ 的情况，令

$$vs_f(H_1)=\min\{vs_f(H_i):i=1,2\}，$$

若存在点子集 $V''\subseteq V(H_1)$，使得 $vs_f(H_1)=|V''|$，则

$$f(H_1-V'')\neq f(H_1)。$$

由于图 G 是 H_1,H_2 构成的笛卡尔积图，存在一个点子集 $V'\in V(G)$，使得 $G-V'=H_1\cup G'$。根据不变量 f 的可乘性条件且非零，则

$$\begin{aligned} f(G-V'-V'') &= f((H_1-V'')\cup G') = f(H_1-V'')\cdot f(G') \\ &\neq f(H_1)\cdot f(G') = f(H_1\cup G') \\ &= f(G-V') \end{aligned}$$

由定义可知

$$vs_f(G-V')\le |V''| = vs_f(H_1)，$$

根据引理 2.6 有

$$vs_f(G)\le vs_f(G-V')+|V'|\le vs_f(H_1)+|V'|。$$

同理当

$$vs_f(H_2)=\min\{vs_f(H_i):i=1,2\}，$$

有

$$vs_f\left(G\right)\le vs_f\left(G-V'\right)+\left|V'\right|\le vs_f\left(H_2\right)+\left|V'\right|,$$

得

$$vs_f\left(G\right)\le\left|V'\right|+\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}。\qquad\square$$

定理 3.3. 设 H_1,H_2 是两个互不相交的图，$G=H_1\square H_2$，不变量 f 满足最大性。若图 G 中存在一个点集 V' 使得 $G-V'=H_i\cup G'$ 且 $f\left(H_i\right)>f\left(G'\right)$，$i=1,2$，则有

$$vs_f\left(G\right)\le\left|V'\right|+\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}。$$

证明 根据引理 2.6 有

$$vs_f\left(G\right)\le vs_f\left(G-V'\right)+\left|V'\right|,$$

只需证

$$vs_f\left(G-V'\right)\le\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}。$$

若 $vs_f\left(H_i\right)=\infty$，$i=1,2$，结论显然成立。

现设

$$\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}=vs_f\left(H_1\right),$$

令 V'' 是图 H_1 的点子集，使得 $vs_f\left(H_1\right)=\left|V''\right|$，则有

$$f\left(H_1-V''\right)\ne f\left(H_1\right)。$$

又根据不变量 f 的最大性条件，有

$$\begin{aligned}f\left(G-V'\right)=f\left(H_1\cup G'\right)&=\max\left\{f\left(H_1\right),f\left(G'\right)\right\}=f\left(H_1\right)\\&\ne\max\left\{f\left(H_1-V''\right),f\left(G'\right)\right\}\\&=f\left(G-V'-V''\right)\end{aligned}$$

由定义可得

$$vs_f\left(G-V'\right)\le\left|V''\right|=vs_f\left(H_1\right)。$$

同理当

$$\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}=vs_f\left(H_2\right),$$

有

$$vs_f\left(G-V'\right)\le\left|V''\right|=vs_f\left(H_2\right),$$

则

$$vs_f\left(G\right)\le\left|V'\right|+\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}。\qquad\square$$

定理 3.4. 设 H_1,H_2 是两个互不相交的图，$G=H_1\square H_2$，不变量 f 满足最小性。若图 G 中存在一个点集 V' 使得 $G-V'=H_i\cup G'$ 且 $f\left(H_i\right)<f\left(G'\right)$，$i=1,2$，则有

$$vs_f\left(G\right)\le\left|V'\right|+\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}。$$

证明 若 $vs_f\left(H_i\right)=\infty$，$i=1,2$，则结论成立。

设存在 $vs_f\left(H_i\right)<\infty$，可以令

$$\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}=vs_f\left(H_1\right),$$

若V''是一个点子集且$V''\subseteq V\left(H_1\right)$，使得$vs_f\left(H_1\right)=\left|V''\right|$，则有

$$f\left(H_1-V''\right)\neq f\left(H_1\right)。$$

根据不变量f的最小性条件，有

$$\begin{aligned}f\left(G-V'\right)&=f\left(H_1\cup G'\right)=\min\left\{f\left(H_1\right),f\left(G'\right)\right\}=f\left(H_1\right)\\&\neq\min\left\{f\left(H_1-V''\right),f\left(G'\right)\right\}\\&=f\left(G-V'-V''\right)\end{aligned}$$

因此，可得

$$vs_f\left(G-V'\right)\leq\left|V''\right|=vs_f\left(H_1\right)。$$

同理当

$$\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}=vs_f\left(H_2\right),$$

有

$$vs_f\left(G-V'\right)\leq\left|V''\right|=vs_f\left(H_2\right),$$

则

$$vs_f\left(G\right)\leq\left|V'\right|+\min\left\{vs_f\left(H_i\right):i=1,2\right\}。\qquad\square$$

通过上述定理可知，我们考虑的是两个不交图构成的笛卡尔积图，由此可以推广到多个不交图所构成的笛卡尔积图的f-点稳定数。

定理 3.5. 设不变量f满足可加性且非零，$G_1=H_{11}\cup H_{12}\cup\cdots\cup H_{1n}$，$G_2=H_{21}\cup H_{22}\cup\cdots\cup H_{2m}$，$n,m$是正整数，并且它们的子图都是互不相交的。令$G=G_1\square G_2$，若图$G$存在一个点子集$V'$使得$G-V'=G_t\cup G'$，$t=1,2$，则有

$$vs_f\left(G\right)\leq\left|V'\right|+\min\left\{vs_f\left(H_{tk}\right),\left|V\left(H_{tk}\right)\right|,vs_f\left(G'\right),\left|V\left(G'\right)\right|:t=1\text{且}1\leq k\leq n\vee t=2\text{且}1\leq k\leq m\right\}。$$

证明 根据引理 2.6，只需证

$$vs_f\left(G-V'\right)\leq\min\left\{vs_f\left(H_{tk}\right),\left|V\left(H_{tk}\right)\right|,vs_f\left(G'\right),\left|V\left(G'\right)\right|:t=1\text{且}1\leq k\leq n\vee t=2\text{且}1\leq k\leq m\right\}。$$

当$t=1$时，有

$$G-V'=G_1\cup G',$$

当$vs_f\left(H_{1n}\right)<\infty$且$vs_f\left(G'\right)<\infty$，令

$$\min\left\{vs_f\left(H_{tk}\right),\left|V\left(H_{tk}\right)\right|,vs_f\left(G'\right),\left|V\left(G'\right)\right|:t=1\text{且}1\leq k\leq n\vee t=2\text{且}1\leq k\leq m\right\}=vs_f\left(H_{1k}\right),$$

其中$1\leq k\leq n$，令V''是一个点子集且$V''\subseteq V\left(H_{1k}\right)$，使得$vs_f\left(H_{1k}\right)=\left|V''\right|$，则有

$$f\left(H_{1k}-V''\right)\neq f\left(H_{1k}\right)。$$

又根据不变量f的可加性条件，得

$$\begin{aligned}f\left(G-V'-V''\right)&=f\left(H_{11}\right)+f\left(H_{12}\right)+\cdots+f\left(H_{1k}-V''\right)+\cdots+f\left(H_{1n}\right)+f\left(G'\right)\\&\neq f\left(H_{11}\right)+f\left(H_{12}\right)+\cdots+f\left(H_{1k}\right)+\cdots+f\left(H_{1n}\right)+f\left(G'\right)\\&=f\left(G-V'\right)\end{aligned}$$

由定义有

$$vs_f\left(G-V'\right)\le\left|V''\right|=vs\left(H_{1k}\right)。$$

若

$$\min\left\{vs_f\left(H_{tk}\right),\left|V\left(H_{tk}\right)\right|,vs_f\left(G'\right),\left|V\left(G'\right)\right|:t=1\text{且}1\le k\le n\vee t=2\text{且}1\le k\le m\right\}=\left|V\left(H_{1k}\right)\right|,$$

其中$1\le k\le n$，则$vs_f\left(H_{1k}\right)=\infty$。不变量$f$满足可加性且不为零，有

$$\begin{aligned}f\left(G-V'-V\left(H_{1i}\right)\right)&=f\left(H_{11}\right)+f\left(H_{12}\right)+\cdots+f\left(H_{1k-1}\right)+f\left(H_{1k+1}\right)+\cdots+f\left(G'\right)\\&\ne f\left(H_{11}\right)+f\left(H_{12}\right)+\cdots+f\left(H_{1k}\right)+\cdots+f\left(G'\right)\\&=f\left(G-V'\right)\end{aligned}$$

得

$$vs_f\left(G-V'\right)\le\left|V\left(H_{1k}\right)\right|。$$

同理，当$t=2$或

$$\min\left\{vs_f\left(H_{tk}\right),\left|V\left(H_{tk}\right)\right|,vs_f\left(G'\right),\left|V\left(G'\right)\right|:t=1\text{且}1\le k\le n\vee t=2\text{且}1\le k\le m\right\}=\min\left\{vs_f\left(G'\right),\left|V\left(G'\right)\right|\right\},$$

得

$$vs_f\left(G-V'\right)\le\min\left\{\left|V\left(H_{2k}\right)\right|,vs_f\left(H_{2k}\right)\right\}\text{或}\ vs_f\left(G-V'\right)\le\min\left\{vs_f\left(G'\right),\left|V\left(G'\right)\right|\right\}$$

根据引理 2.6，则有

$$vs_f\left(G\right)\le\left|V'\right|+\min\left\{vs_f\left(H_{tk}\right),\left|V\left(H_{tk}\right)\right|,vs_f\left(G'\right),\left|V\left(G'\right)\right|:t=1\text{且}1\le k\le n\vee t=2\text{且}1\le k\le m\right\}。\qquad\square$$

定理 3.6. 设不变量f单调递增且满足最大性，$G_1=H_{11}\cup H_{12}\cup\cdots\cup H_{1n}$，$G_2=H_{21}\cup H_{22}\cup\cdots\cup H_{2m}$，$n,m$是正整数，它们的子图都互不相交。令$G=G_1\square G_2$，存在一个点子集$V'\subseteq V\left(G\right)$使得$G-V'=G_t\cup G'$，$t=1,2$，且$f\left(G-V'\right)\ne f\left(G'\right)$。若$f\left(H_{ts}\right)=f\left(G-V'\right)$，$s,l$是正实数且$1\le s\le l<n$或$m$，则有

$$vs_f\left(G\right)\le\left|V'\right|+\sum_{s=1}^{l}\min\left\{vs_f\left(H_{ts}\right),\left|V\left(H_{ts}\right)\right|\right\}。$$

证明 根据引理 2.6，只需证

$$vs_f\left(G-V'\right)\le\sum_{s=1}^{l}\min\left\{vs_f\left(H_{ts}\right),\left|V\left(H_{ts}\right)\right|\right\}。$$

当$t=1$时，令V'是一个点子集且$V'\subseteq V\left(G\right)$，使得

$$G-V'=G_1\cup G'=H_{11}\cup H_{12}\cup\cdots\cup H_{1n}\cup G',$$

设图H_{1s}是图$G-V'$的子图，$s=1,2,\cdots,l$，当$vs_f\left(H_{1s}\right)=\infty$时，令

$$Y_s=V\left(H_{1s}\right);$$

当$vs_f\left(H_{1s}\right)<\infty$时，存在一个点子集$Y_s\in V\left(H_{1s}\right)$使得$\left|Y_s\right|=vs_f\left(H_{1s}\right)$，令

$$f\left(H_{1s}-Y_s\right)\ne f\left(H_{1s}\right)。$$

设T是一个点子集且$T\subseteq V\left(G-V'\right)$，使得$T=Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_l$，则

$$\left|T\right|=\sum_{s=1}^{l}\min\left\{vs_f\left(H_{1s}\right),\left|V\left(H_{1s}\right)\right|\right\},$$

根据不变量f的单调递增且满足最大性条件，有

$$
\begin{aligned}
f(G-V'-T) &= \max\left\{f(H_{11}-Y_1), f(H_{12}-Y_2), \cdots, f(H_{1l}-Y_l), f(H_{1l+1}), \cdots, f(H_{1n}), f(G')\right\} \\
&\neq \max\left\{f(H_{11}), f(H_{12}), \cdots, f(H_{1l}), f(H_{1l+1}), \cdots, f(H_{1n}), f(G')\right\} \\
&= f(G-V')
\end{aligned}
$$

由定义得

$$vs_f(G-V') \le |T| = \sum_{s=1}^{l} \min\left\{vs_f(H_{1s}), |V(H_{1s})|\right\}。$$

当 $t=2$ 时，同理可得

$$vs_f(G-V') \le |T| = \sum_{s=1}^{l} \min\left\{vs_f(H_{2s}), |V(H_{2s})|\right\},$$

根据引理 2.6 有

$$vs_f(G) \le |V'| + vs_f(G-V') \le |V'| + \sum_{s=1}^{l} \min\left\{vs_f(H_{ts}), |V(H_{ts})|\right\}。 \qquad \square$$

4. 总结

本文通过图不变量的性质，研究了笛卡尔积图不变量点稳定数的界。近些年，关于不变量稳定数的研究也是热点问题之一，本文丰富了在笛卡尔积图方面的研究成果。目前关于图的不变量稳定数有较多结论，如图的色点稳定数、色边稳定数等，本文只考虑了笛卡尔积图不变量点稳定数，相对应的笛卡尔积图不变量边稳定数也可以进行研究。

基金项目

新疆自然科学基金项目(2024D01A89, 2022D03002)；国家自然科学基金地区科学基金项目(11961070)。

参考文献

[1] Staton, W. (1980) Edge Deletions and the Chromatic Number. *Ars Combinatoria*, **10**, 103-106.

[2] Harary, F. (1982) Changing and Unchanging Invariants for Graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **5**, 73-78.

[3] Haynes, T.W., Lawson, L.M., Brigham, R.C. and Dutton, R.D. (1990) Changing and Unchanging of the Graphical Invariants: Minimum and Maximum Degree, Maximum Clique Size, Node Independence Number and Edge Independence Number. *Congressus Numerantium*, **72**, 239-252.

[4] Bauer, D., Harary, F., Nieminen, J. and Suffel, C.L. (1983) Domination Alteration Sets in Graphs. *Discrete Mathematics*, **47**, 153-161. https://doi.org/10.1016/0012-365x(83)90085-7

[5] Kemnitz, A. and Marangio, M. (2019) On the Rho-Edge Stability Number of Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **42**, 249-262. https://doi.org/10.7151/dmgt.2255

[6] Kemnitz, A., Marangio, M. and Movarraei, N. (2018) On the Chromatic Edge Stability Number of Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **34**, 1539-1551. https://doi.org/10.1007/s00373-018-1972-y

[7] Akbari, S., Beikmohammadi, A., Klavžar, S. and Movarraei, N. (2022) On the Chromatic Vertex Stability Number of Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **102**, Article ID: 103504. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103504

[8] Akbari, S., Klavžar, S., Movarraei, N. and Nahvi, M. (2020) Nordhaus-Gaddum and Other Bounds for the Chromatic Edge-Stability Number. *European Journal of Combinatorics*, **84**, Article ID: 103042. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2019.103042

[9] Huang, S., Klavžar, S., Lei, H., Lian, X. and Shi, Y. (2022) Some Extremal Results on the Chromatic Stability Index. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **106**, 185-194. https://doi.org/10.1017/s0004972722000168

[10] Kemnitz, A. and Marangio, M. (2024) On the Vertex Stability Numbers of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **344**, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.11.008

[11] Klavžar, S. (2000) Product Graphs: Structure and Recognition. Wiley.