Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(12), 5358-5366
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1312518

Hans汉斯

基于σ优势关系下的直觉模糊三支决策

尚　蓉

长安大学理学院，陕西　西安

收稿日期：2024年11月27日；录用日期：2024年12月21日；发布日期：2024年12月30日

摘　要

针对多属性决策中经常含有模糊信息的难题，而传统的决策方法难以有效提取决策规则和实现方案排序。为了解决此类问题，本文通过借助σ优势关系，提出σ优势信息熵，从而不仅避免了优势关系条件过于严格，容易导致信息损失的问题，而且同时实现了属性权重的客观评价。并以此为基础，在直觉模糊信息系统中构建了一种新的条件概率表示方法，重新制定了决策规则和排序策略。最后，通过实例分析验证了本文方法的合理性及有效性。

关键词

σ优势关系，σ优势信息熵，三支决策

Intuitionistic Fuzzy Three-Way Decision Making Based on σ Dominant Relationship

Rong Shang

School of Sciences, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: Nov. 27th, 2024; accepted: Dec. 21st, 2024; published: Dec. 30th, 2024

Abstract

In view of the problem that fuzzy information is often contained in multi-attribute decision making, traditional decision making methods are difficult to effectively extract decision rules and implement scheme ranking. In order to solve such problems, this paper proposes the entropy of σ dominant information by virtue of the σ dominant relation, which not only avoids the problem that the conditions of dominant relation are too strict, which is easy to lead to information loss, but also realizes the objective evaluation of attribute weights. Based on this, a new conditional probability representation method is constructed in intuitionistic fuzzy information system, and the decision rules and ranking strategy are reformulated. Finally, the rationality and effectiveness of the proposed

文章引用: 尚蓉. 基于σ优势关系下的直觉模糊三支决策[J]. 应用数学进展, 2024, 13(12): 5358-5366.
DOI: 10.12677/aam.2024.1312518

method are verified by case analysis.

Keywords

σ **Dominant Relationship, Entropy of** σ **Dominant Information, Three-Way Decision**

1. 引言

在实际生活中，很多信息往往无法用精确的数值来描述。1965 年，Zadeh [1]提出模糊集的概念，将元素与一个集合的关系扩展到用隶属度来进行刻画。1986 年，Atanassov [2]提出了直觉模糊集的概念，它同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度三方面的信息，可以更加灵活地处理不确定性以及模糊性问题。目前直觉模糊集已经被广泛应用于多属性决策[3]、信息融合[4]以及模式识别[5]等领域。

2009 年，姚一豫[6]提出三支决策理论，其核心思想是“三分而治”，即：将论域分为三个互不相交的区域(正域、负域和边界域)，根据阈值选择接受、拒绝和延迟三种决策行动。近年来，众多学者对三支决策理论进行了研究和拓展。文献[7]同时考虑了三支决策与粒计算这两个领域，并提出 TAO 模型，文献[8]将变精度粗糙集和三支决策有效地结合在了一起，建立了一个具有乐观、悲观和妥协三种策略的三支决策模型，文献[9]同时考虑了备选方案的预期损失和预期效用，制定了新的三支决策模型来解决多属性决策问题，文献[10]提出(α,β)-概率优势相似关系，构造了具有三种策略的犹豫模糊三支决策方法，文献[11]提出了一种基于灰色关联分析和 TOPSIS 的灰色多准则三支决策模型，实现了灰色系统理论与三支决策的有效融合。

直觉模糊集与三支决策在处理不确定性问题上都有着显著的优势，将二者结合在一起可以更好的做出决策，从而解决实际问题。薛占熬[12]等提出了一种基于直觉模糊可能性分布的直觉模糊可能性测度，并在此基础上构建了三支决策模型。代建华[13]等人建立了一个面向直觉模糊概念的三支决策模型，解决了在直觉模糊多准则环境中带有决策者偏好的排序问题。李小男[14]等人重新定义了相似度函数，建立了直觉模糊信息系统上的三支决策模型，并且基于加权信息熵提出了一种新的阈值求解方法。王文杰[15]等人研究了直觉模糊信息系统中基于概率优势关系的三支多属性决策模型。刘培德[16]等人为了获得更公平的方案，建立了一种新的相对损失函数积分方法，来解决带有直接模糊数的三支决策模型。

通过引入直觉模糊信息，三支决策能够更精确地捕捉到决策对象的特征和属性，尤其是在面对高度不确定或模糊的信息时。这种精确性有助于减少决策错误，提高决策的质量。因此，本文在现有文献的基础上，将三支决策理论与直觉模糊信息系统相结合，通过引入σ优势关系，构造了σ优势信息熵，从而避免了直接人为规定属性权重的缺陷；其次，本文还在σ优势类的基础上，提出计算条件概率的新方法，制定了新的三支决策规则，实现了对对象的划分；最后，针对此方法，本文给出了实例分析，由此来验证本文方法的有效性。

2. 预备知识

2.1. 直觉模糊集相关概念

定义 1 [2] 设 U 是一个非空有限集合，称 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))|x\in U\}$ 为 U 上的一个直觉模糊集，其

中 $\mu_A(x)$，$v_A(x)$ 分别表示对象 x 属于直觉模糊集 A 的隶属度和非隶属度，$\mu_A(x)$，$v_A(x)\in[0,1]$，且满足 $0\le\mu_A(x)+v_A(x)\le 1$。称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-v_A(x)$ 为元素 x 属于直觉模糊集 A 中的犹豫度，且 $0\le\pi_A(x)\le 1$。

为了方便，将序对 $\langle\mu_A(x),v_A(x)\rangle$ 称为直觉模糊数。U 上的直觉模糊集 A 构成的集合记为 $IFS(U)$。

定义 2 [17] 设 $\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$ 和 $\beta=(\mu_\beta,v_\beta)$ 是两个直觉模糊数，则 $\alpha\le\beta$ 当且仅当 $\mu_\alpha\le\mu_\beta$ 且 $v_\alpha\ge v_\beta$。

定义 3 [18] 设 $\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$ 是直觉模糊数，其得分函数定义为：

$$S(\alpha)=\mu_\alpha-v_\alpha+\frac{1-\mu_\alpha-v_\alpha}{2},\tag{1}$$

该得分函数同时将 $\mu_A(x),v_A(x)$ 和 $1-\mu_A(x)-v_A(x)$ 考虑在内，且 $S(\alpha)$ 的值越大，则该方案的可靠性越强，越满足决策者的需求。

定义 4 [2] [19] 设 $\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$ 和 $\beta=(\mu_\beta,v_\beta)$ 是两个直觉模糊数，h 为一个常数且 $h>0$，定义直觉模糊数之间的运算如下：

1) $\alpha^c=(v_\alpha,\mu_\alpha)$；
2) $\alpha\oplus\beta=\left(1-(1-\mu_\alpha)(1-\mu_\beta),v_\alpha v_\beta\right)$；
3) $\alpha\otimes\beta=\left(\mu_\alpha\mu_\beta,1-(1-v_\alpha)(1-v_\beta)\right)$；
4) $h\alpha=\left(1-(1-\mu_\alpha)^h,v_\alpha^h\right)$；
5) $\alpha^h=\left(\mu_\alpha^h,1-(1-v_\alpha)^h\right)$；
6) $\alpha\ominus\beta=\left(\mu_\alpha v_\beta,1-(1-v_\alpha)(1-\mu_\beta)\right)$。

2.2. 三支决策相关理论

设状态集 $\Omega=\{X,\neg X\}$，其中，X 和 $\neg X$ 分别表示对象属于 X 和对象不属于 X 两种情况。行动集 $\Lambda=\{a_P,a_B,a_N\}$，其中，a_P,a_B,a_N 分别表示接受决策、延迟决策和拒绝决策三种行为。在实际决策过程中，考虑到不同状态下采取不同行动往往会产生不同的损失代价。表 1 给出相应的决策代价损失，其中 λ_{PP}，λ_{BP} 和 λ_{NP} 为对象属于状态 X 时，分别采取行动 a_P，a_B 和 a_N 对应的代价损失，λ_{PN}，λ_{BN} 和 λ_{NN} 为对象不属于状态 X 时，分别采取 a_P，a_B 和 a_N 行动的代价损失[6]。

Table 1. Decision cost loss function
表 1. 决策代价损失函数

行动	X	$\neg X$
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}

$\forall x\in U$，采取行动 $a_i(i=P,B,N)$ 所产生的风险代价损失可计算为：

$$R(a_P|[x])=\lambda_{PP}\Pr(X|[x])+\lambda_{PN}\Pr(\neg X|[x]);\tag{2}$$

$$R(a_B|[x])=\lambda_{BP}\Pr(X|[x])+\lambda_{BN}\Pr(\neg X|[x]);\tag{3}$$

$$R(a_N|[x])=\lambda_{NP}\Pr(X|[x])+\lambda_{NN}\Pr(\neg X|[x]).\tag{4}$$

依据贝叶斯理论，可获得如下决策规则：

(P) 若 $R\left(a_P \middle| [x]\right) \le R\left(a_B \middle| [x]\right)$ 且 $R\left(a_P \middle| [x]\right) \le R\left(a_N \middle| [x]\right)$，则 $x \in POS(X)$；

(B) 若 $R\left(a_B \middle| [x]\right) \le R\left(a_P \middle| [x]\right)$ 且 $R\left(a_B \middle| [x]\right) \le R\left(a_N \middle| [x]\right)$，则 $x \in BND(X)$；

(N) 若 $R\left(a_N \middle| [x]\right) \le R\left(a_P \middle| [x]\right)$ 且 $R\left(a_N \middle| [x]\right) \le R\left(a_B \middle| [x]\right)$，则 $x \in NEG(X)$。

由实际可知，损失值满足 $0 \le \lambda_{PP} \le \lambda_{BP} < \lambda_{NP}$ 且 $0 \le \lambda_{NN} \le \lambda_{BN} < \lambda_{PN}$，则上述决策规则 $(P)-(N)$ 可进一步简化为规则 $(P')-(N')$：

(P') 若 $\Pr\left(X \middle| [x]\right) \ge \alpha$，则 $x \in POS(X)$；

(B') 若 $\beta < \Pr\left(X \middle| [x]\right) < \alpha$，则 $x \in BND(X)$；

(N') 若 $\Pr\left(X \middle| [x]\right) \le \beta$，则 $x \in NEG(X)$。

其中，

$$\alpha = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})}, \tag{5}$$

$$\beta = \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})}. \tag{6}$$

3. 基于直觉模糊信息系统下的三支决策

目前的研究方法中，大多都是基于决策者的经验或知识主观给出属性权重，这往往导致决策结果出现一定的偏差。针对这个问题，本文在直觉模糊信息系统下，基于吴佳明[20]等人提出的 σ 优势关系来得出每个属性的权重，并且重新定义了条件概率，制定出新的三支决策规则，从而实现备选对象的排序，更好的实现了方案的划分，提高了决策的准确性与科学性。

定义 5 [21]称 $IFIS = (U, A, V, f)$ 为直觉模糊信息系统。其中 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为非空有限对象集，称为论域。$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 为非空有限属性集，$V = \bigcup_{a \in A} V_a$，$V_a$ 为属性 a 的值域。函数 $f: U \times A \to V$ 为 U 到 V 上的映射，满足对任意 $x \in U$，$a \in A$，有 $f(x, a) \in V_a$。

定义 6 [20] 称 $IFIS = (U, A, V, f, \sigma)$ 为一个基于 σ 优势关系的直觉模糊信息系统。其中 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为非空有限对象集，$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 为非空有限属性集，$V = \bigcup_{a_k \in A} V_{a_k}$，$V_{a_k}$ 为属性 $a_k \in A$ 的值域。函数 $f: U \times A \to V$ 为 U 到 V 上的映射，满足对任意 $x \in U$，$a_k \in A$，有 $f(x, a_k) \in V_{a_k}, k = 1, 2, \cdots, m$，$\sigma$ 为参数且 $\sigma \in (0, 1]$。则 σ 优势关系定义为：

$$x_i \prec^{\sigma} x_j = \left\{ (x_i, x_j) \middle| f(x_i, a_{kl}) \le f(x_j, a_{kl}), a_{kl} \in \{a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kp}\} \subseteq A, \frac{p}{m} \ge \sigma \right\}, \tag{7}$$

表示 x_j 在 σ 程度上优于 x_i。

定义 7 [20] 给定一个基于 σ 优势关系的直觉模糊信息系统 $IFIS = (U, A, V, f, \sigma)$。对任意 $x_i \in U$，x_i 的 σ 优势类定义为：$[x_i]^{\sigma} = \left\{ x_j \middle| x_i \prec^{\sigma} x_j \wedge x_j \in U \right\}$。

特别地，当 $\sigma = 1$ 时，σ 优势类 $[x_i]^{\sigma}$ 退化为传统优势类。且 σ 优势类 $[x_i]^{\sigma}$ 在直觉模糊系统中只满足自反性，不满足对称性和传递性。

定义 8 给定一个基于 σ 优势关系的直觉模糊信息系统 $IFIS = (U, A, V, f, \sigma)$。$\forall x_i \in U$，$B \subseteq A$，$R_B^{\prec^{\sigma}} = \left\{ [x_i]_B^{\sigma} \middle| x_i \in U, i = 1, 2, \cdots, n \right\}$ 为每个对象关于属性集 B 的一个分类，$U / R_B^{\prec^{\sigma}}$ 构成论域 U 的一个覆盖，$|\cdot|$ 表示集合的基数，则 σ 优势信息熵可定义为：

$$E\left(R_B^{\prec^{\sigma}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|[x_i]_B^{\sigma}\right|}{|U|} \frac{\left|U / R_B^{\prec^{\sigma}}\right|}{|U|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|[x_i]_B^{\sigma}\right|}{|U|} \left(1 - \frac{\left|[x_i]_B^{\sigma}\right|}{|U|}\right), \tag{8}$$

定义 9 给定一个基于 σ 优势关系的直觉模糊信息系统 $IFIS=(U,A,V,f,\sigma)$。$\forall a_k\in A,\ B\subseteq A$，则 a_k 的属性重要度为：

$$Sig_{B-\{a_k\}}(a_k)=\left|E\left(R_B^{\prec^\sigma}\right)-E\left(R_{B-\{a_k\}}^{\prec^\sigma}\right)\right|, \tag{9}$$

从而可以根据上述公式得出每个属性的权重：

$$w_{a_k}=\frac{Sig_{B-\{a_k\}}(a_k)}{\sum_{j=1}^{m}Sig_{B-\{a_j\}}(a_j)}, \tag{10}$$

显然，有 $w_{a_k}\in[0,1]$ 且 $\sum_{k=1}^{m}w_{a_k}=1$ 成立。

在三支决策中，传统的条件概率通常以实数的形式进行表示，但在模糊决策分析中，概率值往往不是完全确定的。本文用直觉模糊数的形式重新定义了条件概率，使得在决策过程中，条件概率可以更真实的反映这种模糊性和不确定性，更全面的了解事情的可能性，从而做出更合理的决策。

定义 10 给定一个基于 σ 优势关系的直觉模糊信息系统 $IFIS=(U,A,V,f,\sigma)$。其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为非空有限对象集，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为非空有限属性集，w_{a_k} 为属性 a_k 下的权重，$f(x_i,a_j)=(u_{ij},v_{ij})$ 为对象 x_i 在属性 a_j 下的属性值，x_i 的 σ 优势类 $[x_i]_A^\sigma$ 属于状态 X 的条件概率定义为：

$$\Pr\left(X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)=\left(\frac{1}{\left|[x_i]_A^\sigma\right|}\sum_{a_k\in A}\sum_{x_j\in[x_i]_A^\sigma}w_{a_k}u_{jk},\frac{1}{\left|[x_i]_A^\sigma\right|}\sum_{a_k\in A}\sum_{x_j\in[x_i]_A^\sigma}w_{a_k}v_{jk}\right), \tag{11}$$

定义 11 给定一个基于 σ 优势关系的直觉模糊信息系统 $IFIS=(U,A,V,f,\sigma)$。x_i 的 σ 优势类 $[x_i]_A^\sigma$ 不属于状态 X 的条件概率定义为：

$$\Pr\left(\neg X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)=(1,0)\ominus\Pr\left(X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)=\left(\frac{1}{\left|[x_i]_A^\sigma\right|}\sum_{a_k\in A}\sum_{x_j\in[x_i]_A^\sigma}w_{a_k}v_{jk},\frac{1}{\left|[x_i]_A^\sigma\right|}\sum_{a_k\in A}\sum_{x_j\in[x_i]_A^\sigma}w_{a_k}u_{jk}\right). \tag{12}$$

下面将根据定义 10 和定义 11 中给出的条件概率制定新的正域、边界域和负域的分类规则。

给定一个基于 σ 优势关系的直觉模糊信息系统 $IFIS=(U,A,V,f,\sigma)$。其中论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为非空有限对象集，状态集合为 $\Omega=\{X,\neg X\}$，行动集合为 $\Lambda=\{a_P,a_B,a_N\}$，$\lambda_{*P}^i\ (*=P,B,N)$ 表示对象 x_i 在状态 X 下采取行动 a_* 的代价损失，$\lambda_{*N}^i\ (*=P,B,N)$ 表示对象 x_i 不在状态 X 下采取行动 a_* 的代价损失。其中，$\lambda_{PP}^i\le\lambda_{BP}^i<\lambda_{NP}^i$，$\lambda_{NN}^i\le\lambda_{BN}^i<\lambda_{PN}^i$。$\Pr\left(X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$ 和 $\Pr\left(\neg X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$ 分别为 x_i 的 σ 优势类 $[x_i]_A^\sigma$ 属于状态 X 和不属于状态 X 的条件概率，则对象 x_i 采取不同决策行动的期望损失计算如下：

$$R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)=\lambda_{PP}^i\otimes\Pr\left(X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\oplus\lambda_{PN}^i\otimes\Pr\left(\neg X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right); \tag{13}$$

$$R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)=\lambda_{BP}^i\otimes\Pr\left(X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\oplus\lambda_{BN}^i\otimes\Pr\left(\neg X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right); \tag{14}$$

$$R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)=\lambda_{NP}^i\otimes\Pr\left(X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\oplus\lambda_{NN}^i\otimes\Pr\left(\neg X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right). \tag{15}$$

依据贝叶斯最小风险决策原则，决策规则 $(P'')-(N'')$ 表示如下：

(P'') 若 $R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\le R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$ 且 $R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\le R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$，则 $x_i\in POS(X)$；

(B'') 若 $R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\le R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$ 且 $R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\le R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$，则 $x_i\in BND(X)$；

(N'') 若 $R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\le R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$ 且 $R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\le R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$，则 $x_i\in NEG(X)$。

根据定义 3，我们可以进一步表达决策规则 $(P''')-(N''')$，结果如下所示：

(P''') 若 $S\left(R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)\le S\left(R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)$ 且 $S\left(R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)\le S\left(R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)$，则 $x_i\in POS(X)$；

(B''') 若 $S\left(R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)\le S\left(R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)$ 且 $S\left(R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)\le S\left(R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)$，则 $x_i\in BND(X)$；

(N''') 若 $S\left(R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)\le S\left(R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)$ 且 $S\left(R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)\le S\left(R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)$，则 $x_i\in NEG(X)$。

将对象 x_i 制定风险决策对应的损失定义为 $loss(x_i)=\min\left\{\left(R\left(a_P\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right),S\left(R\left(a_B\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right),S\left(R\left(a_N\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)\right\}$，又根据 $POS(X)\succ BND(X)\succ NEG(X)$ 的顺序，我们可以制定出新的多属性排序问题的规则：

1) 若 $x_i,x_j\in POS(X)$，$loss(x_i)<loss(x_j)$，则有 $x_i\succ x_j$。
2) 若 $x_i,x_j\in BND(X)$，$loss(x_i)<loss(x_j)$，则有 $x_i\succ x_j$。
3) 若 $x_i,x_j\in NEG(X)$，$loss(x_i)<loss(x_j)$，则有 $x_i\succ x_j$。

4. 决策步骤和算法

本文提出的基于 σ 优势关系下的直觉模糊三支决策方法的关键步骤总结如下：

输入：一个直觉模糊系统 $IFIS=(U,A,V,f,\sigma)$，参数 σ，$\lambda_{\triangleleft\triangleright}(\triangleleft=B,P,N,\triangleright=P,N)$。

输出：方案 x_i 的排序结果。

Step 1：根据定义 7 计算每个方案的 σ 优势类 $[x_i]_A^\sigma$。

Step 2：根据定义 8 可以分别得到属性集 A 和属性集 $A-\{a_k\}$ 所对应的 σ 优势信息熵。

Step 3：利用定义 9 计算出每个属性的权重。

Step 4：根据定义 10 和定义 11 计算每个方案的条件概率 $\Pr\left(X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$ 和 $\Pr\left(\neg X\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)$。

Step 5：通过决策者给出的每个方案的相对损失函数以及规则 $(P'')-(N'')$，计算出每个方案的预期损失函数 $R\left(a_*\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)(*=P,B,N)$。

Step 6：进一步地，根据定义 3 计算出每个方案下损失函数的得分函数 $S\left(R\left(a_*\left|[x_i]_A^\sigma\right.\right)\right)(*=P,B,N)$。

Step 7：利用决策规则 $(P''')-(N''')$ 获得 $POS(X)$，$BND(X)$，$NEG(X)$。

Step 8：根据多属性排序问题的规则(1)~(3)，对所有方案进行排序。

5. 实例分析

某公司要收购一批汽车，现有六种品牌在考虑范围内，这六种品牌的汽车集合为 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$，汽车的挑选一般以燃油效率 a_1、外观设计 a_2、品牌口碑 a_3、维护成本 a_4、安全设备 a_5 这五个属性作为参考，即 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 构成了属性集。取参数 $\sigma=0.6$，直觉模糊信息系统以及相对损失函数如表 2 和表 3 所示：

首先由定义 7 可知，对象的 σ 优势类分别为：

$$[x_1]_A^{0.6}=\{x_1,x_5\},[x_2]_A^{0.6}=\{x_2,x_3,x_5\},[x_3]_A^{0.6}=\{x_3,x_4,x_5\},$$

$$[x_4]_A^{0.6}=\{x_4\},[x_5]_A^{0.6}=\{x_5\},[x_6]_A^{0.6}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}.$$

Table 2. Intuitionistic fuzzy information system
表 2. 直觉模糊信息系统

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	(0.6, 0.2)	(0.7, 0.2)	(0.5, 0.4)	(0.5, 0.2)	(0.7, 0.2)
x_2	(0.8, 0.1)	(0.5, 0.3)	(0.7, 0.3)	(0.6, 0.4)	(0.7, 0.3)
x_3	(0.7, 0.2)	(0.5, 0.2)	(0.5, 0.5)	(0.6, 0.3)	(0.8, 0.2)
x_4	(0.5, 0.4)	(0.6, 0.1)	(0.6, 0.2)	(0.7, 0.2)	(0.6, 0.1)
x_5	(0.8, 0.2)	(0.6, 0.2)	(0.7, 0.3)	(0.7, 0.2)	(0.7, 0.2)
x_6	(0.6, 0.4)	(0.5, 0.2)	(0.6, 0.4)	(0.5, 0.3)	(0.6, 0.3)

Table 3. The relative loss function of the object x_i
表 3. 对象 x_i 的相对损失函数

U	λ_{PP}^i	λ_{BP}^i	λ_{NP}^i	λ_{PN}^i	λ_{BN}^i	λ_{NN}^i
x_1	(0, 1)	(0.25.0.55)	(0.54, 0.20)	(0.76, 0.07)	(0.41, 0.37)	(0, 1)
x_2	(0, 1)	(0.36, 0.54)	(0.71, 0.19)	(0.76, 0.15)	(0.41, 0.49)	(0, 1)
x_3	(0, 1)	(0.26, 0.53)	(0.56, 0.18)	(0.76, 0.08)	(0.41, 0.39)	(0, 1)
x_4	(0, 1)	(0.15, 0.65)	(0.80, 0.13)	(0.93, 0.05)	(0.26, 0.66)	(0, 1)
x_5	(0, 1)	(0.32, 0.44)	(0.65, 0.11)	(0.70, 0.12)	(0.36, 0.46)	(0, 1)
x_6	(0, 1)	(0.11, 0.71)	(0.33, 0.29)	(0.81, 0.28)	(0.11, 0.73)	(0, 1)

又由定义 8 得到σ优势信息熵：

$$E\left(R_A^{\prec 0.6}\right)=1, E\left(R_{A-\{a_1\}}^{\prec 0.6}\right)=\frac{41}{36}, E\left(R_{A-\{a_2\}}^{\prec 0.6}\right)=\frac{34}{36},$$
$$E\left(R_{A-\{a_3\}}^{\prec 0.6}\right)=\frac{40}{36}, E\left(R_{A-\{a_4\}}^{\prec 0.6}\right)=\frac{34}{36}, E\left(R_{A-\{a_5\}}^{\prec 0.6}\right)=\frac{40}{36}.$$

由此可知，$a_k\left(k=1,2,\cdots,5\right)$ 的属性重要度分别为：

$$Sig_{A-\{a_1\}}\left(a_1\right)=\frac{5}{36}, Sig_{A-\{a_2\}}\left(a_2\right)=\frac{1}{18}, Sig_{A-\{a_3\}}\left(a_3\right)=\frac{1}{9},$$
$$Sig_{A-\{a_4\}}\left(a_4\right)=\frac{1}{18}, Sig_{A-\{a_5\}}\left(a_5\right)=\frac{1}{9}.$$

所以，每个属性的权重分别为：

$$w_{a_1}=\frac{5}{17}, w_{a_2}=\frac{2}{17}, w_{a_3}=\frac{4}{17}, w_{a_4}=\frac{2}{17}, w_{a_5}=\frac{4}{17}.$$

由定义 10 可得到对象 x_i 在σ优势类$\left[x_i\right]_A^\sigma$下的条件概率分别为：

$$\Pr\left(X\left|\left[x_1\right]_A^\sigma\right.\right)=\left(0.6588,0.2353\right), \Pr\left(X\left|\left[x_2\right]_A^\sigma\right.\right)=\left(0.6843,0.2529\right),$$
$$\Pr\left(X\left|\left[x_3\right]_A^\sigma\right.\right)=\left(0.6471,0.2431\right), \Pr\left(X\left|\left[x_4\right]_A^\sigma\right.\right)=\left(0.5824,0.2235\right),$$
$$\Pr\left(X\left|\left[x_5\right]_A^\sigma\right.\right)=\left(0.7176,0.2235\right), \Pr\left(X\left|\left[x_6\right]_A^\sigma\right.\right)=\left(0.6353,0.2618\right).$$

由表 3 可计算得出期望损失，结果如表 4 所示：

Table 4. The expected loss of the object x_i
表 4. 对象 x_i 的期望损失

U	$R\left(a_P \middle\| [x_i]_A^{\sigma}\right)$	$R\left(a_B \middle\| [x_i]_A^{\sigma}\right)$	$R\left(a_N \middle\| [x_i]_A^{\sigma}\right)$
x_1	(0.1788, 0.6827)	(0.2453, 0.5149)	(0.3558, 0.3882)
x_2	(0.1922, 0.7317)	(0.3245, 0.5507)	(0.4859, 0.3948)
x_3	(0.1848, 0.6753)	(0.2511, 0.5056)	(0.3624, 0.3793)
x_4	(0.2079, 0.6033)	(0.1404, 0.6248)	(0.4659, 0.3244)
x_5	(0.1565, 0.7515)	(0.2916, 0.4790)	(0.4664, 0.3089)
x_6	(0.2121, 0.7374)	(0.0967, 0.7085)	(0.2096, 0.4759)

根据表 4 可以计算出预期损失的得分函数，如表 5 所示：

Table 5. Score function
表 5. 得分函数

U	$S\left(R\left(a_P \middle\| [x_i]_A^{\sigma}\right)\right)$	$S\left(R\left(a_B \middle\| [x_i]_A^{\sigma}\right)\right)$	$S\left(R\left(a_N \middle\| [x_i]_A^{\sigma}\right)\right)$
x_1	−0.4347	−0.1497	0.0956
x_2	−0.5015	−0.1638	0.1508
x_3	−0.4206	−0.1329	0.1123
x_4	−0.3010	−0.3670	0.2464
x_5	−0.5490	−0.0727	0.2699
x_6	−0.5001	−0.5144	−0.1091

根据决策规则$(P''')-(N''')$，可以得到最终的决策结果：$POS(X)=\{x_1,x_2,x_3,x_5\}$，$BND(X)=\{x_4,x_6\}$，$NEG(X)=\varnothing$。其方案的最终排序结果为：$x_5 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_6 \succ x_4$。

6. 结束语

目前在三支决策中，越来越多的学者研究对损失函数以及条件概率的改进方法，传统而严格的等价关系已经不能满足于现有的要求，因此本文通过更弱的优势关系来划分对象，并在直觉模糊信息系统的背景下，将其与三支决策理论将结合，以此制定出新的决策规则。此外，还可以对 σ 优势关系展开更多研究，比如：σ 优势关系基于不完备的信息系统下如何与三支决策相结合，σ 优势关系是否可以与多粒度粗糙集结合等问题。

参考文献

[1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/s0019-9958(65)90241-x

[2] Atanassov, K.T. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 87-96. https://doi.org/10.1016/s0165-0114(86)80034-3

[3] Jan, N., Gwak, J., Pamucar, D. and Martínez, L. (2023) Hybrid Integrated Decision-Making Model for Operating System Based on Complex Intuitionistic Fuzzy and Soft Information. *Information Sciences*, **651**, Article ID: 119592. https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.119592

[4] Palanisami, D., Mohan, N. and Ganeshkumar, L. (2022) A New Approach of Multi-Modal Medical Image Fusion Using Intuitionistic Fuzzy Set. *Biomedical Signal Processing and Control*, **77**, Article ID: 103762. https://doi.org/10.1016/j.bspc.2022.103762

[5] Joshi, R. and Kumar, S. (2018) Exponential Jensen Intuitionistic Fuzzy Divergence Measure with Applications in Medical Investigation and Pattern Recognition. *Soft Computing*, **23**, 8995-9008. https://doi.org/10.1007/s00500-018-3505-2

[6] Yao, Y. (2010) Three-Way Decisions with Probabilistic Rough Sets. *Information Sciences*, **180**, 341-353. https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.09.021

[7] Yao, Y. (2018) Three-Way Decision and Granular Computing. *International Journal of Approximate Reasoning*, **103**, 107-123. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2018.09.005

[8] Zou, D., Xu, Y., Li, L. and Ma, Z. (2023) Novel Variable Precision Fuzzy Rough Sets and Three-Way Decision Model with Three Strategies. *Information Sciences*, **629**, 222-248. https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.01.141

[9] Bisht, G. and Pal, A.K. (2024) Three-Way Decisions Based Multi-Attribute Decision-Making with Utility and Loss Functions. *European Journal of Operational Research*, **316**, 268-281. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.01.043

[10] Wang, J., Ma, X., Xu, Z. and Zhan, J. (2022) A Three-Way Decision Approach with Risk Strategies in Hesitant Fuzzy Decision Information Systems. *Information Sciences*, **588**, 293-314. https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.12.079

[11] Du, J., Liu, S. and Liu, Y. (2021) A Novel Grey Multi-Criteria Three-Way Decisions Model and Its Application. *Computers & Industrial Engineering*, **158**, Article ID: 107405. https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107405

[12] 薛占熬, 辛现伟, 袁艺林, 等. 基于直觉模糊可能性分布的三支决策模型的研究[J]. 计算机科学, 2018, 45(2): 135-139.

[13] Dai, J., Chen, T. and Zhang, K. (2023) The Intuitionistic Fuzzy Concept-Oriented Three-Way Decision Model. *Information Sciences*, **619**, 52-83. https://doi.org/10.1016/j.ins.2022.11.017

[14] 李小南, 赵璐, 易黄建. 基于加权信息熵的直觉模糊信息系统的三支决策[J]. 控制与决策, 2022, 37(10): 2705-2713.

[15] Wang, W., Zhan, J. and Mi, J. (2022) A Three-Way Decision Approach with Probabilistic Dominance Relations under Intuitionistic Fuzzy Information. *Information Sciences*, **582**, 114-145. https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.09.018

[16] Liu, P., Wang, Y., Jia, F. and Fujita, H. (2020) A Multiple Attribute Decision Making Three-Way Model for Intuitionistic Fuzzy Numbers. *International Journal of Approximate Reasoning*, **119**, 177-203. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2019.12.020

[17] Yang, X. and Zhang, M. (2011) Dominance-Based Fuzzy Rough Approach to an Interval-Valued Decision System. *Frontiers of Computer Science in China*, **5**, 195-204. https://doi.org/10.1007/s11704-011-0331-4

[18] Lin, L., Yuan, X. and Xia, Z. (2007) Multicriteria Fuzzy Decision-Making Methods Based on Intuitionistic Fuzzy Sets. *Journal of Computer and System Sciences*, **73**, 84-88. https://doi.org/10.1016/j.jcss.2006.03.004

[19] 黄德舜. 直觉模糊数的运算法则及其决策模型的拓展研究[D]: [硕士学位论文]. 合肥: 安徽大学, 2012.

[20] 吴家明, 黄哲煌, 李进金, 刘丹玥. σ 优劣关系熵及其在多属性决策的应用[J]. 控制与决策, 2022, 37(4): 1-11.

[21] 李宏. 基于优势关系的多源直觉模糊粗糙集模型的研究[D]: [硕士学位论文]. 临汾: 山西师范大学, 2021.