

# 高超音速可渗透表面边界层的流动和传热分析

马 源, 张 艳\*

北京建筑大学理学院, 北京

收稿日期: 2024年11月9日; 录用日期: 2024年12月2日; 发布日期: 2024年12月12日

## 摘 要

本文研究了具有气体注入的高超音速边界层流动和传热规律。考虑了气体注入强度对边界层流动和传热的影响, 建立了具有气体注入的高超音速边界层流动和传热控制方程。通过合适的相似变换将偏微分控制方程转化为常微分方程组, 同时利用同伦分析法获得了常微分方程组的解。绘图讨论了注入参数对速度场和温度场的影响。

## 关键词

高超音速边界层, 可渗透表面, 气体注入, 同伦分析法

# Flow and Heat Transfer Analysis of Hypersonic Permeable Surface Boundary Layer

Yuan Ma, Yan Zhang\*

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Nov. 9<sup>th</sup>, 2024; accepted: Dec. 2<sup>nd</sup>, 2024; published: Dec. 12<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

This paper investigates the flow and heat transfer laws of hypersonic boundary layer with gas injection. Considering the influence of gas injection intensity on boundary layer flow and heat transfer, a control equation for hypersonic boundary layer flow and heat transfer with gas injection was

\*通讯作者。

文章引用: 马源, 张艳. 高超音速可渗透表面边界层的流动和传热分析[J]. 应用数学进展, 2024, 13(12): 5129-5135.  
DOI: 10.12677/aam.2024.1312495

established. By using appropriate similarity transformations, the partial differential control equations were transformed into a system of ordinary differential equations, and the solution of the system of ordinary differential equations was obtained using homotopy analysis. The graph discusses the influence of injection parameters on velocity and temperature fields.

## Keywords

Hypersonic Boundary Layer, Permeable Surface, Gas Injection, Homotopy Analysis Method

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

高超音速技术在巩固国防安全方面具有重要价值。世界各国都在加紧研制飞行速度更快、飞行距离更长、响应时间更短、突防能力更强的高超音速飞行器。在高超音速飞行过程中, 飞行器周围的空气由于受到强烈的压缩而出现高温, 这是气动加热的主要来源。气动热会引起热应力、热应变和材料腐蚀, 使飞机内部温度升高, 从而恶化机舱内的工作环境。目前, 利用注入方式解决热防护问题的研究已经取得了初步进展[1][2]。Lysenko 等人[3]对超音速边界层中注入重质气体对层流-湍流过渡影响进行了实验研究。Lushchik 等人[4]研究了可渗透板边界层中的温度恢复因子。Mustafa [5]对多孔板发汗冷却的传热问题进行了研究。以空气为热气流, 水为冷却剂数值研究了热气流雷诺数、空气进口温度和水质量流量对多孔板壁温的影响。随后, Wang [6]等人研究了低速引射对高超音速飞行器气动加热的影响, 讨论了引射孔结构、迎角和引射速度对边界层流场的影响, 得到了不同引射孔结构下的壁面热流。Kichatov 等人[7]研究了气体冷却剂温度对超音速多孔壁发热冷却的影响。最近, Makarova [8]等人数值研究了  $Pr < 1$  时层流可压缩气体在可渗透表面的传热特性。Gaponov 和 Smorodsky [9]研究了  $C_{10}H_8$  升华表面超音速边界层的稳定性, 建立了考虑升华物质蒸汽的边界层控制方程。随后, Gaponov 等人[10]对  $C_{10}H_8$  升华表面超音速边界层进行了数值模拟, 计算了马赫数  $M = 2$  时的超音速边界层参数。结果表明, 表面材料升华后, 进入飞行器的热流密度降低。

虽然注入式热防护问题的研究已经受到广泛关注, 但气体注入的高超音速可渗透表面边界层的流动和传热分析的数值研究还很少涉及。因此, 基于以上研究进展, 本文建立了气体注入条件下的边界层流动和传热控制方程, 通过合适的相似变换将非线性偏微分方程转换成常微分方程, 并通过通论分析法 (HAM) [11][12]求得常微分方程的近似解析解, 并且通过绘图讨论相关参数对速度场和温度场的影响。

## 2. 控制方程

考虑由多孔平板注入低温气体, 降低高超音速导致的气动热问题, 如图 1 所示。壁面处注入的质量流率为  $(\rho v)_w$ , 壁面温度为  $T_w$ , 假设压强为常数, 根据质量守恒, 动量守恒和能量守恒定律, 二维可压缩高超音速可渗透表面的边界层流动和传热控制方程如下:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

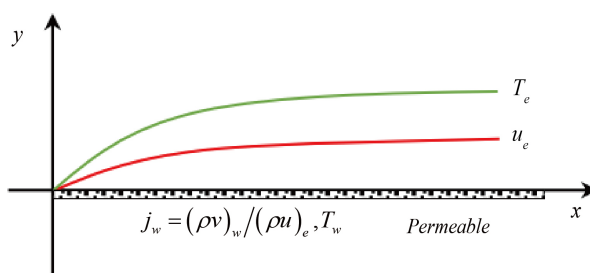


Figure 1. Schematic of the physical model

图 1. 物理模型示意图

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \mu(T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (3)$$

边界条件如下:

$$y=0: u=0, \rho v = (\rho v)_w, k \frac{\partial T}{\partial y} = c_p (\rho v)_w (T - T_w), \quad (4)$$

$$y \rightarrow \infty: u = u_e, T = T_e, \quad (5)$$

其中  $u$  和  $v$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的速度分量,  $\rho$  为流体的密度,  $T$  为流体的温度。  $M$ 、 $k$  和  $C_p$  分别表示粘度, 导热系数和定压比热容。下标标热表示边界层外缘的气体值, 可由无穷远处的气体流动参数确定。

引入 Illingworth 相似变换:

$$\psi(x, y) = f(\eta) \sqrt{2\rho_e u_e \mu_e x}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\rho_e u_e}{2\mu_e x}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy, \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_e}{T_w - T_e}. \quad (6)$$

其中  $\psi$  为流函数,  $\eta$  为无量纲自变量,  $f(\eta)$  为无量纲速度函数,  $\theta(\eta)$  为无量纲温度函数。流函数  $\psi$  自动满足连续性方程(1)且被定义为:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

通过相似变换, 可以得到化简后的常微分方程和边界条件:

$$(C_1 f'')' + ff'' = 0, \quad (8)$$

$$Pr f \theta' + (C_2 \theta')' + Pr M^2 (\gamma - 1) C_1 (f'')^2 = 0, \quad (9)$$

$$\eta=0: f(0) = -S, f'(0) = 0, \theta'(0) + \frac{SPr}{C_2} (1 - \theta(0)) = 0, \quad (10)$$

$$\eta \rightarrow \infty: f'(\infty) = 1, \theta(\infty) = 0, \quad (11)$$

其中  $C_1 = \rho\mu/\rho_e\mu_e$ ,  $C_2 = \rho k/\rho_e k_e$ ,  $Pr = \mu_e c_p/k_e$ ,  $M = u_e/\sqrt{\gamma(T_w - T_e)R}$ ,  $\gamma = c_p/c_v$ ,  $S = j_w \sqrt{2Re_x}$ 。

壁面热流可以通过热传导公式得到:

$$q_w = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=w}, \quad (12)$$

将相似解的结果代入式(12), 得到热流密度:

$$q_w = -k \frac{\partial T}{\partial \eta} \bigg|_{y=w} \frac{\partial \eta}{\partial y} \bigg|_{y=w} = -C_2 k_e T_e \sqrt{\frac{\rho_e u_e}{2\mu_e x}} \theta'(0), \quad (13)$$

壁面摩擦系数  $C_{fx}$  和剪切应力  $\tau_w$  的定义如下:

$$\tau_w = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = C_1 \rho_e u_e^2 f''(0) \frac{1}{\sqrt{2Re_x}}, \quad (14)$$

$$C_{fx} = \frac{2\tau_w}{\rho_e u_e^2} = \sqrt{2} C_1 f''(0) Re_x^{-1/2}. \quad (15)$$

### 3. 同伦分析方法(HAM)

利用同伦分析方法求解常微分方程边值问题(8)~(11)。假设基函数为:  $\{\eta^n e^{-k\eta}, n=0,1,2,\dots; k=0,1,2,\dots\}$ ,  $f(\eta), \theta(\eta)$  可表示为:

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k \eta^n e^{-k\eta}, \quad \theta(\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^k \eta^n e^{-k\eta}, \quad (16)$$

其中  $a_n^k$  和  $b_n^k$  是未知常数。初始猜测  $f_0(\eta)$  和  $\theta_0(\eta)$  由下式给出:

$$f_0 = -(S+1) + \eta + e^{-\eta}, \quad \theta_0 = \frac{SPr}{C_2 + SPr} e^{-\eta}, \quad (17)$$

辅助线性运算符定义为:

$$L_f = \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, \quad L_\theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \quad (18)$$

满足:

$$L_f(c_1 + c_2 \eta + c_3 e^{-\eta}) = 0, \quad L_\theta(c_4 + c_5 e^{-\eta}) = 0, \quad (19)$$

其中  $c_i (i=1,2,3,4,5)$  是任意常数。非线性算子表示为:

$$N_f[F(\eta; q)] = C_1 \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, \quad (20)$$

$$N_\theta[\Theta(\eta; q)] = PrF \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + PrMa^2(\gamma-1)C_1 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)^2, \quad (21)$$

$m$  阶变形问题由下式给出:

$$L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = h_f H_f(\eta) \Re_{f,m}(\eta), \quad (22)$$

$$L_\theta[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] = h_\theta H_\theta(\eta) \Re_{\theta,m}(\eta), \quad (23)$$

满足边界条件:

$$f_m(0) = 0, \quad f'_m(0) = 0, \quad f'_m(\infty) = 0, \quad (24)$$

$$\theta'_m(0) = \frac{SPr}{C_2} \theta_m(0), \quad \theta_m(\infty) = 0, \quad (25)$$

有:

$$\Re_{f,m}(\eta) = \sum_{s=0}^{m-1} f_s f_{m-1-s}'' + C_1 f_{m-1}''', \quad (26)$$

$$\Re_{\theta,m}(\eta) = Pr \sum_{s=0}^{m-1} f_s \theta'_{m-1-s} + C_2 \theta''_{m-1} + Pr Ma^2 (\gamma - 1) C_1 \sum_{s=0}^{m-1} f_s'' f''_{m-1-s}, \quad (27)$$

$$\chi_m = \begin{cases} 1, & m > 1 \\ 0, & m \leq 1 \end{cases} \quad (28)$$

根据 Liao [11]提出的解的表达式规则和收敛性, 选择辅助函数和为:

$$H_f(\eta) = H_\theta(\eta) = e^{-\eta}, \quad (29)$$

通过求解  $m$  阶变形方程, 可以得到近似解析解。

#### 4. 结果与讨论

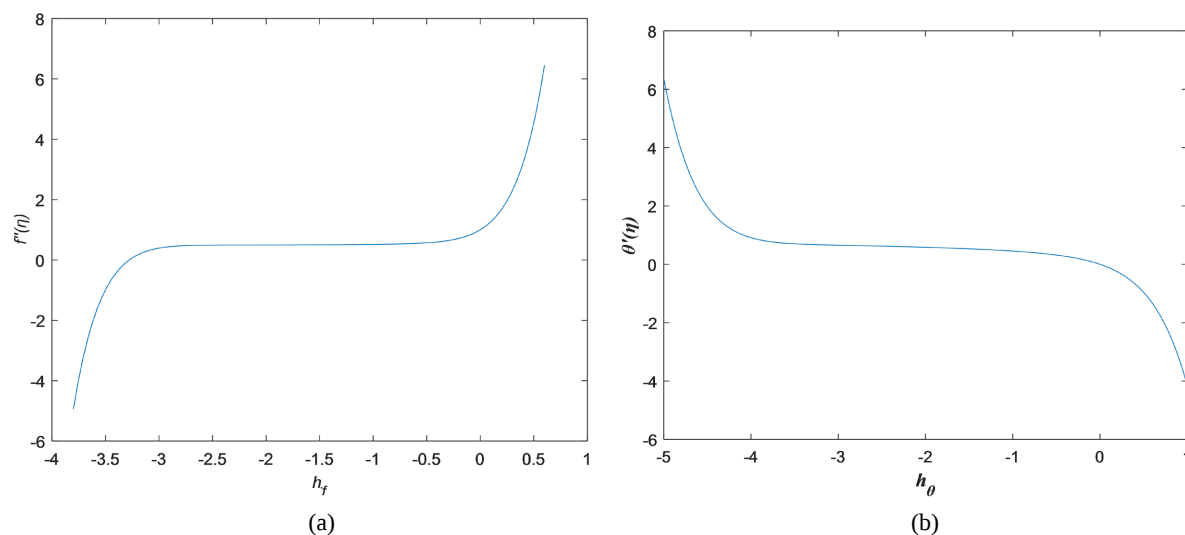
运用同伦分析方法(HAM) [12] [13]求得动量方程和能量方程的近似解析解, 根据图表分别讨论相关参数对速度场和温度场的影响。为了验证结果的有效性, 表 1 给出了  $\eta$  取不同值时  $f'(\eta)$  的对比结果。由此可见, 结果与文献具有很好的一致性。

**Table 1.** Comparison of  $f'(\eta)$  with different values of  $\eta$

**表 1.** 当  $\eta$  取不同值时,  $f'(\eta)$  值的比较

| $\eta$ | $f'(\eta)$   |                 |
|--------|--------------|-----------------|
|        | Blasius [14] | Present results |
| 0.2    | 0.2656       | 0.2652          |
| 0.4    | 0.5294       | 0.5290          |
| 0.6    | 0.7876       | 0.7872          |

解的收敛区域由  $h_f$  和  $h_\theta$  的值决定。为了找到合适的辅助参数值, 用图 2 所示的十阶近似获得了  $h$  曲线。 $h_f$  和  $h_\theta$  的取值范围是  $-3 \leq h_f \leq -0.5$ ,  $-3.5 \leq h_\theta \leq -1$ 。



**Figure 2.** The  $h$ -curves of  $f''(0)$  and  $\theta'(0)$  using the 10th-order HAM approximation

**图 2.** 10 阶 HAM 近似  $f''(0)$  和  $\theta'(0)$  的  $h$  曲线

当  $h_f = -1.5$  和  $h_\theta = -1.5$  时, 收敛级数解可在整个  $\eta$  区域上得到。图 3、图 4 分别给出了注入参数  $S$  对速度场和温度场的影响。从图 3 中可以发现, 注入气体可以减小边界层内的速度, 同时速度随着注入参数  $S$  的增大而逐渐减小。图 4 给出了不同的注入参数  $S$  对温度场的影响, 可以看出, 注入参数的影响主要是在壁面附近, 注入参数越大壁面温度越低。

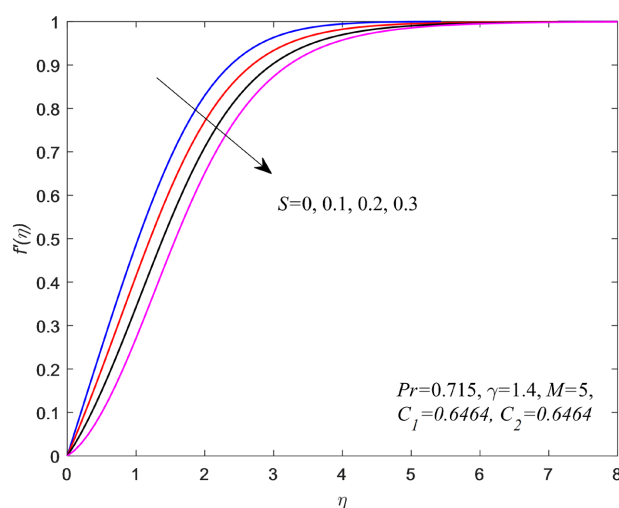


Figure 3. Influence of parameter  $S$  on velocity

图 3. 注入参数  $S$  对速度的影响

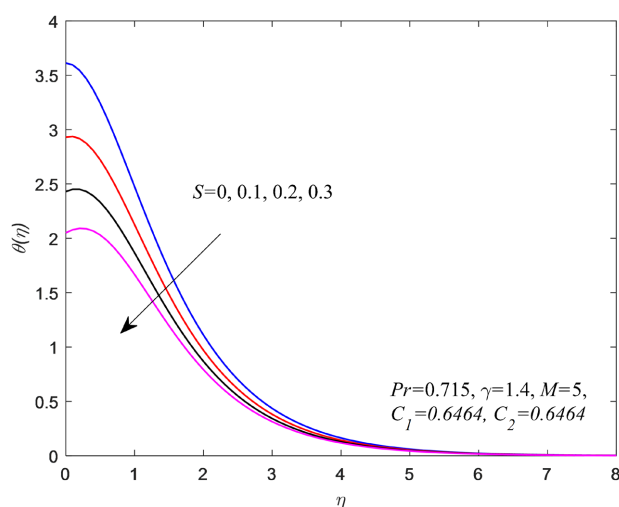


Figure 4. Influence of parameter  $S$  on temperature

图 4. 注入参数  $S$  对温度的影响

## 5. 结论

本文建立了考虑气体注入的高超音速可渗透表面边界层流动和传热的控制方程, 运用同伦分析方法 (HAM) 求得微分方程的近似解析解。通过与文献中结果的对比, 验证了方法的有效性。画图讨论了相关参数对速度场和温度场的影响。结果表明, 速度曲线和温度曲线随注入参数  $S$  的增大而减小, 气体注入减小了边界层内的速度和壁面温度。

## 基金项目

国家自然科学基金(Nos. 22478028, 22178022)。

## 参考文献

- [1] Bunker, R.S. (2005) A Review of Shaped Hole Turbine Film-Cooling Technology. *Journal of Heat Transfer*, **127**, 441-453. <https://doi.org/10.1115/1.1860562>
- [2] Bunker, R.S. (2017) Evolution of Turbine Cooling. *ASME Turbo Expo 2017: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, Charlotte, 26-30 June 2017. <https://doi.org/10.1115/gt2017-63205>
- [3] Gaponov, S.A., Ermolaev, Y.G., Zubkov, N.N., Kosinov, A.D., Lysenko, V.I., Smorodskii, B.V., *et al.* (2017) Investigation of the Effect of Heavy Gas Injection into a Supersonic Boundary Layer on Laminar-Turbulent Transition. *Fluid Dynamics*, **52**, 769-776. <https://doi.org/10.1134/s0015462817060052>
- [4] Leontiev, A.I., Lushchik, V.G. and Makarova, M.S. (2017) The Temperature Recovery Factor in a Boundary Layer on a Permeable Plate. *High Temperature*, **55**, 246-252. <https://doi.org/10.1134/s0018151x17020080>
- [5] Kilic, M. (2018) A Numerical Analysis of Transpiration Cooling as an Air Cooling Mechanism. *Heat and Mass Transfer*, **54**, 3647-3662. <https://doi.org/10.1007/s00231-018-2391-6>
- [6] 王丽燕, 檀妹静, 王振峰, 聂春生, 李宇, 郑宇. 低速引射对高超音速飞行器气动加热影响[J]. 南京航空航天大学学报, 2019(4): 503-511.
- [7] Leontiev, A., Saveliev, A., Kichatov, B., Kiverin, A., Korshunov, A. and Sudakov, V. (2019) Effect of Gaseous Coolant Temperature on the Transpiration Cooling for Porous Wall in the Supersonic Flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **142**, Article ID: 118433. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118433>
- [8] Leontiev, A.I., Lushchik, V.G. and Makarova, M.S. (2020) Distinctive Features of Heat Transfer on a Permeable Surface in a Laminar Compressible Gas Flow at Prandtl Number  $Pr < 1$ . *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **147**, Article ID: 118959. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118959>
- [9] Gaponov, S.A. and Smorodsky, B.V. (2020) Stability of a Supersonic Boundary Layer over a Surface with Sublimation. *Thermophysics and Aeromechanics*, **27**, 205-217.
- [10] Gaponov, S.A., Semenov, A.N. and Smorodsky, B.V. (2020) Numerical Simulation of Supersonic Flow Past a Plate with Surface Material Sublimation. *Thermophysics and Aeromechanics*, **27**, 81-88.
- [11] Liao, S. (2003) Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method. Chapman and Hall/CRC.
- [12] Zhang, Y., Zhang, Y., Bai, Y. and Zheng, L. (2021) Heat and Mass Transfer Analysis of Polyacrylamide Nanofluid with Specific Enthalpy Effect. *Case Studies in Thermal Engineering*, **26**, Article ID: 101060. <https://doi.org/10.1016/j.csite.2021.101060>
- [13] Bai, Y., Liu, X., Zhang, Y. and Zhang, M. (2016) Stagnation-Point Heat and Mass Transfer of MHD Maxwell Nanofluids over a Stretching Surface in the Presence of Thermophoresis. *Journal of Molecular Liquids*, **224**, 1172-1180. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2016.10.082>
- [14] 郭永怀, 著. 边界层理论讲义中国科大建校初期史料丛编[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2008.