Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(12), 5153-5163
Published Online December 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1312498

Hans汉斯

四阶非齐次薛定谔算子的KATO-JENSEN估计

谭　键，冯红亮*

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2024年10月18日；录用日期：2024年12月9日；发布日期：2024年12月18日

摘　要

本文研究带位势的四阶非齐次薛定谔算子 $H=\Delta^2-\Delta+V$ 生成的薛定谔群 e^{-itH} 在 $\mathbf{R}^5$ 中的Kato-Jensen估计，即在加权- L^2 空间中建立 e^{-itH} 关于时间的衰减估计。通过建立相应的谱测度估计，对算子唯一的能量阈值0分为正则点和特征值进行讨论。当零能量阈值为H的正则点时，时间衰减指数为$-5/2$。当零能量阈值为H的特征值时，时间衰减指数则为$-1/2$。

关键词

四阶薛定谔算子，Kato-Jensen估计，能量阈值

KATO-JENSEN Estimates of Fourth Order Non-Homogeneous Schrödinger Operator

Jian Tan, Hongliang Feng*

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Nov. 18th, 2024; accepted: Dec. 9th, 2024; published: Dec. 18th, 2024

Abstract

In this paper we study the Kato-Jensen estimates of the Schrödinger group e^{-itH} in $\mathbf{R}^5$ which is generated by the non-homogeneous fourth-order Schrödinger operator with potential $H=\Delta^2-\Delta+V$. The Kato-Jensen estimate means time decay estimate for e^{-itH} in the weighted- L^2 space. By deriving the corresponding spectral measure estimates, we classify the unique energy threshold 0 into regular points and eigenvalues. When the zero energy threshold is a regular point of H, the time decay exponent is $-5/2$. Conversely, when the zero energy threshold is an eigenvalue of H the time decay exponent is $-1/2$.

*通讯作者。

文章引用: 谭键, 冯红亮. 四阶非齐次薛定谔算子的 KATO-JENSEN 估计[J]. 应用数学进展, 2024, 13(12): 5153-5163.
DOI: 10.12677/aam.2024.1312498

Keywords

Fourth-Order Schrödinger Operator, Kato-Jensen Estimates, Energy Threshold

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文主要研究如下的四阶非齐次薛定谔算子

$$H = H_0 + V(x), \quad H_0 = \Delta^2 - \Delta, \quad x \in \mathbf{R}^5$$

其中$V(x)$为实值的位势函数满足衰减条件$|V(x)| \lesssim \left(1+|x|^2\right)^{-\beta/2}, \beta > 0$。该算子在非线性光学中有着广泛的应用。Karpman 和 Shagalov 在研究强激光束在具有 Kerr 非线性松散介质中的传播时引入了四阶非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\partial_t u + \left(\Delta^2 - \varepsilon\Delta\right)u + f(u) = 0, \varepsilon \in \{-1,0,1\},$$

见文献[1]-[3]。事实上，当$\varepsilon = 0$时即双调和算子在工程力学中有着广泛的应用，如在桥梁的弹性力学中的基本方程——梁方程(Beam Equation)。四阶薛定谔方程和波方程受到了学者们的广泛关注，见[4]-[9]等。

众所周知，一般形式的微分算子$P(D)+V$是微分算子及调和分析等众多领域的核心研究对象。作为典型例子的四阶薛定谔算子$\Delta^2 - \varepsilon\Delta + V$也引起了许多研究者的兴趣，其中色散估计因其在色散方程的适定性和散射理论中重要地位成为了薛定谔算子研究的核心课题之一。广义地讲，色散估计指的是传播子(如薛定谔群、波半群)关于时间的衰减估计。根据经典薛定谔算子$-\Delta + V$色散估计的发展，主要集中在三类估计：加权-L^2衰减估计、$L^1 - L^\infty$估计与波算子的L^p有界性。由于在 Kato 和 Jensen 开创性的系列工作[10]-[12]中，建立了薛定谔算子$-\Delta + V$完善的加权-L^2衰减估计，因此称该类型估计为 Kato-Jensen 估计。对于自由的四阶薛定谔算子$\Delta^2 - \varepsilon\Delta$，Ben-Artzi、Koch 和 Saut 在[4]中应用稳相法建立了薛定谔群$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\Delta^2 - \varepsilon\Delta\right)}, \varepsilon \in \{-1,0,1\}$的卷积核最优的点态时空估计。当$\varepsilon = 1$时的估计如下

$$\left|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(|\xi|^4+|\xi|^2\right)}\right)(x)\right| \le \begin{cases} ct^{-d/4}\left(1+t^{-1/4}|x|\right)^{-d/3}, & 0 < t \le 1 \text{或} |x| \ge t; \\ ct^{-d/2}, & t > 1 \text{且} |x| \le t. \end{cases} \quad (1)$$

对于扰动的四阶齐次薛定谔算子，即$\varepsilon = 0$时，Feng、Soffer 和 Yao 在[13]中建立了$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\Delta^2+V\right)}$在维数$d \ge 5$时的 Kato-Jensen 估计和三维时的$L^1 - L^\infty$估计，但未对算子的能量阈值进行分类讨论。在[14]中，Erdoğan、Green 和 Toprak 分别建立了四维和三维时的$L^1 - L^\infty$估计。此外 Soffer、Wu 和 Yao 以及 Li、Soffer 和 Yao 在[15] [16]中分别给出了一维和二维的结果。算子$\Delta^2 + V$的波算子L^p-有界性，Goldberg 和 Green 在[17] [18]中分别给出了四维和三维的证明。Mizutani、Wan 和 Yao 在[19] [20]中分别给出了当算子能量阈值 0 处存在共振或特征值时一维和三维的结果。Galtbayar 和 Yajima 在[21]中证明了能量阈值存在共振或特征值时四维的结果。与经典的薛定谔算子$-\Delta + V$的结果类似，当阈值点处存在共振或特征值时，Kato-Jensen 估计和$L^1 - L^\infty$估计的时间衰减指标会减小，波算子L^p-有界性的指标p的范围也会缩小。值得注意的是四阶非齐次算子$\Delta^2 + \Delta$并非椭圆型微分算子，其符号象征$|\xi|^4 - |\xi|^2$在$\xi = 0$及球面$|\xi|^2 = 1/2$上是退化的。目前尚无关于$\Delta^2 + \Delta + V(V \ne 0)$色散估计的结果。对于四阶非齐次算子$\Delta^2 - \Delta + V$，Feng 在

[22]中给出了三维时 L^1-L^∞ 估计的证明，并对能量阈值进行了分类讨论。需要特别指出的是，在已知的 L^1-L^∞ 估计和波算子 L^p -有界性的证明中都依赖于 Kato-Jensen 建立的预解式的渐进展开。因此本文旨在建立四阶非齐次算子 $\Delta^2-\Delta+V$ 在五维时的 Kato-Jensen 估计，以便后续探讨该算子高维时的色散估计。

算子 $\Delta^2-\Delta$ 的象征 $P(\xi)=|\xi|^4+|\xi|^2$ 存在唯一的非退化的临界点 $\xi=0$，其临界值为 $P(0)=0$。因此 0 是算子 $H=\Delta^2-\Delta+V$ 唯一的能量阈值。本文沿袭 Kato 和 Jensen 在[10]中的术语，称 0 是 H 的正则点即它既不是 H 的共振点也不是特征值。这里 0 是 H 的共振点指的是方程 $H\phi=0$ 在分布意义下存在非 $L^2(\boldsymbol{R}^d)$ 解。对于 $s\in\boldsymbol{R}$ 定义

$$L_s^2(\boldsymbol{R}^d)=\left\{f\in L_{loc}^2(\boldsymbol{R}^d):(1+|\cdot|)^s f\in L^2(\boldsymbol{R}^d)\right\}$$

令 $\mathcal{B}(s,s')$ 表示 $L_s^2(\boldsymbol{R}^d)$ 到 $L_{s'}^2(\boldsymbol{R}^d)$ 的有界线性算子的全体。对于非负整数 k 及 $0\le l\le k$，若算子值函数 $T(\lambda)$ 满足

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\lambda^l}T(\lambda)\right\|_{\mathcal{B}(s,-s')}=o(\lambda^a),\quad \lambda\to 0,$$

则记 $T(\lambda)=\mathcal{O}_k(\lambda^a)$。当 $k=0$ 时 $\mathcal{O}_k$ 简记为 $\mathcal{O}$。本文的主要结果如下：

定理 1.1 对于四阶非齐次薛定谔算子 $H=\Delta^2-\Delta+V(x)$，实值位势函数 $V(x)$ 满足 $|V(x)|\lesssim(1+|x|^2)^{-\beta/2}$，$\beta>5$。假设算子 H 没有正特征值，则在 $\mathcal{B}(s,-s')$，$s,s'>5/2$ 中有下述渐进展开式：

1) 如果 0 是 H 的正则点，则

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}-\sum_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_j}P_j-P_0=C_0|t|^{-5/2}+\mathcal{O}\left(|t|^{-5/2}\right),\quad t\to\infty.$$

2) 如果 0 是 H 的特征值，则

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}-\sum_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_j}P_j-P_0=C_{-2}|t|^{-1/2}+C_{-1}|t|^{-3/2}+C_0|t|^{-5/2}+\mathcal{O}\left(|t|^{-5/2}\right),\quad t\to\infty.$$

其中 P_j 为负特征值 λ_j 的特征子空间上的投影。

注 1.2 1) 因为特征态不具有色散效应，因此从实际物理意义出发我们需要证明或假设 H 没有正特征值。对于薛定谔算子 $-\Delta+V$，当位势满足 $V(x)=o\left(|x|^{-1}\right),|x|\to\infty$ 时，能确保其没有正特征值。然而对于四阶算子 $H=\Delta^2-\Delta+V$，一方面可以构造一个具有紧支集的光滑位势函数，使得 1 是 H 的特征值，见[23]。另一方面，在[24]中给出了 $\Delta^2-\Delta-c(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$ $(c>0,0<\alpha\le 2)$ 无正特征值的证明。

2) 负特征值的个数 N 有如下上界：

$$\min\left\{\int_{\boldsymbol{R}^5}|V_-(x)|^{5/2}\,\mathrm{d}x,\int_{\boldsymbol{R}^5}|V_-(x)|^{5/4}\,\mathrm{d}x\right\},$$

其中 $V_-(x)$ 是 $V(x)$ 的负部，见[25]。

由定理 1.1 及 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$ 为酉群，可得到如下的 Kato-Jensen 估计。

定理 1.3 在定理 1.1 的假设下成立如下的估计：

1) 当 0 为 H 的正则点时，

$$\left\|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_{ac}(H)\right\|_{\mathcal{B}(s,-s')}\lesssim(1+|t|)^{-5/2};$$

2) 当 0 为 H 的特征值时，

$$\left\|e^{-itH}P_{ac}(H)\right\|_{\mathcal{B}(s,-s')}\lesssim(1+|t|)^{-1/2}.$$

这里 P_{ac} 是算子 H 的绝对连续谱子空间上的投影。

本文主要分为两部分：谱测度估计及主要定理的证明。在谱测度估计部分我们通过对预解式在能量阈值 0 处进行渐进展开获得。在谱测度估计的基础上，应用稳相法对谱测度渐进展开式中每一项进行逐项估计，进而得到主要定理的证明。

2. 谱测度估计

本节我们研究 $H=\Delta^4-\Delta^2+V$ 在 $\mathcal{B}(s,-s')$ 中的谱测度估计。根据 Stone 的公式，

$$\mathrm{d}E(\lambda)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[R^+(\lambda)-R^-(\lambda)\right],\quad \lambda\in\sigma(H),$$

这里 $R^\pm(\lambda)=s-\lim\limits_{\epsilon\downarrow0}R(\lambda\pm\mathrm{i}\epsilon)$，其中 $R(z)=(H-z)^{-1}$ 是 H 的预解算子。类似地，记 $R_0^\pm(\lambda)=s-\lim\limits_{\epsilon\downarrow0}R_0(\lambda\pm\mathrm{i}\epsilon)$，其中 $R_0(z)=(H_0-z)^{-1}$。注意这里极限的存在性由极限吸收原理保证，见[26]。由 Fourier 变换可知 $\sigma(H_0)=\sigma_{ac}(H_0)=[0,+\infty)$。对于扰动算子 $H=H_0+V$ 在所考虑的衰减位势条件下，由 Weyl 定律得到 $\sigma_c(H)=\sigma_{ac}(H)=\sigma_{ac}(H_0)=[0,+\infty)$。因此由谱表示定理有

$$e^{-\mathrm{i}tH}P_{ac}(H)=\int_{\sigma_{ac}(H)}e^{-\mathrm{i}t\lambda}\mathrm{d}E(\lambda)=\int_0^{+\infty}e^{-\mathrm{i}t\lambda}\mathrm{d}E(\lambda).$$

上述积分是一个振荡积分，因此本节需要获取谱测度 $\mathrm{d}E(\lambda)$ 在低能 $(\lambda\to0)$ 和高能 $(\lambda\to+\infty)$ 的估计。

对于高能部分则在[22]中的定理 5.1 给出如下估计：

命题 2.1 对四阶薛定谔算子 $H=\Delta^2-\Delta+V$，假设位势函数对任意的 $k\in\boldsymbol{N}$ 满足 $|V(x)|\lesssim\left(1+|x|^2\right)^{-\beta/2}$，$\beta>k+1$。假设 H 没有正特征值。则在 $\mathcal{B}(s,-s')$ 中，其中 $s,s'>k+1/2$ 中有

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}\lambda^{k+1}}E(\lambda)=\mathcal{O}\left(\lambda^{-\frac{3+3k}{4}}\right),\quad \lambda\to+\infty. \tag{2}$$

对于低能部分，我们将利用对称形式的预解公式

$$R^\pm(\lambda)=R_0^\pm(\lambda)-R_0^\pm(\lambda)v\left[M^\pm(\lambda)\right]^{-1}vR_0^\pm(\lambda), \tag{3}$$

对 $\mathrm{d}E(\lambda)$ 在 $\lambda\to0$ 时作渐进展开。这里 $v=v(x)=|V(x)|^{1/2}$，$M^\pm(\lambda)=U+vR_0^\pm(\lambda)v$，$U=U(x)=\mathrm{sign}(V(x))$。

2.1. 自由预解式渐进展开

对于自由预解式 $R_0(z),z\in\boldsymbol{C}\setminus[0,+\infty)$ 有

$$R_0(z)=\frac{1}{\sqrt{1+4z}}\left[R_\Delta\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4z}\right)-R_\Delta\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4z}\right)\right],$$

对 $\lambda\in[0,+\infty)$ 由极限吸收原理(见[26])有

$$R_0^\pm(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{1+4\lambda}}\left[R_\Delta^\pm\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda}\right)-R_\Delta^\pm\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda}\right)\right],$$

其中 $R_\Delta(z)=(-\Delta-z)^{-1}$ 与 $R_\Delta^\pm(\lambda)=s-\lim\limits_{\epsilon\downarrow0}R_\Delta(\lambda\pm\mathrm{i}\epsilon)$。令 $\lambda=\eta^4+\eta^2$ (该函数是 $[0,+\infty)$ 到自身的双射)，于是

$$R_0^\pm(\lambda)=R_0^\pm\left(\eta^4+\eta^2\right)=\frac{1}{1+2\eta^2}R_\Delta^\pm\left(\eta^2\right)-\frac{1}{1+2\eta^2}R_\Delta\left(-1-\eta^2\right). \tag{4}$$

由 Laplace 算子预解式 $R_{\Delta}^{\pm}\left(\eta^2\right)$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 中的卷积核为(见[11])

$$R_{\Delta}^{\pm}\left(\eta^2;x,y\right)=\pm\frac{\mathrm{i}}{4}\left(\frac{\eta}{2\pi|x-y|}\right)^{d/2-1}H_{d/2-1}^{(1)}\left(\eta|x-y|\right),$$

其中 $H_{d/2-1}^{(1)}$ 是第一类 Hankel 函数。更多地，对于 $\eta\geq 0$ 由 Plancherel 定理有 $R_{\Delta}\left(-1-\eta^2\right)\in\mathcal{B}(0,0)$。在下文中用 $R_{\Delta}^{l}(-1;x,y)$ 表示 $R_{\Delta}^{l}(-1)=(-\Delta+1)^{-l}$ 的卷积核。

引理 2.2 当 $\eta\to 0$ 时 $R_0^{+}\left(\eta^4+\eta^2\right)$ 在 $\mathcal{B}(s,-s')$， $s,s'>5/2$ 中有

$$R_0^{+}\left(\eta^4+\eta^2\right)=G_0+(\mathrm{i}\eta)^2G_2+(\mathrm{i}\eta)^3G_3+\mathcal{O}\left(\eta^3\right),\tag{5}$$

其中自伴算子 G_j 的卷积核如下：

$$\begin{aligned}
&G_0(x,y)=(4\pi)^{-2}|x-y|^{-3}-R_{\Delta}^{1}(-1;x,y),\\
&G_2(x,y)=(4\pi)^{-2}\left(-|x-y|^{-1}+4|x-y|^{-3}\right)-\left(2R_{\Delta}^{1}(-1)+R_{\Delta}^{2}(-1)\right),\\
&G_3(x,y)=(4\pi)^{-2}\left(-\frac{2}{3}|x-y|^{0}\right).
\end{aligned}$$

注 2.3 注意到 $G_0(x,0)$ 是自由算子 $H_0=\Delta^2-\Delta$ 的基本解。因此 $R_0(0)=\dfrac{1}{\Delta^2-\Delta}=G_0$。事实上，利用球坐标系下的 Laplace 算子 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{d-1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\Delta_S$，可以验证 $\left(\Delta^2-\Delta\right)G_0(x,0)=\delta(0)$。

证明：由等式(4)，我们需分别将 $\dfrac{1}{1+\eta^2}R_{\Delta}^{+}\left(\eta^2\right)$ 和 $\dfrac{1}{1+\eta^2}R_{\Delta}\left(-1-\eta^2\right)$ 在 $\eta=0$ 处作渐近展开。

记 $F(\eta)=\dfrac{1}{1+\eta^2}R_{\Delta}\left(-1-\eta^2\right)$，因为 $[1,+\infty)\subset\rho(-\Delta)$，所以 $F(\eta)$ 在 $\eta\geq 0$ 上是一个光滑的 L^2-有界算子值函数。因此可将 $F(\eta)$ 在 $\mathcal{B}(0,0)$ 中展开 Maclaurin 级数：

$$\frac{1}{1+2\eta^2}R_{\Delta}\left(-1-\eta^2\right)=F(\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\eta^{2j}\left[\sum_{k=1}^{j+1}(-1)^j2^{j+1-k}R_{\Delta}^{k}(-1)\right].$$

对于 $\dfrac{1}{1+\eta^2}R_{\Delta}^{+}\left(\eta^2\right)$，由[11]中给出的 $R_{\Delta}^{+}\left(\eta^2;x,y\right)$ 的 Taylor 展式有如下展开式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\eta^2}R_{\Delta}^{+}\left(\eta^2;x,y\right)=&(4\pi)^{-2}\sum_{j=0}^{+\infty}(\mathrm{i}\eta)^{2j}\left[\sum_{l=0}^{j}2^l\vartheta(2j-2l)|x-y|^{2j-2l-3}\right]\\
&+(4\pi)^{-2}\sum_{j=0}^{+\infty}(\mathrm{i}\eta)^{2j+1}\left[\sum_{l=0}^{j}2^l\vartheta(2j+1-2l)|x-y|^{2j-2l-2}\right]
\end{aligned}$$

其中 $\vartheta(l)=\sum_{k=0}^{1}\dfrac{(2-k)!}{k!(1-k)!}\dfrac{(-2)^k}{(l-k)!}$，$\left((-n)!=-\infty,n\in N^{+}\right)$。更多地，由[11]中的引理 3.4 可知算子 $G_j\in\mathcal{B}(s,-s')$，$s,s'>5/2$。 □

2.2. 扰动预解式渐进展开

对于扰动预解式，由对称形式的预解公式(3)我们仅需对 $\left[M^{\pm}(\lambda)\right]^{-1}$ 在 $\lambda=0$ 处做渐进展开。此后，我们简记 $M^{\pm}(\eta):=M^{\pm}\left(\eta^4+\eta^2\right)$。由于 $M^{-}(\eta)=\overline{M^{+}}(\eta)$，因此我们仅考虑+情况。我们应用下述求逆公式进行迭代来获得渐近展开式。

引理 2.4 ([27]，引理 3.1) 设 A 是一个闭算子，S 是定义在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的投影。假设 $A+S$ 存在

有界逆，则 A 存在有界逆当且仅当 $B \equiv S - S\left(A+S\right)^{-1} S$ 在 $S\mathcal{H}$ 中存在有界逆。此时，

$$A^{-1} = \left(A+S\right)^{-1} + \left(A+S\right)^{-1} SB^{-1}S\left(A+S\right)^{-1}.$$

定义 2.5 令 $T_0 = U + vG_0v$。如果 T_0 在 $L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$ 上可逆，则称 0 是算子 H 的正则点。若 T_0 在 $L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$ 中不可逆，令 S_0 是到 $\ker\left(T_0\right)$ 上的投影算子，则 $T_0 + S_0$ 在 $L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$ 中可逆。此时记 $D_0 = \left(T_0 + S_0\right)^{-1}$。

事实上，当 T_0 在 $L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$ 中不可逆，此时我们可以鉴定 0 为 H 的特征函数。

引理 2.6 $S_0L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right) = \left\{ f \in L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right) \mid Hf = 0 \right\}$。

证明：对于任意的 $f \in S_0L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$，有 $f = -UvG_0vf$。这是 $f = -G_0Vf$ 的对称形式。由于 $H_0G_0 = I = G_0H_0$，所以 $Hf = 0$。另一方面，假设 $f \in L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$ 满足 $Hf = 0$，则 $H_0 f = -Vf$，于是 $f = -UvG_0vf$。因此 $f \in S_0L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$。 □

注意到 $S_0D_0 = D_0S_0 = S_0$。因此 $R^+\left(\eta^4 + \eta^2\right)$ 有如下展开。

定理 2.7 设 $\left|V(x)\right| \lesssim \left(1+|x|^2\right)^{-\beta/2}$，$\beta > 5$。当 $\eta \to 0$ 时在 $\mathcal{B}\left(s,-s'\right), s,s' > 5/2$ 中有：

1) 当 0 是 H 的正则点时，

$$R^+\left(\eta^4+\eta^2\right) = A_0 + \left(\mathrm{i}\eta\right)^2 A_2 + \left(\mathrm{i}\eta\right)^3 A_3 + \mathcal{O}_3\left(\eta^3\right)$$

其中 $A_j \in \mathcal{B}\left(s,-s'\right)$ 均为自伴算子。更多地，

$$\begin{aligned}
A_0 &= G_0 - G_0vT_0^{-1}vG_0, \\
A_2 &= G_2 + G_0vT_0^{-1}vG_2vT_0^{-1}vG_0 - G_2vT_0^{-1}vG_0 - G_0vT_0^{-1}vG_2, \\
A_3 &= G_3 + G_0vT_0^{-1}vG_3vT_0^{-1}vG_0 - G_3vT_0^{-1}vG_0 - G_0vT_0^{-1}vG_3.
\end{aligned}$$

2) 当 0 是 H 的特征值时，

$$R^+\left(\eta^4+\eta^2\right) = \left(\mathrm{i}\eta\right)^{-2}\tilde{A}_{-2} + \left(\mathrm{i}\eta\right)^{-1}\tilde{A}_{-1} + \tilde{A}_0 + \mathcal{O}(1),$$

其中 $\tilde{A}_j \in \mathcal{B}\left(s,-s'\right)$ 是自伴算子。更多地，

$$\tilde{A}_{-2} = -G_0vS_0T_1^{-1}S_0vG_0, \quad \tilde{A}_{-1} = G_0vS_0T_1^{-1}S_0vG_3vS_0T_1^{-1}S_0vG_0$$

以及

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_0 = G_0 &- G_2vS_0T_1^{-1}S_0vG_0 - G_0vS_0T_1^{-1}S_0vG_2 - G_0v\Big[D_0 + S_0T_1^{-1}S_0v\big(G_2vD_0vG_2 \\
&- G_4\big)vS_0T_1^{-1}S_0 - D_0vG_2vS_0T_1^{-1}S_0 - S_0T_1^{-1}S_0vG_2vD_0\Big]vG_0.
\end{aligned}$$

证明： 1) 当 0 是正则点时，根据引理 2.2

$$\begin{aligned}
\left[M^+(\eta)\right]^{-1} &= \left[I + \left(\mathrm{i}\eta\right)^2 T_0^{-1}vG_2v + \left(\mathrm{i}\eta\right)^3 T_0^{-1}vG_3v + o\left(\eta^3\right)\right]^{-1} T_0^{-1} \\
&= T_0^{-1} - \left(\mathrm{i}\eta\right)^2 T_0^{-1}vG_2vT_0^{-1} - \left(\mathrm{i}\eta\right)^3 T_0^{-1}vG_3vT_0^{-1} + \mathcal{O}_3\left(\eta^3\right)
\end{aligned}$$

2) 当 0 是特征值时，根据引理 2.4 有，

$$\left[M^+(\eta)\right]^{-1} = \left(M^+(\eta)+S_0\right)^{-1} + \left(M^+(\eta)+S_0\right)^{-1} S_0\left[M_1^+(\eta)\right]^{-1} S_0\left(M^+(\eta)+S_0\right)^{-1}$$

其中

$$M_1^+(\eta) = S_0 - S_0\left(M^+(\eta)+S_0\right)^{-1} S_0.$$

由于 $T_0 + S_0$ 在 $L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$ 上是可逆的，因此

$$
\begin{aligned}
\left(M^{+}(\eta)+S_0\right)^{-1} &= \left[T_0+S_0+(\mathrm{i}\eta)^2 vG_2v+(\mathrm{i}\eta)^3 vG_3v+o\left(\eta^3\right)\right]^{-1} \\
&= D_0-(\mathrm{i}\eta)^2 D_0vG_2vD_0-(\mathrm{i}\eta)^3 D_0vG_3vD_0+\mathcal{O}_3\left(\eta^3\right).
\end{aligned}
$$

因此

$$
M_1^{+}(\eta)=-\eta^2\left[S_0vG_2vS_0+(\mathrm{i}\eta)S_0vG_3vS_0+\mathcal{O}_1(\eta)\right]:=-\eta^2\mathcal{M}_1^{+}(\eta).
$$

我们声明 $T_1=S_0vG_2vS_0$ 是可逆的。于是

$$
\left[\mathcal{M}_1^{+}(\eta)\right]^{-1}=T_1^{-1}-(\mathrm{i}\eta)T_1^{-1}S_0vG_3vS_0T_1^{-1}+\mathcal{O}_1(\eta).
$$

下证 T_1 在 $L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$ 中是可逆的。对任意 $\phi\in\ker\left(S_0vG_2vS_0\right)\subset S_0L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$，于是

$$
\begin{aligned}
0=\langle S_0vG_2vS_0\phi,\phi\rangle=\langle G_2v\phi,v\phi\rangle &= \lim_{\eta\downarrow 0}\left\langle \frac{R_0\left(\eta^4+\eta^2\right)-G_0}{\eta^2}v\phi,v\phi\right\rangle \\
&= \lim_{\eta\downarrow 0}\frac{1}{\eta^2}\left\langle\left(\frac{1}{|\xi|^4+|\xi|^2-\left(\eta^4+\eta^2\right)}-\frac{1}{|\xi|^4+|\xi|^2}\right)\widehat{v\phi}(\xi),\widehat{v\phi}(\xi)\right\rangle \\
&= \lim_{\eta\downarrow 0}\left\langle\frac{1+\eta^2}{\left(|\xi|^4+|\xi|^2-\eta^4-\eta^2\right)\left(|\xi|^4+|\xi|^2\right)}\widehat{v\phi}(\xi),\widehat{v\phi}(\xi)\right\rangle \\
&= \left\langle\frac{1}{|\xi|^4+|\xi|^2}\widehat{v\phi}(\xi),\frac{1}{|\xi|^4+|\xi|^2}\widehat{v\phi}(\xi)\right\rangle=\left\|G_0(v\phi)\right\|^2_{L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)}.
\end{aligned}
$$

通过控制收敛定理，当 $\eta\downarrow 0$ 由 $\phi\in\ker\left(S_0vG_2vS_0\right)\subset S_0L^2\left(\boldsymbol{R}^5\right)$ 有 $0=T_0(\phi)=\left(U+vG_0v\right)\phi$，从而 $\phi=Uv\left(-G_0v\phi\right)=0$。因此 $\ker\left(S_0vG_2vS_0\right)=\{0\}$。

最后根据对称预解公式(3)和引理 2.2 即可获得 $R\left(\eta^4+\eta^2\right)$ 在 $0<\eta\ll 1$ 的渐进展开式。 □

因为 $R^{-}\left(\eta^4+\eta^2\right)=\overline{R^{+}}\left(\eta^4+\eta^2\right)$，则由 Stone 公式和定理 2.7 可得 $\mathrm{d}E(\lambda)$ 如下的低能估计。

定理 2.8 设 $|V(x)|\lesssim\left(1+|x|^2\right)^{-\beta/2}$，$\beta>5$。在 $\mathcal{B}(s,-s')$，$s,s'>5/2$ 中有：

1) 如果 0 是 H 的正则点时，

$$
\pi\mathrm{d}E\left(\eta^4+\eta^2\right)=-A_3\cdot\eta^3+\mathcal{O}_3\left(\eta^3\right),\eta\downarrow 0. \tag{6}
$$

2) 如果 0 是 H 的特征值时，

$$
\pi\mathrm{d}E\left(\eta^4+\eta^2\right)=-\tilde{A}_{-1}\cdot\eta^{-1}+\mathcal{O}\left(\eta^{-1}\right),\eta\downarrow 0. \tag{7}
$$

3. 定理 1.1 的证明

设 $\chi_l(\eta)$ 为一个单调光滑的截断函数

$$
\chi_l(\eta)=\begin{cases}1, & 0\le\eta\le\dfrac{1}{2};\\ 0, & \eta\ge 1.\end{cases}
$$

令 $\chi_h(\eta)=1-\chi_l(\eta)$。由谱表示定理有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}P_{ac}(H) &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_l(\eta)\mathrm{d}E\left(\eta^4+\eta^2\right)+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_h(\eta)\mathrm{d}E\left(\eta^4+\eta^2\right) \\
&:= I+II
\end{aligned}
$$

对于高能部分 II 有

$$II=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_h(\eta)\mathrm{d}E\left(\eta^4+\eta^2\right)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda}\tilde{\chi}_h(\lambda)\mathrm{d}E(\lambda)$$
$$=\frac{1}{-\mathrm{i}t}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda}\tilde{\chi}_h(\lambda)E'(\lambda)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda}\left[\tilde{\chi}_h(\lambda)E'(\lambda)\right]'\mathrm{d}\lambda\right]$$

其中，$\tilde{\chi}_h(\lambda)=\chi_h\left(\left(\sqrt{1+4\lambda}-1\right)^{1/2}\Big/\sqrt{2}\right)$。由命题 2.1 可知边值项的值为 0。对于积分项，因为

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k}\left[\tilde{\chi}_h(\lambda)E'(\lambda)\right]\in L^1\left(0,\infty;\mathcal{B}(s,-s')\right),\quad \forall 0\le k\in\boldsymbol{N},$$

所以由分部积分可得

$$II=o\left(t^{-k}\right),\quad t\to+\infty.$$

在 $\mathcal{B}(s,-s)$ 的范数意义下成立。

对于低能部分 I，我们将能量阈值点 0 分为正则点和特征值两种情形进行讨论。

1) 如果 0 是 H 的正则点时由(6)式得

$$\pi E'\left(\eta^4+\eta^2\right)=-\eta^3A_3+F_A(\eta),$$

其中 $F_A(\eta)$ 在 $\mathcal{B}(s,-s')$ 中对整数 $0\le k\le 3$ 满足

$$F_A^{(k)}(\eta)=o\left(\eta^{3-k}\right),\eta\downarrow 0.$$

从而有

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_l(\eta)\left(4\eta^3+2\eta\right)\left(-\eta^3A_3+F_A(\eta)\right)\mathrm{d}\eta$$
$$=\frac{-A_3}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_l(\eta)\left(4\eta^3+2\eta\right)\eta^3\mathrm{d}\eta+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_l(\eta)\left(4\eta^3+2\eta\right)F_A(\eta)\mathrm{d}\eta,$$

注意到 $\eta^3A_3=\mathcal{O}_3\left(\eta^3\right)$ 与 $F_A(\eta)$ 满足相同的性质，所以第二项的估计与第一项类似。对于第一项通过分部积分有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_l(\eta)\left(4\eta^3+2\eta\right)\eta^3\mathrm{d}\eta$$
$$=\frac{1}{\mathrm{i}t}\left[3\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_l(\eta)\eta^2\mathrm{d}\eta+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_l'(\eta)\eta^3\mathrm{d}\eta\right]$$
$$=\frac{3}{(\mathrm{i}t)^2}\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\frac{\chi_l(\eta)}{4\eta^2+2}\mathrm{d}\eta-8\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\frac{\chi_l(\eta)\eta^2}{\left(4\eta^2+2\right)^2}\mathrm{d}\eta\right.$$
$$\left.+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\frac{\chi_l'(\eta)\eta}{4\eta^2+2}\mathrm{d}\eta\right]+\frac{1}{\mathrm{i}t}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)}\chi_l'(\eta)\eta^3\mathrm{d}\eta.$$

注意到对任意整数 $k\ge 0$ 有

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\eta^k}\left[\frac{\chi'(\eta)\eta^{3-2j}}{\left(4\eta^2+2\right)^j}\right]\in L^1(\boldsymbol{R}),\quad j=0,1.$$

因此

$$\left|\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)} \frac{\chi_l'(\eta)\eta^{3-2j}}{\left(4\eta^2+2\right)^j} \mathrm{d}\eta\right| = \mathcal{O}\left(t^{-k}\right), \quad t \to +\infty.$$

更多地，对于如下两项

$$\frac{1}{(\mathrm{i}t)^{j+1}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)} \frac{\chi(\eta)}{4\eta^2+2} \mathrm{d}\eta, \quad \frac{1}{(\mathrm{i}t)^{j+1}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)} \frac{\chi(\eta)\eta^2}{\left(4\eta^2+2\right)^2} \mathrm{d}\eta.$$

由于 $\left(4\eta^2+2\right)^{-1} \le 1/2$ 所以主导项是 η 的零幂次项。对于含有 η^2 的第二项仍然可以进行一次分部积分，意味着可以获得更快的时间衰减。对于主导项的第一项，由[28]中的引理 3 可知

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)} \frac{\chi_l(\eta)}{4\eta^2+2} \mathrm{d}\eta = 2^{-1}(\mathrm{i}t)^{-1/2} + o\left(t^{-1/2}\right).$$

于是

$$I = \frac{3}{2\sqrt{\mathrm{i}\pi}} A_3 \cdot t^{-5/2} + \mathcal{O}\left(t^{-5/2}\right).$$

2) 如果 0 是 H 的特征值时根据定理 2.8 有

$$I = \frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)} \chi_l(\eta)\left(4\eta^3+2\eta\right)\eta^{-1} \mathrm{d}\eta \tilde{A}_{-1} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(\eta^4+\eta^2\right)} \chi_l(\eta)\left(4\eta^3+2\eta\right)\mathcal{O}(1) \mathrm{d}\eta$$

再应用[28]中的引理 3 得到

$$I = -2(\pi\mathrm{i})^{-1/2} \tilde{A}_{-1} \cdot t^{-1/2} + o\left(t^{-1/2}\right).$$

□

4. 本文总结

本文的创新点主要体现在两个方面。首先，在处理算子 $H = \Delta^2 - \Delta + V(x)$ 在空间维数 $d = 5$ 时的非齐次性问题时，针对零点的类型分类，本文提出的划分方式兼具已有研究的正则点、共振点、特征值等经典分类方法给出了更精确的零点类型判定和相应情形下的预解式 $R(z), z \in \boldsymbol{C} \setminus [0, +\infty)$ 低能渐近展开。其次，在迭代过程中，本文针对非齐次算子 H 在临界点处的奇性问题提出了新的解决思路。通过研究非齐次薛定谔算子在该点的可逆性和迭代停止条件，本文有效避免了传统方法在处理奇性时可能遇到的困难。

基金项目

本文作者受到重庆市教育委员会科学技术研究项目(项目号 KJQN202100511)的支持。

参考文献

[1] Karpman, V.I. (1994) Solitons of the Fourth Order Nonlinear Schrödinger Equation. *Physics Letters A*, **193**, 355-358. https://doi.org/10.1016/0375-9601(94)90964-4

[2] Karpman, V.I. (1996) Stabilization of Soliton Instabilities by Higher Order Dispersion: KDV-Type Equations. *Physics Letters A*, **210**, 77-84. https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00752-0

[3] Karpman, V.I. and Shagalov, A.G. (2000) Stability of Solitons Described by Nonlinear Schrödinger-Type Equations

with Higher-Order Dispersion. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **144**, 194-210. https://doi.org/10.1016/s0167-2789(00)00078-6

[4] Ben-artzi, M., Koch, H. and Saut, J. (2000) Dispersion Estimates for Fourth Order Schrödinger Equations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences—Series I—Mathematics*, **330**, 87-92. https://doi.org/10.1016/s0764-4442(00)00120-8

[5] Ilan, B., Fibich, G. and Papanicolaou, G. (2002) Self-focusing with Fourth-Order Dispersion. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **62**, 1437-1462. https://doi.org/10.1137/s0036139901387241

[6] Miao, C., Xu, G. and Zhao, L. (2009) Global Well-Posedness and Scattering for the Focusing Energy-Critical Nonlinear Schrödinger Equations of Fourth Order in the Radial Case. *Journal of Differential Equations*, **246**, 3715-3749. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.11.011

[7] Yu., X.Y., Yue, H.T. and Zhao, Z.H. (2023) On the Decay Property of the Cubic Fourth-Order Schrödinger Equation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **151**, 2619-2630.

[8] Borluk, H., Muslu, G.M. and Natali, F. (2024) On the Orbital Stability of Solitary Waves for the Fourth Order Nonlinear Schrödinger Equation. arxiv: 2405.09268.

[9] Cheng, J.W. (2024) The Fourth-Order Schrödinger Equation on Lattices. arxiv: 2403.07445.

[10] Jensen, A. and Kato, T. (1979) Spectral Properties of Schrödinger Operators and Time-Decay of the Wave Functions. *Duke Mathematical Journal*, **46**, 583-611. https://doi.org/10.1215/s0012-7094-79-04631-3

[11] Jensen, A. (1980) Spectral Properties of Schrödinger Operators and Time-Decay of the Wave Functions Results in L^2 (R^m), $m \geq 5$. *Duke Mathematical Journal*, **47**, 57-80. https://doi.org/10.1215/s0012-7094-80-04706-7

[12] Jensen, A. (1984) Spectral Properties of Schrödinger Operators and Time-Decay of the Wave Functions. Results in L^2 (R^4). *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **101**, 397-422. https://doi.org/10.1016/0022-247x(84)90110-0

[13] Feng, H., Soffer, A. and Yao, X. (2018) Decay Estimates and Strichartz Estimates of Fourth-Order Schrödinger Operator. *Journal of Functional Analysis*, **274**, 605-658. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.10.014

[14] Erdoğan, M.B., Green, W.R. and Toprak, E. (2021) On the Fourth Order Schrödinger Equation in Three Dimensions: Dispersive Estimates and Zero Energy Resonances. *Journal of Differential Equations*, **271**, 152-185. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.08.019

[15] Soffer, A., Wu, Z. and Yao, X. (2022) Decay Estimates for Bi-Schrödinger Operators in Dimension One. *Annales Henri Poincaré*, **23**, 2683-2744. https://doi.org/10.1007/s00023-021-01147-9

[16] Li, P., Soffer, A. and Yao, X. (2023) Decay Estimates for Fourth-Order Schrödinger Operators in Dimension Two. *Journal of Functional Analysis*, **284**, Article ID: 109816. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2022.109816

[17] Goldberg, M. and Green, W.R. (2016) On the L^p Boundedness of Wave Operators for Four-Dimensional Schrödinger Operators with a Threshold Eigenvalue. *Annales Henri Poincaré*, **18**, 1269-1288. https://doi.org/10.1007/s00023-016-0534-1

[18] Goldberg, M. and Green, W. (2021) On the L^p Boundedness of the Wave Operators for Fourth Order Schrödinger Operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, **374**, 4075-4092. https://doi.org/10.1090/tran/8377

[19] Mizutani, H., Wan, Z. and Yao, X. (2024) L^p -Boundedness of Wave Operators for Bi-Schrödinger Operators on the Line. *Advances in Mathematics*, **451**, Article ID: 109806. https://doi.org/10.1016/j.aim.2024.109806

[20] Mizutani, H., Wan, Z.J. and Yao, X.H. (2023) L^p -Boundedness of Wave Operators for Fourth Order Schrödinger Operators with Zero Resonances on R^3 . arxiv: 2311.06763.

[21] Galtbayar, A. and Yajima, K. (2024) The L^p -Boundedness of Wave Operators for Fourth Order Schrödinger Operators on R^4 . *Journal of Spectral Theory*, **14**, 271-354. https://doi.org/10.4171/jst/495

[22] Feng, H. (2021) Dispersive Estimates for Inhomogeneous Fourth-Order Schrödinger Operator in 3D with Zero Energy Obstructions. *Nonlinear Analysis*, **207**, Article ID: 112269. https://doi.org/10.1016/j.na.2021.112269

[23] Feng, H., Soffer, A., Wu, Z. and Yao, X. (2020) Decay Estimates for Higher-Order Elliptic Operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, **373**, 2805-2859. https://doi.org/10.1090/tran/8010

[24] Ishida, A., Lőrinczi, J. and Sasaki, I. (2022) Absence of Embedded Eigenvalues for Non-Local Schrödinger Operators. *Journal of Evolution Equations*, **22**, Article No. 82. https://doi.org/10.1007/s00028-022-00836-0

[25] Frank, R.L., Laptev, A. and Weidl, T. (2022) Schrödinger Operators: Eigenvalues and Lieb-Thirring Inequalities. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781009218436

[26] Rodnianski, I. and Tao, T. (2014) Effective Limiting Absorption Principles, and Applications. *Communications in Mathematical Physics*, **333**, 1-95. https://doi.org/10.1007/s00220-014-2177-8

[27] Jensen, A. and Nenciu, G. (2001) A Unified Approach to Resolvent Expansions at Thresholds. *Reviews in Mathematical Physics*, **13**, 717-754. https://doi.org/10.1142/s0129055x01000843

[28] Stein, E.M. (1993) Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press.