

# 双星 $S_{2,6}$ 的平面Turán型问题的一个上界

胡 越, 张 旭

北方工业大学理学院, 北京

收稿日期: 2024年3月19日; 录用日期: 2024年4月18日; 发布日期: 2024年4月25日

## 摘要

极值图论是图论中的重要内容, 主要研究具有某些性质的图的极值问题。平面图的Turán数 $ex_p(n, H)$ 是指具有 $n$ 个顶点的平面图 $G$ 的最大边数, 其中图 $G$ 不包含 $H$ 作为一个子图。这个问题是由Dowden在2016年提出的。最近Ghosh等人研究了若干双星图的平面Turán数, 并得到很多结果。在这里, 我们将给出不含双星 $S_{2,6}$ 且任意相邻两点度数之和不等于12的平面图边数的上界, 即设图 $G$ 是 $n \geq 2$ 个顶点的平面图, 图中不包含 $S_{2,6}$ 作为子图且任意相邻两点度数之和不等于12, 那么有 $e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。

## 关键词

平面Turán数, 双星, 极值平面图

# An Upper Bound for the Planar Turán Type Problem of Double Star $S_{2,6}$

Yue Hu, Xu Zhang

College of Science, North China University of Technology, Beijing

Received: Mar. 19<sup>th</sup>, 2024; accepted: Apr. 18<sup>th</sup>, 2024; published: Apr. 25<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Extremal graph theory is an important part of graph theory, which aims to study the extremal structure of graphs with certain properties. The planar Turán number, denoted by  $ex_p(n, H)$ , is the maximum number of edges in graph  $G$  on  $n$  vertices, where  $G$  does not contain  $H$  as a subgraph. This problem was initiated by Dowden in 2016. Recently, Ghosh *et al.* discussed the planar Turán numbers of several double stars and obtained many results. In this paper, we will give the upper bound for the number of edges in the planar graph in which there does not exist a double star  $S_{2,6}$ .

and degree sum of adjacent vertices is not equal to 12. That is, if the graph  $G$  is a plane diagram of vertices, and the graph does not contain  $S_{2,6}$  as a subgraph, and the sum of the degrees of any adjacent two points is not equal to 12, then  $e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3$ .

## Keywords

Planar Turán Numbers, Double Stars, Extremal Planar Graphs

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 前言

图论是组合数学的一个分支，是离散数学的重要组成部分。极值图论是图论的一个分支，是由 Mantel [1] 在 1907 年提出来的，平面 Turán 问题是 Turán 问题中的一种，研究的对象从一般图缩减到平面图，所谓平面图是指可以画在平面上并且不同的边可以互不相交的图。例如，在图、圈、Theta 图、路、匹配等上进行一系列的 Turán 数的研究，图里面包括一些单图，例如星图。近几年来平面图的 Turán 数研究也越来越多，与平面 Turán 数问题相关的更多文献可以参看[2]-[8]。

对于星的平面 Turán 数的研究，Lan [9] 几乎已经完全解决了当  $n \geq t+1$  时， $ex_p(n, K_{1,t})$  的数值问题，随后又在文献[10]中相继求出了  $t \geq 3$ ,  $n \geq t+2$ ,  $ex_p(n, K_{2,t})$  的确切值。星的平面 Turán 数可以帮助我们更好地理解和研究平面图的性质和特征。星的平面 Turán 数的研究对于理解和应用平面图具有重要的意义。关于星图的更多信息可以参考文献[11]。

Ghosh [11] 进一步地研究了双星的平面 Turán 数。一个  $(k, l)$  双星，记作  $S_{k,l}$ ，是指由一条边  $uv$  通过额外连接  $k$  个和  $l$  个顶点所形成的图。Ghosh 等人给出了当  $n \geq 16$  时， $ex_p(n, S_{2,2}) = 2n - 4$ ；当  $n \geq 1$  时， $ex_p(n, S_{2,3}) = 2n$ 。并且计算出了  $ex_p(n, S_{2,4})$ ,  $ex_p(n, S_{2,5})$ ,  $ex_p(n, S_{3,3})$ ,  $ex_p(n, S_{3,4})$  的上下界。在本文中我们给出了不含双星图  $S_{2,6}$  且 6 度点互不相邻的平面图边数的上界，对  $n$  进行归纳完成了证明，得到了结果  $ex_p(n, S_{2,6}) \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。

为了方便叙述本文的主要结论，下面我们介绍所需要用到的定义和符号。给定一个无向图  $G = (V, E)$ ，其中  $V$  是图  $G$  的顶点集， $E$  是图  $G$  的边集，分别用  $d_G(v)$ 、 $\Delta(G) = \max\{d_G(x) : x \in V(G)\}$ 、 $\delta(G) = \min\{d_G(x) : x \in V(G)\}$  表示顶点  $v$  的度数、图  $G$  的最大度和最小度。设  $n_k$  是度为  $k$  的顶点数。此外，我们用  $N_G[v]$  来表示  $G$  中与  $v$  相邻的顶点的集合。让  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ ，对于任意子集  $S \subset V(G)$ ，在  $S$  上导出的子图记为  $G[S]$ 。我们用  $G \setminus S$  来表示  $V(G) \setminus S$  上的诱导子图，如果  $S = \{v\}$ ，我们简单地写  $G \setminus v$ 。我们用  $e[S, T]$  来表示  $S$  和  $T$  之间的边数，其中  $S, T$  是  $V(G)$  的子集。 $k-l$  边是这样一条边，其端点的顶点度分别为  $m$  和  $n$ ，并且  $k-l-s$  路是一条由顶点度分别为  $k, l, s$  的三个顶点组成的路。

## 2. 主要结论

下面我们给出主要结论，并通过对  $n$  的归纳完成证明。

**定理 2.1** 设图  $G$  是  $n \geq 2$  个顶点的平面图，图中不包含  $S_{2,6}$  作为子图且任意相邻两点度数之和不等于 12，则

$$e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3.$$

**证明:**

首先我们讨论顶点数较少的情形。

**断言 1.** 对于  $2 \leq n \leq 24$ ,  $e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。

易知当  $n=2$  时结论成立。我们有  $n \geq 3$  个顶点极大平面图其最大边数为  $3n-6$ 。而当  $n \leq 24$  时,  
 $3n-6 \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。□

为了后续讨论方便, 由断言 1 我们不妨假设  $n \geq 24$ 。

**断言 2.** 如果图  $G$  中存在顶点  $u$  满足  $d(u) \leq 2$ , 则  $e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。

不妨删除这一顶点  $u$ , 则根据归纳假设可知, 剩余图的边数  $e(G \setminus u) \leq \frac{23}{8}(n-1) - 3$ 。那么  
 $e(G) = e(G \setminus u) + d(u) \leq \frac{23}{8}(n-1) - 3 + 2 \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。□

**断言 3.** 如果图  $G$  中存在边割集  $E[S_1, S_2]$  满足  $e[S_1, S_2] \leq 3$ ,  $|S_1|, |S_2| \geq 2$ , 则  $e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。

假设图  $G$  中存在边割集  $E[S_1, S_2]$ , 其中  $V(G) = S_1 \cup S_2$ 。根据条件可知,  $e[S_1, S_2] \leq 3$ 。易知子图  $G[S_1], G[S_2]$  中也不存在  $S_{2,6}$ , 由断言 1 和归纳假设可知  $e(G[S_1]) \leq \frac{23}{8}|S_1| - 3$ ,  $e(G[S_2]) \leq \frac{23}{8}|S_2| - 3$ 。那么

$$\begin{aligned} e(G) &= e(G[S_1]) + e(G[S_2]) + e[S_1, S_2] \\ &\leq \frac{23}{8}|S_1| - 3 + \frac{23}{8}|S_2| - 3 + 3 \\ &= \frac{23}{8}n - 3. \end{aligned}$$

□

同理可证当图  $G$  的边连通度  $\lambda(G) \leq 2$  时,  $e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。下面不妨设图  $G$  的边连通度  $\lambda(G) \geq 3$ 。

我们进一步讨论图  $G$  的最大度的取值情况。

**断言 4.** 图  $G$  的最大度满足  $\Delta(G) \leq 7$ 。

如果  $G$  中包含一个顶点  $v \in V(G)$ , 满足  $d(v) \geq 9$ 。注意到对每个  $u \in N(v)$ , 我们有  $d(u) \geq 3$ 。易知图  $G$  中存在一个  $S_{2,6}$  作为子图。

进一步地, 我们分析当图中存在度数为 8 的顶点时, 图  $G$  的边数满足不等式。设图中存在点  $v \in V(G)$ , 使得  $d(v)=8$ , 令  $S = N(v) \cup \{v\}$ 。很容易知道对于每个  $u \in N(v)$ , 如果  $u$  和  $V(G) \setminus S$  中任一顶点相邻, 那么  $d(u)=2$ 。否则, 我们会在  $G$  中找到一个  $S_{2,6}$ 。而这与条件  $\delta(G) \geq 3$  矛盾, 因此  $v$  的所有邻居顶点均不与  $V(G) \setminus S$  中的点邻接, 这意味着  $G[S]$  是一个独立的连通分支。又根据边连通度  $\lambda(G) \geq 3$ , 可知  $V(G) = S$ 。也就是说图  $G$  的顶点个数恰好为 9, 与假设  $n \geq 24$  矛盾。□

通过上述讨论, 我们得到图  $G$  中顶点度的取值范围, 即  $\delta(G) \geq 3$  和  $\Delta(G) \leq 7$ 。

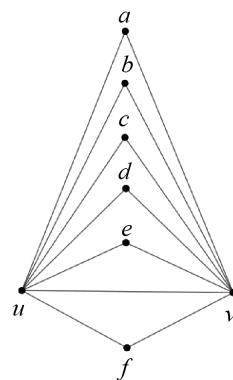
根据双星图  $S_{2,6}$  的特点, 度数为 7 的顶点存在生成双星图的可能, 下面我们分别详细讨论 7-7 边、7-6 边这两种图中的子结构。

**断言 5.** 如果  $G$  包含 7-7 边这种子图结构, 那么有  $e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。

假设  $uv$  是一条 7-7 边，由于  $G$  不包含  $S_{2,6}$ ，所以  $uv$  上至少有 5 个三角形，我们根据  $uv$  边上的三角形数目来区分为两种情形。

### 情形 1. 边 $uv$ 上有 6 个三角形的公共边

设  $a, b, c, d, e$  和  $f$  是与  $u$  和  $v$  相邻的顶点，如图 1 所示。设  $S = \{u, v, a, b, c, d, e, f\}$ ， $S_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$  和  $H = G[S]$ 。我们下面计算与这一子图结构关联的边的数目，首先  $S_1$  中的所有顶点都可以形成一条长度至多为 5 的路径；其次  $S_1$  中的每个顶点最多在  $V(G) \setminus S$  中有一个邻居，否则图中可以找到  $S_{2,6}$ 。但是我们注意到，若  $S_1$  中顶点都存在向  $V(G) \setminus S$  中点连接的边，则图中存在大小至多为 2 的边割集，与  $\lambda(G) \geq 3$  矛盾，因此  $S_1$  与  $V(G) \setminus S$  之间不存在边。



**Figure 1.** Subgraph structure with 7-7 sides and 6 triangles

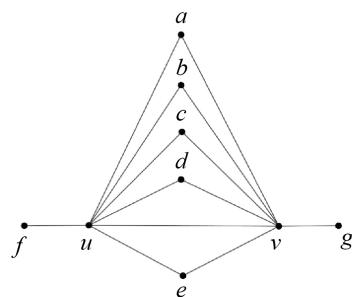
**图 1.** 有 7-7 边并且有 6 个三角形的子图结构

若我们删除  $H$  中的顶点，同时删去的边数最多为  $13 + 5 = 18$  条，根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned} e(G) &\leq e(G \setminus H) + 18 \\ &\leq \frac{23}{8}(n-8) - 3 + 18 \\ &\leq \frac{23}{8}n - 3. \end{aligned}$$

### 情形 2. 边 $uv$ 上有 5 个三角形的公共边

设  $a, b, c, d$  和  $e$  均与  $u$  和  $v$  相邻， $f$  与  $u$  相邻但不与  $v$  相邻， $g$  与  $v$  相邻而不与  $u$  相邻，令  $S_1 = \{a, b, c, d, e\}$ 、 $S = \{u, v, f, g\} \cup S_1$  和  $H = G[S]$ ，子图结构如图 2 所示。



**Figure 2.** Subgraph structure with 7-7 sides and 6 triangles

**图 2.** 有 7-7 边并且有 6 个三角形的子图结构

同样的, 我们计算与这一子图结构关联的边的数目, 首先  $S_1$  中的所有顶点都可以形成一条长度至多为 4 的路; 其次  $S_1$  中的每个顶点至多在  $V(G) \setminus S$  中有一个邻居, 否则图中可以找到  $S_{2,6}$ ; 再次顶点  $f, g$  最多在  $V(G) \setminus S$  中有一个邻点, 否则也存在  $S_{2,6}$ ; 最后  $f, g$  与  $S_1$  中顶点也可能相连, 且  $f, g$  两点可能相邻。

这里我们注意到, 如果  $f, g$  在平面图的不同面内, 考虑到任意边割集  $E[S_1, S_2]$  其中  $|S_1|, |S_2| \geq 2$ , 满足  $e[S_1, S_2] \geq 4$ , 比如  $f$  在这种情况下只能与  $a, e$  拥有在  $V(G) \setminus S$  中度为 3 的公共邻点。这意味着图  $G$  的顶点数至多为 11, 则由断言 1 可知结论成立。因此  $f, g$  在同一面中。特别地, 如果  $fg$  是一条边, 则顶点  $f, g$  与  $V(G) \setminus S$  之间均不再存在边。

因此若我们删除  $H$  中的顶点, 此时删去的边数最多为  $13 + 4 + 2 + 2 + 4 = 25$  条, 根据归纳假设, 我们有

$$\begin{aligned} e(G) &\leq e(G \setminus H) + 25 \\ &\leq \frac{23}{8}(n-9) - 3 + 25 \\ &\leq \frac{23}{8}n - 3. \end{aligned}$$

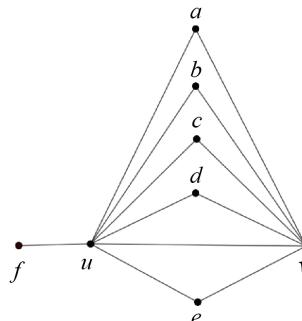
□

**断言 6.** 如果  $G$  包含 7-6 边这种子图结构, 那么有  $e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。

假设  $uv$  是一条 7-6 边, 由于  $G$  不包含  $S_{2,6}$ , 所以  $uv$  上至少有 4 个三角形, 我们根据  $uv$  边上的三角形数目来区分为两种情形。

**情形 1.** 边  $uv$  上有 5 个三角形的公共边

设  $a, b, c, d, e$  是与  $u$  和  $v$  相邻的顶点,  $f$  是只与  $u$  相邻的顶点, 如图 3 所示。



**Figure 3.** Subgraph structure with 7-6 sides and 5 triangles

**图 3.** 有 7-6 边并且有 5 个三角形的子图结构

设  $S = \{u, v, a, b, c, d, e, f\}$ ,  $S_1 = \{a, b, c, d, e\}$  和  $H = G[S]$ 。类似地, 我们计算与这一子图结构关联的边的数目, 首先  $S_1$  中的所有顶点都可以形成一条长度至多为 4 的路; 其次  $S_1$  中的每个顶点至多在  $V(G) \setminus S$  中有一个邻居, 否则图中可以找到  $S_{2,6}$ ; 再次顶点  $f$  最多在  $V(G) \setminus S$  中有一个邻点, 否则也存在  $S_{2,6}$ ; 最后  $f$  与  $S_1$  中顶点也可能相连。

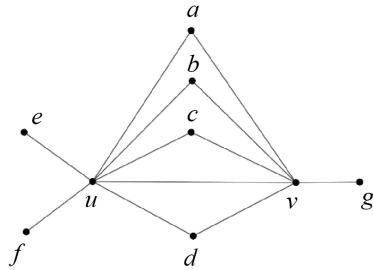
进一步地,  $a, b, c, d, e$  中至少有 3 个点与  $V(G) \setminus S$  之间不存在边。如若不然, 则图中必然存在大小至多为 2 的边割集, 与  $\lambda(G) \geq 3$  矛盾。

若我们删除  $H$  中的顶点，同时删去的边最多为  $12 + 4 + 2 + 3 = 21$  条，根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned} e(G) &\leq e(G \setminus H) + 21 \\ &\leq \frac{23}{8}(n-8) - 3 + 21 \\ &\leq \frac{23}{8}n - 3. \end{aligned}$$

**情形 2.** 边  $uv$  上有 4 个三角形的公共边

设  $a, b, c, d, e$  是与  $u$  和  $v$  相邻的顶点， $f$  是只与  $u$  相邻的顶点， $g$  是只与  $v$  相邻的顶点，如图 4 所示。



**Figure 4.** Subgraph structure with 7-6 sides and 4 triangles

**图 4.** 有 7-6 边并且有 4 个三角形的子图结构

设  $S = \{u, v, a, b, c, d, e, f, g\}$ ,  $S_1 = \{a, b, c, d\}$  和  $H = G[S]$ 。我们计算与这一子图结构关联的边的数目，首先  $S_1$  中的所有顶点都可以形成一条长度至多为 3 的路；其次  $S_1$  中的每个顶点至多在  $V(G) \setminus S$  中有一个邻居，否则图中可以找到  $S_{2,6}$ ；再次顶点  $e, f$  至多在  $V(G) \setminus S$  中有一个邻点，否则存在  $S_{2,6}$ ；而顶点  $g$  至多在  $V(G) \setminus S$  中有 4 个邻点，否则也存在 6-6 边或  $S_{2,6}$ ；最后  $e, f, g$  与  $S_1$  中顶点也可能相连，三个顶点  $e, f, g$  可能彼此相连。

与之前讨论类似，如果  $e, g$  之间有边相连，则  $e$  与  $V(G) \setminus S$  之间均不再存在边， $g$  向外连接的边数也要减 1。下面我们从图  $G$  中删除  $H$  中的顶点，当  $e, f$  处于相同的面内时，删除的边数至多为  $12 + 3 + 2 + 2 + 5 + 1 = 25$ 。

则根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned} e(G) &\leq e(G \setminus H) + 25 \\ &\leq \frac{23}{8}(n-9) - 3 + 25 \\ &\leq \frac{23}{8}n - 3. \end{aligned}$$

当  $e, f$  处于平面图中不同的面时，不妨设  $e$  单独在一个面内，且面边界点上有  $c, d$ 。此时如果  $e$  存在外连接的边，则  $c, d, e$  将连接  $V(G) \setminus S$  中度为 3 的顶点，否则其中存在部分顶点数都大于 1 的 3 边割。此时将这一顶点加入集合  $S$  进行下一步计算，讨论同上；如果  $e$  没有外连接的边，则  $c, d$  也不存在外连接的边，同样可以讨论删除的边数情况。

综合上述情况，删除的总边数至多为 25，由归纳假设结论成立。  $\square$

任意取相邻两点  $x, y \in V(G)$ ，由图  $G$  中任意相邻两点度数之和不等于 12，结合上述的断言，最后只

需要讨论  $d(x) + d(y) \leq 11$  的情形, 对  $G$  所有的边求和, 我们有

$$\begin{aligned} 11 \cdot e &\geq \sum_{xy \in E(G)} (d(x) + d(y)) \\ &= \sum_{x \in V(G)} (d(x))^2 \\ &\geq n\bar{d}^2 = n\left(\frac{2e}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

其中  $\bar{d}$  是  $G$  的平均度。

由上式可得, 当  $n \geq 24$  时,  $e(G) \leq \frac{11}{4}n \leq \frac{23}{8}n - 3$ 。

因此对于  $n \geq 1$ , 我们有  $e(G) \leq \frac{23}{8}n - 3$ , 证毕。

### 3. 总结

本文在 Ghosh 部分结果的基础上讨论了图中 6 度顶点互不相邻且不包含  $S_{2,6}$  作为子图的平面图的最大边数, 给出了相应的上界。同时我们注意到可以通过下述方式构造  $ex_p(n, S_{2,6})$  的下界。因为  $S_{2,6}$  包含 10 个顶点, 所以  $n \leq 9$  的最大平面图不包含  $S_{2,6}$ 。令  $9|n$ 。考虑由 9 个顶点上的最大平面图的  $\frac{n}{9}$  个不相交的图组成的平面图, 这些平面图不包含  $S_{2,6}$ 。因此,  $ex_p(n, S_{2,6}) \geq \frac{21}{9}n$ 。这都为后续的研究打下了坚实的基础。

### 参考文献

- [1] Mantel, W. (1907) Problem 28. *Winkundige Opgaven*, **10**, 60-61.
- [2] Dzido, T. (2013) A Note on Turán Numbers for Even Wheels. *Graphs and Combinatorics*, **29**, 1305-1309. <https://doi.org/10.1007/s00373-012-1212-9>
- [3] Dzido, T. and Jastrzębski, A. (2018) Turán Numbers for Odd Wheels. *Discrete Mathematics*, **341**, 1150-1154. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.10.003>
- [4] Fang, L., Zhai, M. and Wang, B. (2022) Planar Turán Number of Intersecting Triangles. arXiv: 2007.09650v1
- [5] Györi, E., Paulos, A., Salia, N., et al. (2022) Generalized Planar Turán Numbers. arXiv: 2002.04579v2
- [6] Füredi, Z. and Jiang, T. (2014) Hypergraph Turán Numbers of Linear Cycles. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **123**, 252-270. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2013.12.009>
- [7] Giménez, O. and Noy, M. (2009) Asymptotic Enumeration and Limit Laws of Planar Graphs. *Am Math Soc*, **22**, 309-329. <https://doi.org/10.1090/S0894-0347-08-00624-3>
- [8] McDiarmid, C., Steger, A. and Welsh, D. (2005) Random Planar Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **93**, 187-205. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2004.09.007>
- [9] Lan, Y., Shi, Y. and Song, Z.X. (2019) Extremal H-Free Planar Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **26**, Article Number P2.11. <https://doi.org/10.37236/8255>
- [10] Lan, Y., Shi, Y. and Song, Z.X. (2024) Planar Turán Numbers of Cubic Graphs and Disjoint Union of Cycles. arXiv:2202.09216v2
- [11] Ghosh, D., Györi, E., Paulos, A. and Xiao, C.Q. (2022) Planar Turán Number of Double Stars. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **36**. arXiv:2110.10515v3 [math.CO] <https://doi.org/10.1137/21M140657X>