

# 基于Black-Scholes模型可转债定价的研究

刘颖

河北地质大学数理教学部, 河北 石家庄

收稿日期: 2024年3月25日; 录用日期: 2024年4月22日; 发布日期: 2024年4月29日

## 摘要

可转换债券具有债券性、股权性和可交换性, 因此其定价问题也受到很多投资者所青睐。文章在Black-Scholes模型的基础上, 利用整体定价法, 将可转债的路径进行分解, 得到了可转债的定价模型, 并推导了定价公式。在实证分析中, 以塞力转债为例, 对可转债的价格进行了研究。结果表明, 股票价格、波动率均与可转债价格成正相关关系, 并且可转债的理论价格高于实际价格。

## 关键词

可转换债券, Black-Scholes模型, 实证分析

# Research on Convertible Bonds Pricing Based on the Black-Scholes Model

Ying Liu

School of Mathematics and Science, Hebei GEO University, Shijiazhuang Hebei

Received: Mar. 25<sup>th</sup>, 2024; accepted: Apr. 22<sup>nd</sup>, 2024; published: Apr. 29<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Convertible bond has the characteristics of bond, equity, and exchangeability, so its pricing is also favored by many investors. Based on the Black-Scholes model, this paper uses the integral pricing method to decompose the path of convertible bonds, obtains the pricing model of convertible bonds, and deduces the pricing formula. In the empirical analysis, the price of the convertible bond is studied by taking the Saili convertible bond as an example. The results show that the stock price and volatility are positively correlated with the price of convertible bonds, and the theoretical price of convertible bonds is higher than the actual price.

## Keywords

### Convertible Bond, Black-Scholes Model, Empirical Analysis

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

可转换债券(简称可转债)是一种混合的金融衍生品,同时具有债券性、股权性和可交换性。第一支可转债于 1843 年发行于美国,相比之下,我国发行可转债较晚。1992 年,宝安集团发行了我国第一只可转债——宝安转债,开启了可转债的新纪元。之后,可转债进入了较长时间的沉寂期,直到 2017 年可转债的发行数量才大幅度提升。目前,我国可转债数量已经达到 550 余支,市场规模不断扩大,已经成为了我国现代金融市场融资的重要手段,其定价问题也得到了很多投资者的关注。

可转债价格在一定程度上决定着发行方通过可转债进行融资的成败,只有合理定价才能为发行方获得融资,达到降低融资成本的目的,赢得投资者对公司业绩的期待和认可,同时合理定价是保证可转债市场运行态势良好的关键[1]。一般而言,可转债的定价方法主要有三种,分别为 Black-Scholes (简记为 B-S)期权定价模型、二叉树定价模型和有限差分法。本文主要采用 B-S 期权定价模型对可转债进行定价。

1973 年 B-S 期权定价理论的出现为可转债提供了重要的理论依据。随后,1977 年 Ingersoll 首次将 B-S 期权定价理论应用到可转债定价中。Liu [2]等人利用精算方法讨论了可转债的定价问题,并利用我国股票市场的真实数据对 B-S 模型和精算模型进行实证分析。Zhu [3]等人在 B-S 模型下推导了两种形式的积分方程,以对单个标的资产上的可转债进行定价。Tian 和 Chen [4]提出了可转债的基本估值模型,即 B-S 模型,并对其进行了修正。

相较于国外,国内对可转债定价的研究起步较晚。对于这种新型且复杂的金融工具,一些国内专家学者基于 B-S 期权定价模型对可转债定价,取得了一些研究成果。张德华和陶融[5]介绍了 B-S 模型,分析了该模型在可转债定价中的应用。张鸣[6]借鉴了 B-S 模型,对可转债定价理论和应用模型作了系统研究。李爱香[7]从 B-S 模型的基础上探讨了可转债的定价理论,并进行了实证分析。

基于以上文献,本文在 B-S 期权定价模型的基础上,利用整体定价法,对可转债的路径进行分解,构建可转债定价模型,结合真实的市场数据,进行实证分析,将理论与实际相结合,为投资者提供一些建议。

## 2. 可转换债券的要素和条款

可转债是一种特殊的债券,债券持有人可以选择持有债券直到到期日,也可以在转股期内按照转股价格将公司的债券转换成公司的股票。可转债主要由标的股票、票面利率、转换比率和转股价格、存续期限与转股期限等要素构成,涉及到赎回条款、回售条款、转股价格修正条款等条款。

标的股票是可转债的标的资产,即可转换成的股票。票面利率取决于市场情况和发行主体的信用评级,由发行方和承销商共同决定,这影响了债券持有者的红利收益。转换比率是指单位债券可转换成的股票数量,转股价格是指发行前确定的债券转换为股票时每股支付的价格,二者的乘积和股票未来的价格密切相关,决定了投资者是否进行转股。存续期限是指可转债发行日到到期日的期间,而转股期限是指债券持有人能将债券转换成普通股的起始日至截止日的期间。

赎回条款是发行者拥有的一项期权，指在特定情况下，发行者可以按照事先约定的价格赎回投资者全部或部分可转债的条款。该条款保护了发行者和原有股东的权益。回售条款是指可转债的转股价值低于债券面值时，债券持有人可以按照事先约定的价格卖给发行人的条款。该条款保护了投资者的利益。转股价格修正条款是发行者拥有的一种权利，指当正股价格低于转股价格一定比例一定天数时，发行者和投资者按照事先约定重新商议转股价。该条款保证了可转债发行人转股的条款。

### 3. 可转换债券定价

#### 3.1. 模型假设

在讨论可转债定价过程中，常常假定一些条件。本文假定资本市场中不存在交易费，税收和红利支付，无套利机会和违约风险；资产交易是连续的，可转债可以在有效期内按照转股价格转换成公司股票等。

涉及到可转债定价问题，常常需要给出相应股票的价格模型。因此，在给定的风险中性概率测度  $Q$  下，假设  $t$  时刻股票价格  $S_t$  满足的随机微分方程为

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dB(t),$$

其中， $r$  为无风险利率， $\sigma$  为  $S_t$  的波动率， $B(t)$  是概率空间  $(\Omega, F, Q)$  上的标准 Brown 运动。

#### 3.2. 可转债定价公式

由可转债的定义及其条款，本文将可转债的路径进行分解，当纯债券价值大于等于转换后的股票价格时，债券持有者不进行转股，可转债的价值为纯债券价值；当纯债券价值小于转换后的股票价格时，债券持有者将债券转换成公司股票，可转债的价值为转换后的股票价格。因此，在  $T$  时刻可转债的定价模型可以设定为：

$$V(T, S_T) = \begin{cases} P, & S_T \leq \frac{C_v P}{F}, \\ \frac{FS_T}{C_v}, & S_T > \frac{C_v P}{F}. \end{cases}$$

其中， $V(T, S_T)$  表示  $T$  时刻的可转债的价格， $P = F e^{-\alpha T}$  表示票面利率为  $\alpha$  的纯债券在  $T$  时刻的价值， $F$  为面值， $C_v$  为预先设定好的转股价。

根据鞅定价理论，可转债在  $t$  时刻的价格为： $V(t, S_t) = e^{-r(t-T)} E[V(T, S_T) | F_t]$ 。

令  $\tau = T - t$ ，通过计算，可以得到可转债在  $t$  时刻的价格的表达式为：

$$V(t, S_t) = e^{-r\tau} PN(d_1) + \frac{FS_t}{C_v} N(-d_1 + \sigma\sqrt{\tau})$$

$$\text{其中 } d_1 = \frac{\ln \frac{C_v P}{FS_t} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

### 4. 实证分析

选取塞力转债作为研究对象，其正股价格为塞力医疗。本文收集了从 2021 年 9 月 15 日至 2024 年 3 月 15 日共 603 个交易日的历史数据，均来自于大智慧 365 (<http://www.gw.com.cn/>)。根据可转债等相关资料，可以知道  $F = 100$ ， $C_v = 16.98$ ， $\alpha = 1.5\%$ ， $\tau = 2.5$ 。无风险利率采用央行一年期定期存款利率进行估计，

则  $r = 1.75\%$ 。利用 matlab 进行编程，可以得到以下结论。

#### 4.1. 可转债定价

图 1 和图 2 分别表示塞力医疗股票的收盘价及其日对数收益率。从图形上来看，不论是收盘价还是对数收益率，变化幅度均较大，波动率明显。通过对股票价格的统计分析，塞力医疗股票价格的最大值、最小值和中位数分别为 21.96，5.78 和 11.54。

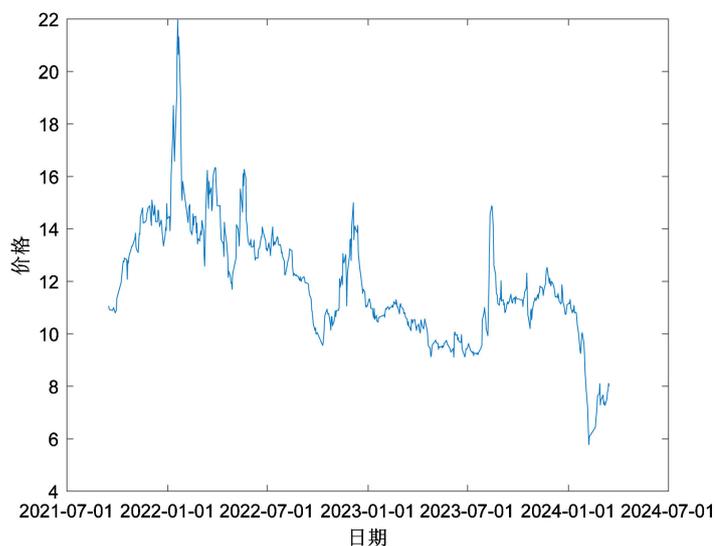


Figure 1. The daily closing price trend chart of the Sali Medical stock

图 1. 塞力医疗日收盘价走势图

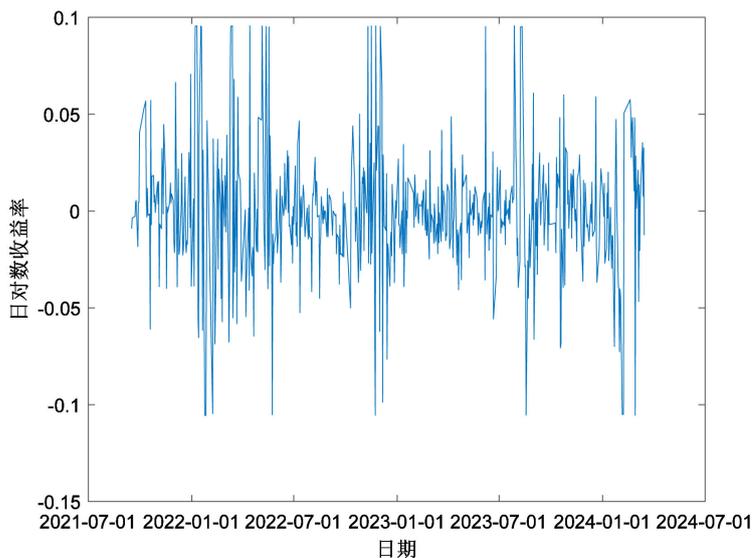


Figure 2. The daily logarithmic yield rate trend chart of the Sali Medical stock

图 2. 塞力医疗日对数收益率走势图

涉及到波动率，利用  $U_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i) (i = 1, \dots, n)$ ，可以计算出时间序列  $U_1, U_2, \dots, U_n$  的值，将时间序列的标准差  $S$  代入  $\sigma = S/\sqrt{\Delta t}$ ，易得  $\sigma = 0.5324$ 。

图 3 为利用该可转债的定价公式获得的可转债理论价格与真实市场价格的比较图。从图 3 中可以看出塞力转债理论价格与实际价格的走势基本一致，但理论价格均高于实际价格。

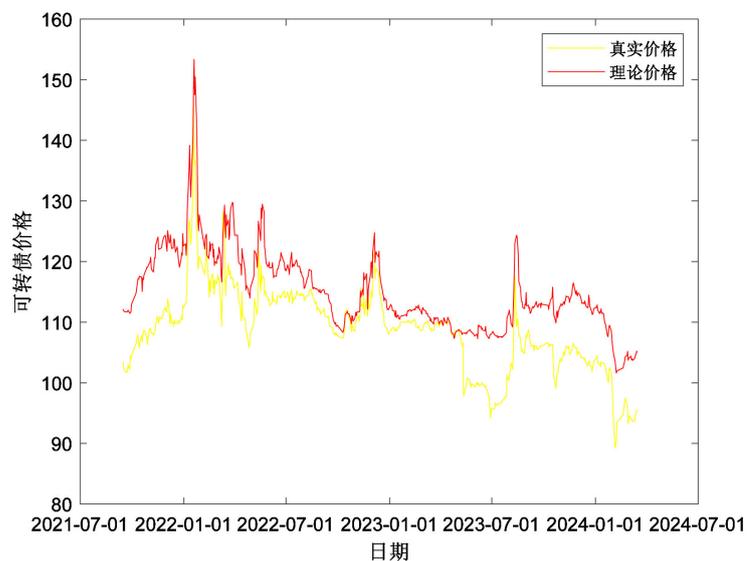


Figure 3. The convertible bond price comparison chart

图 3. 可转债价格对比图

#### 4.2. 股票价格和波动率与可转债价格之间的关系

图 4 表明股票价格与可转债价格成正相关关系，股票价格越大，可转债价格越高。通过观察斜率，不难看出，股票价格越大对可转债的影响程度也越大。这一结论与实际相符，当正股股价上涨时，由于股价高，投资者会转向投资可转债，从而促使可转债价格上涨。相反，如果正股股价下跌时，可转债价格也会随之下跌。

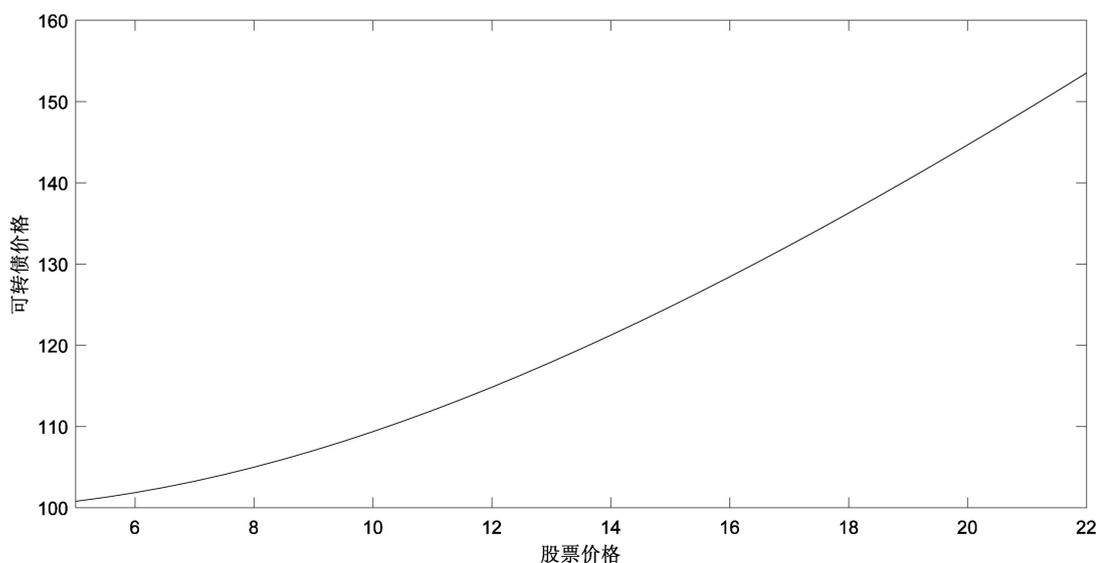
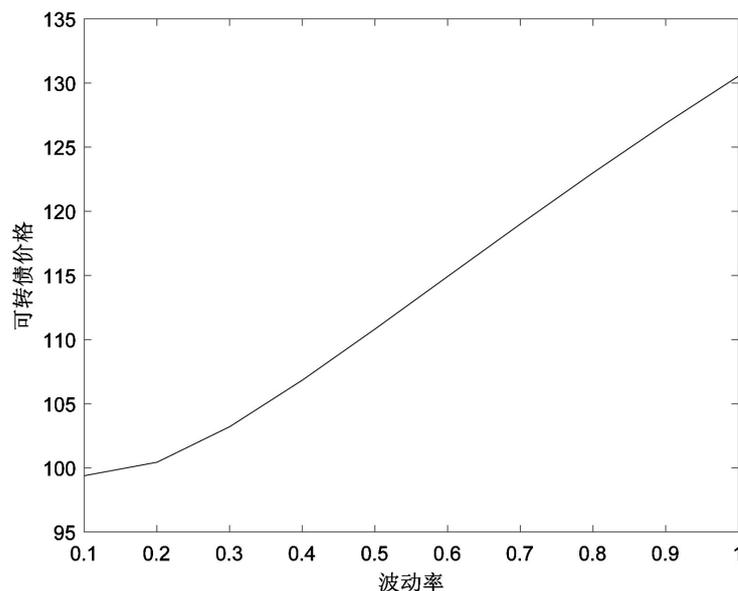


Figure 4. The impact of stock price on the price of the convertible bond

图 4. 股票价格对可转债价格的影响



**Figure 5.** The impact of volatility on the price of the convertible bond  
**图 5.** 波动率对可转债价格的影响

图 5 表明波动率与可转债价格也成正相关关系，波动率越大，可转债的价格越高。这一结果与 Black-Scholes 期权定价理论相同，即波动率越大时，期权的理论价格越高。事实上，波动率是衡量股票价格变动的重要指标，波动率越大时，价格波动范围越大，标的资产偏离执行价格的可能性也越大。

### 4.3. 结论分析

通过以上的实证研究，产生这一结果的原因主要有以下几点：

#### 第一，金融市场环境复杂，模型考虑因素不足。

近期，中国的股票市场屡创新低，很多股票价格持续下跌，与之相关的可转债也未能幸免。从理论上讲，可转债的理论数据高于真实数据合乎常理。在涉及到本文的可转债的价格模型，未考虑市场变化所带来的影响，以及可转债所包含的条款等因素对可转债价格的影响。

#### 第二，模型创新性有待提高，增强使用的普适性。

资本市场具有波动性，不同的行业、不同的企业背景的股票价值往往呈现出各种各样的关系。这样，选取不同的样本会直接影响到模型参数的估计，间接也影响到可转债理论价格，存在误差在所难免。因此，要优化模型结构，对模型进行创新，构造更加符合实际的理论模型，扩大其使用范围，增强普适性。

#### 第三，股票价格与可转债价格的多样化。

由于可转换债券具有债券性、股权性和可交换性，因此股票价格和相对应的可转债价格呈现出不同的相关性，有的相关性较强，有的就较弱。同时，在讨论可转债价格过程中，基于 B-S 模型研究可转债定价问题，通常将可转债看作欧式看涨期权，但可转债也包含美式期权等，这些因素也直接影响到了可转债的价格。

## 5. 小结

本文基于 B-S 模型对可转债的定价问题进行了研究。通过选取塞力转债作为样本，利用本文模型得到的理论价格与实际价格进行对比，发现价格被高估。通过研究还发现，股票价格、波动率均与可转债价格成正相关关系。为了减少定价偏差，今后在研究可转债定价的问题时，应充分考虑到市场环境、股

---

票价格波动、可转债的相关条款, 改进和完善可转债定价模型, 使得模型更加贴近真实, 增强模型的实用性, 为投资者提供理论参考。

### 参考文献

- [1] 胡晖, 仝海霞. 我国可转换债券有限差分定价的实证分析[J]. 经济与管理研究, 2005(10): 77-81.
- [2] Liu, J., Yan, L.Z. and Ma, C.Q. (2013) Pricing Options and Convertible Bonds Based on an Actuarial Approach. *Mathematical Problems in Engineering*, **2013**, Article ID 676148. <https://doi.org/10.1155/2013/676148>
- [3] Zhu, S.P., Lin, S. and Lu, X.P. (2018) Pricing Puttable Convertible Bonds with Integral Equation Approaches. *Computers and Mathematics with Applications*, **75**, 2757-2781. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.01.007>
- [4] Tian, Y.X. and Chen, J. (2020) The Analysis of Chinese Convertible Bond Market. *Journal of Economics and Public Finance*, **6**, 104-122. <https://doi.org/10.22158/jepf.v6n2p104>
- [5] 张德华, 陶融. 布莱克-斯科尔斯期权定价模型在可转换债券定价中的应用[J]. 财经理论与实践, 1999(6): 52-54.
- [6] 张鸣. 可转换债券定价理论与案例研究[J]. 上海财经大学学报, 2001(5): 29-35.
- [7] 李爱香. B-S 期权定价模型在可转换债券定价中的应用[J]. 重庆工学院学报, 2005(2): 88-90.