Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(4), 1758-1762
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134166

Hans汉斯

一类Filiform李代数的左对称代数结构

宋　巍，吴明忠*

西华师范大学数学与信息学院，四川 南充

收稿日期：2024年3月28日；录用日期：2024年4月23日；发布日期：2024年4月30日

摘　要

本文运用导子和极大环面的定义，对一类特殊的**filiform**李代数进行了深入的探讨，并成功求得了这类特殊**filiform**李代数的一个极大环面，从而证明出这类**filiform**李代数满足左对称代数结构。这一发现不仅丰富了**filiform**李代数的理论体系，也为相关领域的研究提供了新的思路和方向。

关键词

左对称代数，**filiform**李代数，极大环面

The Left Symmetric Algebraic Structure of a Class of Filiform Lie Algebras

Wei Song, Mingzhong Wu*

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Mar. 28th, 2024; accepted: Apr. 23rd, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

In this paper, by using the definitions of derivation and maximal torus, a special class of filiform Lie algebras are discussed in depth, and a maximal torus of this special class of filiform Lie algebras is successfully obtained, which proves that this class of filiform Lie algebras satisfies the left symmetric algebraic structure. This finding not only enriches the theoretical system of filiform Lie algebras, but also provides new ideas and directions for research in related fields.

*通讯作者。

文章引用: 宋巍, 吴明忠. 一类 Filiform 李代数的左对称代数结构[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1758-1762.
DOI: 10.12677/aam.2024.134166

Keywords

Left Symmetric Algebra, Filiform Lie Algebra, The Maximal Torus

1. 引言

上世纪 60 年代，M. Vergen 在文献[1]中引入了 filiform 李代数的基本概念，时隔不久，M. Goze 在文献[2]中介绍了几种特殊的 filiform 李代数 L_n, Q_n, R_n, W_n，这些 filiform 李代数以及它们的形变是李理论的重要研究内容之一。

左对称代数(也被称为 Pre-Lie 代数，Vinberg 代数等)作为一种 Lie-admissible 代数，早在 1896 年，Cayley 在文献[3]中就以一种 rooted tree 代数引入了左对称代数，它在换位运算下构成一个李代数。由此，左对称代数与李代数有十分密切的关系。近年来，对左对称代数的研究愈来愈多，例如，文献[4] [5] [6]讨论了左对称代数的一些基本理论和性质。而 Novikov 代数作为一类特殊的左对称代数，在 1985 年，Balinskii A.A.和 Novikov S.P.在文献[7]中就给出了其定义，后来很多学者深入研究了 Novikov 代数. 例如，文献[8] [9] [10]分别讨论了几类 Novikov 代数及其实现，4 维 Novikov 代数的自同构，Novikov 代数和 L-值范畴及其应用。

极大环面是由可对角化的线性变换组成的全体导子集合的一个可交换极大子代数[11]。近年来，对代数极大环面的研究也愈来愈多，例如，文献[12]中讨论了关于半单李代数的极大环面子代数的中心化子，文献[13]中讨论了完备 Lie 代数的极大环面子代数，文献[14]中讨论了(n-3)-filiform 李代数的极大环面。此外，通过计算极大环面，文献[15]中证明了 B_{n+1}^r filiform 李代数具有左对称代数结构。相同道理，那么一类特殊的 filiform 李代数究竟是否具有一个左对称代数结构依然是一个尚未解决的基本问题。

文献[16]中给出了第一个三步幂零李代数不具有 Novikov 代数结构的例子，并且证明了任意自由三步幂零李代数都具有 Novikov 代数结构。进一步还给出了一类 filiform 李代数的 Novikov 代数结构，从而证明了这类 filiform 李代数具有 Novikov 代数结构(因此，也具有左对称代数结构)。具体结果表明如下，

如果一个维数为 $n(n \geq 3)$ 的 filiform 李代数在一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 下满足

$$\begin{aligned}&\left[e_1, e_j\right] = e_{j+1}, 2 \leq j \leq n-1,\\&\left[e_i, e_j\right] = \frac{6(j-i)}{j(j-1)\binom{j+i-2}{i-2}} e_{i+j}, 2 \leq i \leq j; i+j \leq n,\end{aligned} \tag{1}$$

那么这类 filiform 李代数具有以下 Novikov 代数结构(左对称代数结构)

$$e_i e_j = \frac{6}{\binom{j+i-2}{i-2}} e_{i+j}, 2 \leq i, j \leq n; i+j \leq n. \tag{2}$$

文献[16]中对于以上结果的证明即是直接验证以下的(3)，(4)，(5)式。

而本文从另外的角度，运用导子和极大环面的定义，成功求得了以上这类特殊 filiform 李代数的一个极大环面，从而证明出这类 filiform 李代数满足左对称代数结构。

本文所讨论的线性空间和代数都定义在数域 F 上。

2. 基本概念

定义 1 令 A 是数域 F 上的一个线性空间。在 A 上定义一个双线性运算 $(x,y)\to xy$，如果这个双线性运算满足，对于任意的 $x,y,z\in A$，都有

$$(xy)z-x(yz)=(yx)z-y(xz). \tag{3}$$

那么称 A 是一个左对称代数。如果 A 再满足

$$(zx)y=(zy)x. \tag{4}$$

那么称 A 为 Novikov 代数。

如果在左对称代数 A 上定义一个括积

$$[x,y]=xy-yx. \tag{5}$$

那么 A 构成一个李代数。此时该李代数与左对称代数 A 相邻，仍用 A 表示该李代数，并称该李代数具有左对称代数结构。

定义 2 [1]令 A 是一个 n 维李代数。如果满足条件 $\dim C^iA=n-i-1, 1\le i\le n-1$，那么 A 称为 filiform 李代数。

定义 3 令 δ 是李代数 A 的一个线性变换。如果在 A 的一组基 $\{f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n\}$ 上 δ 满足条件：对任意的 $1\le i,j\le n$，都有

$$\delta([f_i,f_j])=[\delta(f_i),f_j]+[f_i,\delta(f_j)].$$

那么称 δ 是李代数 A 的一个导子。

3. 主要结果

在(1)式这类 filiform 李代数中，引入新的一组基 $\{f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n\}$ 满足

$$f_1=6e_1,$$
$$f_j=\frac{1}{j-2}e_j, 2\le j\le n.$$

那么新的括积为

$$[f_i,f_j]=6(j-i), 1\le i\le j; i+j\le n. \quad (*)$$

在本文中，我们将以上这类 filiform 李代数记为 F_n。

定理 1 令 F_n 是如$(*)$式的 filiform 李代数，$\{f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n\}$ 为 F_n 的一组基，那么 F_n 有一个由 $\sigma\in Der(F_n)$ 张成的极大环面，其中 σ 是如下定义的线性变换，

$$\sigma(f_i)=if_i, 1\le i\le n.$$

证明 假设 D 是 F_n 的一个可对角化的线性变换

$$D(f_1)=a_1f_1, D(f_2)=a_2f_2, D(f_3)=a_3f_3,\cdots,D(f_n)=a_nf_n.$$

由定义 3 可得

$$\begin{aligned}[D(f_i),f_j]+[f_i,D(f_j)]&=[a_if_i,f_j]+[f_i,a_jf_j]=(a_i+a_j)[f_i,f_j]\\&=6(a_i+a_j)(j-i)f_{i+j},\end{aligned}$$

$$D\left(\left[f_i,f_j\right]\right)=D\left(6\left(j-i\right)f_{i+j}\right)=6\left(j-i\right)a_{i+j}f_{i+j}.$$

因此 D 是 F_n 的一个导子当且仅当以下式子成立

$$a_i+a_j=a_{i+j},1\le i,j\le n,i+j\le n.$$

解这个线性方程组我们得到

$$a_1=a_1,a_2=2a_1,a_3=3a_1,a_4=4a_1,\cdots,a_{n-1}=\left(n-1\right)a_1,a_n=na_1.$$

所以有

$$D\left(f_1\right)=a_1f_1,D\left(f_2\right)=2a_1f_2,D\left(f_3\right)=3a_1f_3,\cdots,D\left(f_n\right)=na_1f_n.$$

特别的，取 $a_1=1$，那么 F_n 的一个线性变换 σ

$$\sigma\left(f_1\right)=f_1,\sigma\left(f_2\right)=2f_2,\sigma\left(f_3\right)=3f_3,\cdots,\sigma\left(f_n\right)=nf_n$$

是 F_n 的一个半单导子。

不妨假设 Φ 是 F_n 的一个使得 $\sigma\in\Phi$ 的极大环面。$\forall\Phi_*\in\Phi$，假设 Φ_* 关于所定义的一组基 $\left\{f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n\right\}$ 的矩阵是 M_{Φ_*}。由于所有的环面子代数都是 Abel (可交换)的，所以 $\forall\Phi_*\in\Phi,\left[\Phi_*,\sigma\right]=0$。由

$$\Phi_*\left(f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n\right)=\left(f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n\right)M_{\Phi_*};$$
$$\sigma\left(f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n\right)=\left(f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n\right)diag\left(1,2,3,\cdots,n\right).$$

可得到 $\left[M_{\Phi_*},diag\left(1,2,3,\cdots,n\right)\right]=0$。因此 M_{Φ_*} 须为一个对角矩阵。

假设 $M_{\Phi_*}=diag\left(k,2k,3k,\cdots,nk\right)$，即有

$$\Phi_*\left(f_1\right)=kf_1,\Phi_*\left(f_2\right)=2kf_2,\Phi_*\left(f_3\right)=3kf_3,\cdots,\Phi_*\left(f_n\right)=nkf_n,k\in F,$$

所以 $\Phi_*=k\sigma$。因此 σ 张成 F_n 的一个极大环面。

定理 2 令 F_n 是如(∗)式的 filiform 李代数，$\left\{f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n\right\}$ 为 F_n 的一组基。如果 σ 张成 F_n 的一个极大环面，那么 F_n 具有以下左对称代数结构

$$\forall x=a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n\in F_n,$$
$$y=b_1f_1+b_2f_2+\cdots+b_nf_n\in F_n,\left(a_i,b_i\in F,1\le i\le n\right).$$

那么令 $xy=\sigma^{-1}\left[x,\sigma y\right]$，则这个乘积使得该 filiform 李代数构成左对称代数。

证明 如果 σ 是一个非奇异导子，令 $xy=\sigma^{-1}\left[x,\sigma y\right]$，那么这个乘积运算使得该李代数构成左对称代数，验证如下

$$\begin{aligned}&\left(xy\right)z-\left(yx\right)z-x\left(yz\right)+y\left(xz\right)\\&=\sigma^{-1}\left[\sigma^{-1}\left[x,\sigma y\right],\sigma z\right]-\sigma^{-1}\left[\sigma^{-1}\left[y,\sigma x\right],\sigma z\right]\\&-\sigma^{-1}\left[x,\sigma\left(\sigma^{-1}\left[y,\sigma z\right]\right)\right]+\sigma^{-1}\left[y,\sigma\left(\sigma^{-1}\left[x,\sigma z\right]\right)\right]\\&=\sigma^{-1}\left(\left[\sigma^{-1}\left[x,\sigma y\right],\sigma z\right]-\left[\sigma^{-1}\left[y,\sigma x\right],\sigma z\right]-\left[x,\left[y,\sigma z\right]\right]+\left[y,\left[x,\sigma z\right]\right]\right)\\&=\sigma^{-1}\left(\left[\sigma^{-1}\left(\left[x,\sigma y\right]-\left[y,\sigma x\right]\right),\sigma z\right]-\left[x,\left[y,\sigma z\right]\right]+\left[y,\left[x,\sigma z\right]\right]\right)\\&=\sigma^{-1}\left(\left[\left[x,y\right],\sigma z\right]-\left[x,\left[y,\sigma z\right]\right]+\left[y,\left[x,\sigma z\right]\right]\right)=0.\end{aligned}$$

即证得(1)式：$\left(xy\right)z-x\left(yz\right)=\left(yx\right)z-y\left(xz\right)$。

而由定理 1 得到了 F_n 的一个非奇异导子

$$\sigma\left(f_i\right)=if_i, 1\le i\le n.$$

因此 F_n 具有左对称代数结构。

本文与文献[16]分别是以两种不同的方法得到的这类 filiform 李代数 F_n 的两个的左对称代数结构，可以看出(2)式中所具有的左对称代数结构与定理 2 中所具有的左对称代数结构是两个不同的左对称代数结构。

基金项目

西华师范大学博士科研启动基金(15E027)；西华师范大学基本科研业务费(17C048)；西华师范大学英才科研基金(17YC392)；四川省教育厅资助科研项目(17AZ0378)。

参考文献

[1] Vergne, M. (1970) Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes, Application a l'etude de la variete des algebres de Lienilpotentes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **98**, 81-116. https://doi.org/10.24033/bsmf.1695

[2] Goze, M. and Khakimdjanov, Y. (1996) Nilpotent Lie Algebras. In: *Mathematics and Its Applications*, Vol. 361, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2432-6

[3] Cayley, A. (1890) On the Theory of Analytic Forms Called Trees. In: *Collected Mathematics Papers of Arthur Cayley*, Cambridge University Press, Cambridge, Vol. 3, 242-246.

[4] 白承铭，孟道骥．左对称代数的若干性质[J]．南开大学学报, 1997, 30(2): 1-8.

[5] 白述伟，孟道骥．左对称代数(I) [J]．南开大学学报, 1995, 28(4): 72-77.

[6] 孟道骥，白述伟．左对称代数(II) [J]．南开大学学报, 1996, 29(1): 2-6.

[7] Balinskii, A.A. and Novikov, S.P. (1985) Poissson Brackets of Hydrodynarnics Type. Frobenius Algebras and Lie Algebras. *Soviet Mathematics Doklady*, **32**, 228-231.

[8] 段明月．几类 Novikov 代数及其实现[D]: [硕士学位论文]．哈尔滨：黑龙江大学, 2012.

[9] 黄忠铣. 4 维 Novikov 代数的自同构[J]．武夷学院学报, 2018, 37(12): 5-11.

[10] 周鑫. Novikov 代数和 L-值范畴及其应用[D]: [博士学位论文]．长春：东北师范大学, 2020.

[11] Santharounane, L.J. (1982) Kac-Moody Lie Algebra and the Classification of Nilpotent Lie Algebras of Maximal Rank. *Canadian Journal of Mathematics*, **34**, 1215-1239. https://doi.org/10.4153/CJM-1982-084-5

[12] 薛小西．关于半单李代数的极大环面子代数的中心化子[J]．系统科学与数学, 1984(2): 102.

[13] 孟道骥．完备 Lie 代数的极大环面子代数[J]．数学年刊 A 辑(中文版), 1995(6): 723-728.

[14] 吴明忠. (n-3)-Filiform 李代数的极大环面(英文) [J]．数学研究, 2008(2): 117-118+113-116.

[15] 吴明忠. B_(n+1)~r filiform 李代数的左对称代数结构[J]．贵阳学院学报(自然科学版), 2013, 8(4): 56-58.

[16] Dietrich, B. and Karel, D. (2006) Novikov Structures on Solvable Lie Algebras. *Journal of Geometry and Physics*, **56,** 1837-1855. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2005.10.010