Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(5), 2105-2109**
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135198

关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=42y(y+1)(y+2)(y+3)$

张艺宝

西南大学数学与统计学院，重庆

收稿日期：2024年4月23日；录用日期：2024年5月17日；发布日期：2024年5月29日

摘　要

本文运用同余式、递推序列和Pell方程等初等方法，证明了不定方程$5x(x+1)(x+2)(x+3)=42y(y+1)(y+2)(y+3)$仅有唯一正整数解$(x,y)=(6,3)$，并找出了该方程的所有整数解。

关键词

不定方程，同余式，Pell方程，正整数解

On the Diophantine Equation $5x(x+1)(x+2)(x+3)=42y(y+1)(y+2)(y+3)$

Yibao Zhang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing

Received: Apr. 23th, 2024; accepted: May 17th, 2024; published: May 29th, 2024

Abstract

This article uses elementary methods such as congruence formula, recursive sequences, and Pell equation to prove that indefinite Diophantine equation $5x(x+1)(x+2)(x+3)=42x(x+1)(x+2)(x+3)$ has a unique positive integer $(x,y)=(6,3)$. Also, All 20 groups of integer solutions of the equation are found.

Keywords

Diophantine Equation, Congruence Formula, Pell Equation, Positive Integer Solution

文章引用: 张艺宝. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=42y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2105-2109. DOI: 10.12677/aam.2024.135198

1. 引言与结论

对于 $px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$，其中 $(p,q)=1, p,q\in N^*$ 这类的不定方程正整数解的研究[1]-[11]，已有许多重要的结论。1971年Cohn证明了当 $p=1,q=2$ 时，不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(5,4)$ [1]；1982年宣体佐证明了当 $p=1,q=5$ 时，不定方程仅有一组正整数解 $(x,y)=(1,2)$ [2]；1991年罗明证明了当 $p=1,q=7$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(4,2)$ [3]；2022年谢耀兵证明了当 $p=5,q=9$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(6,5)$ [4]。但对于 $(p,q)=(5,42)$ 时的不定方程正整数解的问题仍未解决。因此本文将在以前的基础上讨论 $(p,q)=(5,42)$ 的情形，证明了：

定理 不定方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3)=42y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

仅有正整数解 $(x,y)=(6,3)$。

2. 预备知识

先将方程(1)化为

$$\left[5\left(x^2+3x+1\right)\right]^2-210\left(y^2+3y+1\right)^2=-185 \tag{2}$$

易知方程 $X^2-210Y^2=-185$ 的全部整数解可由以下两个结合类给出：

$$x_n+y_n\sqrt{210}=\pm\left(5+\sqrt{210}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{210}\right)=\pm\left(5+\sqrt{210}\right)\left(29+2\sqrt{210}\right)^n \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\overline{x}_n+\overline{y}_n\sqrt{210}=\pm\left(-5+\sqrt{210}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{210}\right)=\pm\left(-5+\sqrt{210}\right)\left(29+2\sqrt{210}\right)^n \quad n\in\mathbb{N}$$

其中 $5+\sqrt{210}$ 是方程 $X^2-210Y^2=-185$ 的最小正整数解，$29+2\sqrt{210}$ 是Pell方程 $u^2-210v^2=1$ 的基本解[11]。易知 $\overline{y}_n=y_{-n}$，于是方程(2)的解应该满足

$$(2y+3)^2=\pm 4y_n+5 \quad n\in\mathbb{N} \tag{3}$$

容易验证不定方程(1)满足下列关系式：

$$y_{n+1}=58y_n-y_{n-1},\ y_0=1,\ y_1=39 \tag{4}$$

$$u_{n+1}=58u_n-u_{n-1},\ u_0=1,\ u_1=29 \tag{5}$$

$$v_{n+1}=58v_n-v_{n-1},\ v_0=0,\ v_1=2 \tag{6}$$

$$u_{2n}=u_n^2+210v_n^2=2u_n^2-1,\ v_{2n}=2u_nv_n \tag{7}$$

$$y_n=u_n+5v_n \tag{8}$$

$$u_{n+2km}\equiv(-1)^k u_n \pmod{u_m} \tag{9}$$

$$v_{n+2km}\equiv(-1)^k v_n \pmod{u_m} \tag{10}$$

$$y_{n+2km}\equiv(-1)^k y_n \pmod{u_m} \tag{11}$$

下面本文将分两种情况讨论(3)式在 $n=0,-1$ 成立，由此求得(2)的全部整数解，进而求得方程(1)的全部正整数解。

3. 分类讨论

3.1. 当$(2y+3)^2=4y_n+5$时

此节主要是为了讨论n为何值时，$4y_n+5$为完全平方数，为此本文先介绍以下的几个引理。

引理 1 设 $2|m$ 且 $m>0$，则 $\left(\frac{\pm 20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=-\left(\frac{u_m\pm 4v_m}{113}\right)$。

证明 当 $2|m$ 且 $m>0$ 时，由(5)式可知 $2\nmid u_m$，且由(7)式可知 $u_{2m}=2u_m^2-1\equiv 1\ (\bmod 8)$；$u_m\equiv 1\ (\bmod 4)$，于是有 $\left(\frac{-1}{u_m}\right)=1$，$\left(\frac{2}{u_{2m}}\right)=1$，$\left(\frac{5}{u_{2m}}\right)=1$，

因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pm 20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)&=\left(\frac{\pm 20v_{2m}+10u_m^2}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm 40u_mv_m+10u_m^2}{u_{2m}}\right)\\&=\left(\frac{2}{u_{2m}}\right)\left(\frac{5}{u_{2m}}\right)\left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{u_m\pm 4v_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{u_{2m}}{u_m\pm 4v_m}\right)\\&=\left(\frac{u_m^2+210v_m^2}{u_m\pm 4v_m}\right)=\left(\frac{210v_m^2+(\pm 4v_m)^2}{u_m\pm 4v_m}\right)\\&=\left(\frac{226}{u_m\pm 4v_m}\right)=\left(\frac{2}{u_m\pm 4v_m}\right)\left(\frac{113}{u_m\pm 4v_m}\right)=-\left(\frac{u_m\pm 4v_m}{113}\right)\end{aligned}$$

引理 2 若 $4y_n+5$ 为平方数，则 $n\equiv 0,-1\left(\bmod 2^3\times 3^2\times 5\right)$。

证明 对序列 $\{4y_n+5\}$ 取不同的模来证明。

mod 311，排除 $n\equiv 1,3(\bmod 5)$，这是因为此时 $4y_n+5\equiv 161,55(\bmod 311)$，而 161、55 为 mod 311 的平方非剩余，故可排除 $n\equiv 1,3(\bmod 5)$ 的情形，剩余 $n\equiv 0,2,4(\bmod 5)$。为节省篇幅，下面不再重复排除的原因。

mod 41，排除 $n\equiv 1,2,3,5,6(\bmod 8)$，剩余 $n\equiv 0,4,7,12,15,20,24,32,39(\bmod 40)$。

mod 661，排除 $n\equiv 3,4,6,8(\bmod 10)$，剩余 $n\equiv 0,7,12,15,20,32,39(\bmod 40)$。

mod 239，47279，排除 $n\equiv 7,12,15(\bmod 20)$，剩余 $n\equiv 0,20,39(\bmod 40)$。

mod 17，11467，排除 $n\equiv 2,4,5,6,7(\bmod 9)$，剩余 $n\equiv 0,39,80,100,120,180,199,260,279,280,300,359$ $(\bmod 360)$。

mod 61，排除 $n\equiv 5(\bmod 15)$，剩余 $n\equiv 0,120,180,300,359(\bmod 360)$。

mod 37，排除 $n\equiv 12(\bmod 36)$，剩余 $n\equiv 0,180,359(\bmod 360)$。

下面本文将利用计算的方法排除 $n\equiv 180(\bmod 360)$。对于 $n\equiv 180(\bmod 360)$，可令 $n=360k+180$，若 $k=2k_1$，则 $n=720k_1+180$ 故 $n\equiv 4(\bmod 16)$，而对于序列 $\{4y_n+5\}$ 取 mod 1231 就可排除 $n\equiv 4(\bmod 16)$，若 $k=2k_1+1$，则 $n\equiv 12(\bmod 16)$，同理对于序列 $\{4y_n+5\}$ 取 mod 1231 也可排除 $n\equiv 12(\bmod 16)$。

综上所述 $n\equiv 0,-1\left(\bmod 2^3\times 3^2\times 5\right)$。

引理 3 设 $n\equiv 0\left(\bmod 2^3\times 3^2\times 5\right)$，则 $4y_n+5$ 为平方数当且仅当 $n=0$。

证明 若 $n \neq 0$，因为 $n \equiv 0\left(\bmod 2^3 \times 3^2 \times 5\right)$，则可令 $n = 2\times(4k\pm1)\times 3^2\times 5\times 2^t$，$t \geq 2$。若现取 m 为 $2^t, 3\times 2^t, 5\times 2^t$ 之一，则由(8)和(11)以及引理 2 可得

$$4y_n + 5 \equiv 4u_n + 20v_n + 5 \equiv \pm 20v_{2m} + 5\left(\bmod u_{2m}\right)$$

所以 $\left(\dfrac{4y_n+5}{u_{2m}}\right) = \left(\dfrac{\pm 20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right) = -\left(\dfrac{u_m \pm 4v_m}{113}\right)$。

$\{u_m \pm 4v_m\}$ 对 mod 113 的剩余序列周期为 56，而 $\{2^t\}$ 对 mod 56 的剩余序列周期为 3。

情况 1 对 $\{u_m + 4v_m\}$，选择具体的 m 如下：

$$m = \begin{cases} 2^t, & t \equiv 0\left(\bmod 3\right) \\ 5\times 2^t, & t \equiv 1\left(\bmod 3\right) \\ 3\times 2^t, & t \equiv 2\left(\bmod 3\right) \end{cases}$$

则有表 1。

Table 1. The situation of $u_m + 4v_m\left(\bmod 113\right)$

表 1. $u_m + 4v_m\left(\bmod 113\right)$ 的情形

$t \geq 2\left(\bmod 3\right)$	0	1	2
$m\left(\bmod 56\right)$	8	24	12
$u_m + 4v_m\left(\bmod 113\right)$	69	64	2

表 1 中所有的 $u_m + 4v_m$ 均为 mod 113 的平方剩余，即以上所有的 m 均有 $\left(\dfrac{u_m+4v_m}{113}\right) = 1$，故 $\left(\dfrac{4y_n+5}{u_{2m}}\right) = -1$，由此可知 $4y_n+5$ 不是平方数。

情况 2 对 $\{u_m - 4v_m\}$，选择具体的 m 如下：

$$m = \begin{cases} 2^t, & t \equiv 1,2\left(\bmod 3\right) \\ 5\times 2^t, & t \equiv 0\left(\bmod 3\right) \end{cases}$$

同理可知此时所有 $u_m - 4v_m$ 均为 mod 113 的平方剩余，由此得 $4y_n+5$ 不是平方数。综上**情况 1** 和**情况 2** 可知与条件 $4y_n+5$ 为平方数矛盾。故 $n = 0$。

反之当 $n = 0$ 时，显然 $4y_n + 5 = 3^2$ 是一个平方数。因此，引理 4 得证。

引理 4 设 $n \equiv -1\left(\bmod 2^3\times 3^2\times 5\right)$，则 $4y_n+5$ 为平方数当且仅当 $n = -1$。

证明 若 $n \neq -1$，因为 $n \equiv -1\left(\bmod 2^3\times 3^2\times 5\right)$，则可令 $n = -1 + 2\times(4k\pm1)\times 3^2\times 5\times 2^t$，$t \geq 2$。又由(11)式可得

$$4y_n + 5 = 4y_{-1+2\times(4k\pm1)\times 3^2\times 5\times 2^t} + 5 \equiv -4y_{-1} + 5\left(\bmod u_m\right)$$

而其中 $y_{-1} = 19$，则 $\left(\dfrac{4y_n+5}{u_m}\right) = \left(\dfrac{-71}{u_m}\right) = \left(\dfrac{u_m}{71}\right)$。对于序列 $\{u_m\}$ 对 mod 71 的剩余周期为 36，$\{2^t\}$ 对 mod 36 的剩余序列周期为 6，于是对于序列 $\{u_m\}$，我们可以选择具体的 m 如下：

$$m = 2^t$$

此时 $t \equiv 0,1,2,3,4,5\left(\bmod 6\right)$，，对应的 $u_m \equiv 56,23,63,56,23\left(\bmod 71\right)$ 均为 mod 71 的平方非剩余；由此可知 $4y_n+5$ 必不可能为平方数，这与 $4y_n+5$ 为平方数矛盾。因此 $n = -1$。反之，若 $n = -1$，则显然

$4y_n+5=9^2$ 是一个平方数。引理 5 得证。

3.2. 当$(2y+3)^2=-4y_n+5$时

引理 5 $-4y_n+5$ 是平方数当且仅当 $n=0$。

证明 当 $n\neq 0$ 时，此时 $y_n>1$，故 $-4y_n+5<0$，这与 $-4y_n+5$ 是一个平方数矛盾；若 $n=0$，则此时 $-4y_n+5=-4y_0+5=1^2$ 是一个平方数。

4. 定理证明

定理 不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=42y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有一组正整数解 $(x,y)=(6,3)$。

证明 由引理1知 $(2y+3)^2=-4y_0+5=1$，因此 $y=-1$ 或者-2，此时相应的整数解为 $(-3,-2),(-2,-2),(-1,-2),(0,-2),(-3,-1),(-2,-1),(-1,-1),(0,-1)$。

由引理4知 $(2y+3)^2=4y_0+5=9$，因此 $y=0$ 或者-3，此时相应的整数解为 $(-3,-3),(-2,-3),(-1,-3),(0,-3),(-3,0),(-2,0),(-1,0),(0,0)$。

由引理5知 $(2y+3)^2=4y_{-1}+5=81$，因此 $y=3$ 或者-6，此时相应的整数解为 $(-9,-6),(-9,3),(6,-6),(6,3)$。

综上所述，不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=42y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有一组正整数解 $(x,y)=(6,3)$，定理得证。

参考文献

[1] Cohn, J.H.E. (1971) The Diophantine Equation x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 2y(y + 1)(y + 2)(y + 3). *Pacific Journal of Mathematics*, **37**, 331-335. https://doi.org/10.2140/pjm.1971.37.331

[2] 宣体佐. 关于不定方程 5x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 1982(3): 27-34.

[3] 罗明. 关于不定方程 x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 7y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1991(1): 1-8.

[4] 谢耀兵. 关于不定方程 5x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 9y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 数学实践与认识, 2022, 52(5): 246-249.

[5] 王聪. 关于不定方程 3x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 10y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 重庆工商大学学报(自然科学报), 2016, 33(1): 29-32

[6] 李妮. 关于不定方程 5x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 14y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2017, 34(4): 41-45.

[7] 孙浩久. 关于不定方程 3x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 14y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 西南师范大学学报(自然科学报), 2017, 42(4): 1-6

[8] 林丽娟, 罗明. 关于不定方程 x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 35y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 数学实践与认识, 2020, 50(15): 307-313.

[9] 刘海丽, 罗明. 关于不定方程 x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 35y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 西南大学学报(自然科学报), 2016, 38(10): 42-46.

[10] 卢安然. 关于不定方程 3x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 10y(y + 1)(y + 2)(y + 3) [J]. 数学实践与认识, 2023, 53(11): 265-270.

[11] 柯召, 孙琦. 谈谈不定方程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 15-29.