

# 基于共识均衡的相位恢复

姜爱伟

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2024年4月28日; 录用日期: 2024年5月21日; 发布日期: 2024年5月30日

## 摘要

相位恢复是从幅值信息中恢复相位信息, 在图像处理等领域发挥重要作用, 在实际应用中, 往往存在噪声, 本文提出一种结合深度学习和即插即用的相位恢复算法, 共识均衡相位恢复, 运用多个去噪器插入迭代算法, 使去噪更加鲁棒。使在迭代求解算法中相位恢复算法与去噪算法达到平衡点, 提高了重构质量。本文在仿真和真实数据中对所提算法进行了测试, 实验结果表明, 该算法在去噪方面表现出更高的鲁棒性, 并且具备较强的重构能力。

## 关键词

即插即用ADMM, 共识均衡, 相位恢复

# Phase Retrieval Based on Consensus Equalization

Aiwei Jiang

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Apr. 28<sup>th</sup>, 2024; accepted: May 21<sup>st</sup>, 2024; published: May 30<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Phase retrieval is the retrieval of phase information from amplitude information, which plays an important role in image processing and other fields. In practical applications, there is often noise. This paper proposes a phase retrieval algorithm that combines deep learning and plug and play, consensus equalization phase retrieval uses multiple denoising devices to insert iterative algorithms to make denoising more robust. The phase retrieval algorithm and the denoising algorithm reach the balance point in the iterative solution algorithm, and the reconstruction quality is improved. The proposed algorithm is tested in simulation and real data, and the experimental results show that it is more robust for denoising, and has stronger reconstruction ability.

文章引用: 姜爱伟. 基于共识均衡的相位恢复[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2160-2171.

DOI: 10.12677/aam.2024.135205

## Keywords

Plug and Play ADMM, Consensus Equalization, Phase Retrieval

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

相位恢复的目标是从信号强度或者幅值测量中恢复原始信号及其相位[1]，由于相位比振幅包含更多关于场的信息，因此相位测量在计算数学和数据科学等众多领域都是热点研究问题，该问题在多个不同的领域都有应用，如信号处理[2]，图像处理，量子力学，光学成像[3] [4]等方面有广泛应用。但在实际应用中，图像在传输、存储和采集过程中，往往会受到噪声的干扰，而同时满足去噪、重构信号、和鲁棒性等特点的成像算法成为目前最大研究热点。

目前，相位恢复算法有传统优化方法，深度学习方法和即插即用方法等。传统的优化方法有 ER, HIO [5]，HPR, DM [6] [7] [8]，RAAR [9]等算法是将相位恢复问题看作是一个凸集和一个非凸集的交集，将问题转换为对集合的投影[10]，通过对投影的交替迭代加上信号的先验信息来解决该问题[11] [12]。常用的先验信息包括非负、支持域和稀疏性[13]。但传统的相位恢复算法对于去噪并不鲁棒。深度学习[14]方法近年来得到了快速发展，并应用于图像处理领域，是从大量数据训练中学习先验知识，将其泛化为参数表达，应用于恢复图像，有着良好的重构能力和去噪性能，如 DnCNN、IRCNN 等算法，但当观测模型改变或者噪声强度改变时，需要重新训练，费时且费力。即插即用算法[15] [16]是将去噪器插入优化算法[17]，结合了传统优化算法的理论保证与去噪器的去噪性，将图像去噪作为先验信息来进行相位恢复。将去噪算子加入图像的先验，如 PnPADMM [18] [19] [20] [21] [22]，PnPLADMM [23] [24]算法，使去噪更加鲁棒，但对于重构能力仍有欠缺。

对于存在的相位恢复算法，本文采用共识均衡方法进行相位恢复，将采用即插即用方法，将多个去噪器插入迭代算法中同时去噪，并使其达到均衡，同时结合深度学习算法，即 DnCNN 算法去噪，提高去噪能力，并展示在去噪强度不同和去噪器不同的情况下，所提的共识均衡相位恢复算法的图像重构能力，并展示了其收敛性。

## 2. 方法

### 2.1. 相位恢复模型

相位恢复是一个典型的非凸问题，因此求解该问题是逆向思维的过程，具有一定的挑战性。用一维离散向量  $x \in C^n$  来表示待恢复信号，通过已知的采样向量  $a_i \in C^n$  得到信号的测量值  $y$ ，信号的测量值不包含相位，因次用模值或者模值的平方来表示幅值或者强度测量值，理想无噪声情况下，相位恢复的目标是求解  $y = |Ax|$  或  $y = |Ax|^2$  来获取原始信号  $x$  丢失的相位信息，其中采样矩阵  $A^T = [a_1, a_2, \dots, a_m] \in C^{n \times m}$  表示离散傅里叶变换，测量值  $y^T = [y_1, y_2, \dots, y_m] \in C^{1 \times m}$  表示傅里叶变换幅值数据。在噪声情况下，相位恢复的另一种表达方式是： $y = |Ax| + \varepsilon$ ， $\varepsilon$  表示噪声。那么求解相位恢复问题，可以看作是是一个非凸优化问题，即

$$\begin{aligned} & \text{find } x \\ & \text{s.t. } y = |Ax|, x \in P(x) \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $p(x)$  是先验信息，该问题可以转化为求解： $x = \arg \min_x f(x) + \lambda g(x)$ ，其中  $f(x) = 1/2 \|y - |Ax|\|_2^2$  是数

据保真项,  $g(x)$  是去噪正则项,  $\lambda$  表示的是参数,  $\lambda$  的大小用于权衡噪声的大小。

## 2.2. 即插即用 ADMM 相位恢复

在相位恢复中, 由于受到噪声污染的问题, 测得的数据  $y$  中含有噪声, 估计原始信号的过程可以用最大后验概率(MAP)来描述:

$$x = \arg \max_x p(x|y) = \arg \max_x \left( \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \right) \quad (2)$$

由于  $y$  已知,  $p(y)$  已知, 再引入对数似然, 将目标函数转化为  $x = \arg \min_x \{f(x) + \lambda g(x)\}$  其中,  $f(x) = -\log p(y|x)$ ,  $\lambda g(x) = -\log p(x)$ , 对目标函数进行变量分离:

$$(x, v) = \arg \min_{x, v} \{f(x) + \lambda g(v)\}, \text{ s.t. } x = v \quad (3)$$

引入拉格朗日乘子, 将优化函数表示为:

$$L(x, v, u) = f(x) + \lambda g(v) + \rho/2 \|x - v + u\|_2^2 \quad (4)$$

其中  $f(x) = \|Ax - y\|_2^2$ ,  $g(x)$  没有明确表达式, 用去噪器代替, 即更新  $v$  的过程是将去噪算子来代替近端算法求解, 该算法求解过程如下:

$$x^{k+1} = \arg \min_x f(x) + (\rho_k/2) \|x - (v^k - u^k)\|_2^2; \quad (5)$$

$$v^{k+1} = D_{\delta_k}(x^{k+1} + u^k), \quad \delta_k = \sqrt{\lambda/\rho_k}; \quad (6)$$

$$u^{k+1} = u^k + (x^{k+1} - v^{k+1}); \quad (7)$$

更新  $x$  的过程, 应用于不动点迭代, 将上述问题转化为求解:

$$x^{k+1} = \frac{1}{1+\rho} \left( A^H \left( \frac{Ax^k}{|Ax^k|} \odot y \right) + \rho(x^{k+1} + u^k) \right) \quad (8)$$

---

### 算法 1 即插即用 ADMM 相位恢复

---

输入: 观测值  $y \in \mathbb{R}^m$   $\rho_0, \lambda$ ,

初始化:  $x^0$  为 HIO 初始值

for  $k=1, \dots, N$

$$x^{k+1} = \frac{1}{1+\rho} \left( A^H \left( \frac{Ax^k}{|Ax^k|} \odot y \right) + \rho(x^{k+1} + u^k) \right)$$

$$v^{k+1} = D_{\delta_k}(x^{k+1} + u^k), \quad \delta_k = \sqrt{\lambda/\rho_k};$$

$$u^{k+1} = u^k + (x^{k+1} - v^{k+1});$$

end

输出  $x^{k+1}$

---

## 3. 共识均衡相位恢复

共识均衡(Consensus Equilibrium, CE) [25] [26] [27] 是旨在利用迭代求解算法使不同算子达到平衡点, 类似于博弈论中的纳什均衡, 共识均衡的解决方案的显著特点是由相位恢复算子和去噪算子之间的平衡

来定义的，它的解决方案由共识向量给出，该共识向量产生于多个算子的平衡，其中可能包括各种图像处理的操作。

共识方程将基于优化算子或是去噪器嵌入其中，每一个算子代表一个平衡向量，允许多个主体参与平衡。

根据含噪声的相位恢复模型，用线性方程  $y = |Ax| + \varepsilon$  来描述，而共识均衡旨在通过求解共识找到一个估计值  $x^* \in \mathbb{R}^N$ ，类似于用极大后验方法的均衡方程： $x^* = \arg \min_x 1/2 \|y - |Ax|\|^2 - \log p(x)$ ， $p(x)$  是  $x$  的先验信息，结合即插即用的方法，引入多个去噪正则项，将目标函数转化为：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=2}^N \mu_i f_1(x_i) + \mu_i g_i(x_i) \\ \text{s.t.} \quad & x_i = x, i = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $f_1(x) = \| |Ax| - y \|_2^2$ ，权重  $\mu_i > 0, i = 1, \dots, N$ ，并且  $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1$ ， $g_i(x_i)$  没有明确表达式，用去噪器代替，在共识优化中，原始代价函数的最小化被重新表述为辅助函数和的最小化，每个辅助函数都是一个独立变量的函数，约束是独立变量共享一个公共值，将  $f_1(x)$  与  $g_i(x_i)$  合并为  $f_i(x)$ ， $f_1(x)$  为数据保真项  $f_i(x), i = 2, \dots, N$  为去噪项，将表达式改写为如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \mu_i f_i(x_i) \\ \text{s.t.} \quad & x_i = x, i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (10)$$

为了将共识优化框架推广到共识均衡，假设  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  为闭凸函数，定义  $N$  个向量值的映射， $F_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N$ ，其中每一个  $F_i$  都是近端映射：

$$F_i(x) = \arg \min_v \left\{ f_i(x) + \frac{1}{2\sigma_i^2} \|v - x\|^2 \right\} \quad (11)$$

由优化问题对应的拉格朗日函数为：

$$L(x, (x_i)_{i=1}^N, (\lambda_i)_{i=1}^N, (\beta_i)_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N \left( \mu_i f_i(x_i) + \lambda_i^T (x - x_i) + \frac{1}{2\sigma_i^2} \|x - x_i\|^2 \right) \quad (12)$$

整理可得：

$$L(x, (x_i)_{i=1}^N, (u_i)_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N \left( \mu_i f_i(x_i) + \frac{1}{2\sigma_i^2} \|x - x_i + u_i\|^2 \right) \quad (13)$$

其中  $u_i = \sigma_i^2 \lambda_i$ ，最优解由上式的拉格朗日函数的 KKT 条件求得最优解  $(x^*, u^*)$ ，得到共识方程为：

$$\begin{aligned} F(x^* + u^*) &= x^* \\ \overline{u_\mu^*} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

解 CE 方程首先写为无约束的方程组，然后用不动点的形式来表示解，首先定义如下概念：

$$F(v) = \begin{pmatrix} F_1(v_1) \\ \vdots \\ F_N(v_N) \end{pmatrix} \text{ and } G_\mu(v) = \begin{pmatrix} \overline{v_\mu} \\ \vdots \\ \overline{v_\mu} \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中  $G_\mu$  是重新分配向量分量的加权平均值，向量  $\overline{v_\mu} = \sum_{i=1}^N \mu_i v_i$  在每个输出分量上给出。利用  $(x^*, u^*)$  为最优解，得到 CE 方程的解满足  $(2G_\mu - I)(2F - I)v^* = v^*$ ，当  $F$  为近端映射时， $2F - I$  被称为反射解，与交替投影迭代中 HPR 和 RAAR 算法的反射映射有着密切联系，都利用了 Douglas-Rachford 算法，但这里的形

式并不同，因为反射器并行进行，然后取平均，不是标准的顺序形式。定义  $T = (2G_\mu - I)(2F - I)$ ，使用迭代找到  $T$  的一个不动点，应用非扩张算子的 Mann 迭代可得 CE 方程的迭代公式，它的形式为：

$$v^{k+1} = (1 - \beta)v^k + \beta T(v^k) \quad (16)$$

共识方程是 ADMM 的推广，在  $F$  和  $G$  都是近端映射的最小化背景下，在  $\beta = 0.5$ ， $N = 2$  时，迭代是标准的 ADMM 算法。

根据定义， $F_1(v_1)$  的近端映射如下：

$$F_1(x) = \arg \min_v \left\{ \frac{1}{2} \|y - Ax\|^2 + \frac{1}{2\sigma_1^2} \|x - v_1\|^2 \right\} \quad (17)$$

求解  $F_1(x)$  的数值解，令  $\rho = \sigma_1^2$ ，应用于不动点迭代转化为如下数值解：

$$F_1(v_1) = \frac{1}{1 + \rho} \left( \rho A^H \left( \frac{Ax^k}{|Ax^k|} \odot y \right) + v_1^k \right) \quad (18)$$

$F_i(v_i), i = 2, \dots, N$  的近端映射如下：

$$F_i(x) = \arg \min_v \left\{ f_i(x) + \frac{1}{2\sigma_i^2} \|x - v_i\|^2 \right\}, i = 2, \dots, N \quad (19)$$

$F_i(v_i), i = 2, \dots, N$  表示的是  $N-1$  个代理，用去噪器代替，可以写为： $F_i(v_i) = D_{\sigma_i}(v_i)$ ， $\sigma_i$  为不同的去噪强度。

---

#### 算法 2 基于共识均衡的相位恢复

---

输入：观测值  $y \in R^m$

初始化： $v^0$  随机

for  $k = 1, \dots, N$

$$F(v) = \begin{bmatrix} F_1(v_1) \\ F_2(v_2) \\ \vdots \\ F_N(v_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \rho} \left( \rho A^H \left( \frac{Ax^k}{|Ax^k|} \odot y \right) + v_1^k \right) \\ D_{\sigma_2}(v_2) \\ \vdots \\ D_{\sigma_i}(v_N) \end{bmatrix}, \quad G_\mu(v) = \begin{bmatrix} \bar{v}_\mu \\ \bar{v}_\mu \\ \vdots \\ \bar{v}_\mu \end{bmatrix}$$

$$T = (2G_\mu - I)(2F - I)$$

$$v^{k+1} = (1 - \beta)v^k + \beta T(v^k)$$

$$x^{k+1} = \bar{v}^{k+1}$$

end

输出  $x^{k+1}$

---

为了使算法更能适应数据，我们使用权重  $\mu_i = p_i / \sum_{i=1}^N p_i$  其中

$$p_i = \exp \left\{ - \left( \sigma_\eta - \sigma_i \right)^2 / 2h^2 \right\}, i = 2, \dots, N, h = 5/255 \quad (20)$$

$$p_1 = \sum_{i=2}^N p_i$$

$p_i$  是实际的噪声水平  $\sigma_\eta$  和去噪器的去噪强度  $\sigma_i$  之间的偏差，并根据偏差计算去噪器之间的权重，从而适应在似然和去噪之间的平衡。

## 4. 实验结果与分析

### 4.1. 实验设备和数据

本文利用仿真数据对所提的共识均衡相位恢复算法开展实验，对比了在不同噪声强度，不同去噪器情况下的表现，去噪器我们结合了 DnCNN (卷积神经网络)，BM3D (块匹配分组)，TV (全变分)，NLM (非局部均值)，Bilateral (双边滤波)等，本文对比了 HIO，即插即用 ADMM，所有算法使用 matlab2022a 进行仿真模拟实验，本文用六组测试图像 House256、Man512、Art512、Boat512、Couple512、Starfish256，测试图像如图 1 所示：



Figure 1. Images used for testing in the experiment

图 1. 实验中用于测试的图像

### 4.2. 算法的性能

共识均衡的收敛性由图 2 给出，蓝线是五个不同去噪器去噪的信噪比情况，红线表示的是共识均衡的信噪比情况，黑线表示的是相位恢复情况，由图可以看出随着迭代次数的逐渐增加，信噪比达到了收敛。

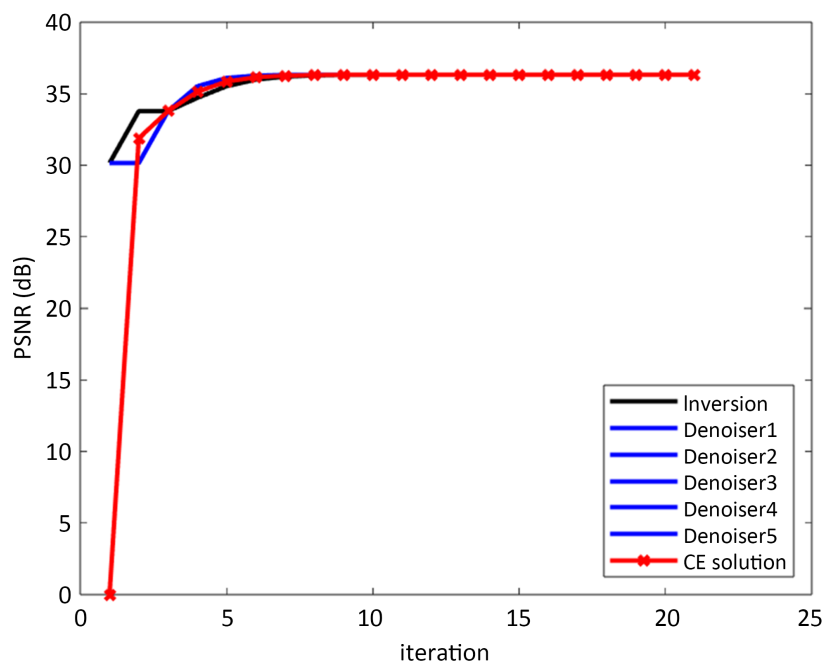


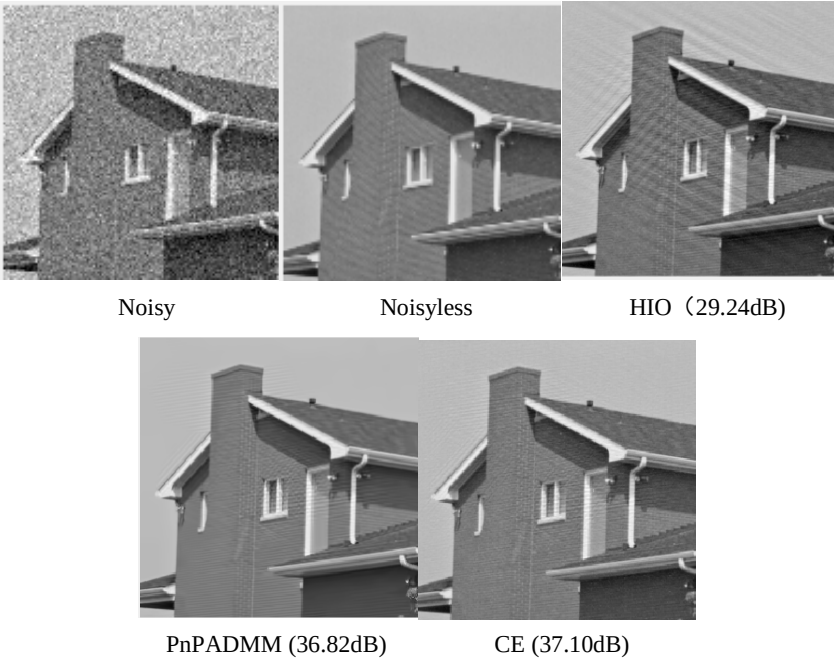
Figure 2. Convergence of consensus equilibrium

图 2. 共识均衡的收敛性

### 4.3. 实验结果与分析

为了测试共识均衡算法的重构能力和去噪鲁棒性，针对 House256、Man512、Art512、Boat512、

Couple512、starfish256 等 6 副图片做了仿真实验，添加高斯噪声模拟观测数据含噪声，该算法将利用 HIO 算法作预处理，提高了收敛速度，并与传统的相位恢复算法 HIO，即插即用 ADMM 相位恢复作比较。  
图 3 是 House256 在加噪声情况下不同算法下的重构图对比：



**Figure 3.** Reconstructed image and peak signal-to-noise ratio of House256 under  $\sigma = 20/255$  Gaussian noise intensity

**图 3.** House256 在强度为  $\sigma = 20/255$  高斯噪声下重构图像和峰值信噪比

图 3 所有算法都能看出恢复的图像是房子，但 HIO 能明显看出有噪声和波纹，峰值信噪比可以达到 29.24 dB，PnPADMM 能明显去噪，噪声波纹消失，但过于平滑，掩盖了一些细节，峰值信噪比为 26.82 dB。CE 去噪效果显著且保留了图像的细节，峰值信噪比最高可以达到 37.10 dB。

表 1 对比了不同图像在 HIO、PnPADMM、CE 算法下相位恢复算法的重构能力，共识均衡是由五个去噪器的组合，本文比较了不同去噪强度、不同去噪器的多个共识均衡，具体详见表 2，CE 取多个均衡中的最优值。为了比较图像的质量，使用 PSNR(峰值信噪比)来比较原图像和恢复图像的误差，信噪比越大，代表图像恢复效果越好，单位是 dB。

**Table 1.** Comparison of image denoising PSNR of different algorithms under different noise intensity  
**表 1.** 不同算法在不同噪声强度下的各算法的图像去噪 PSNR 比较

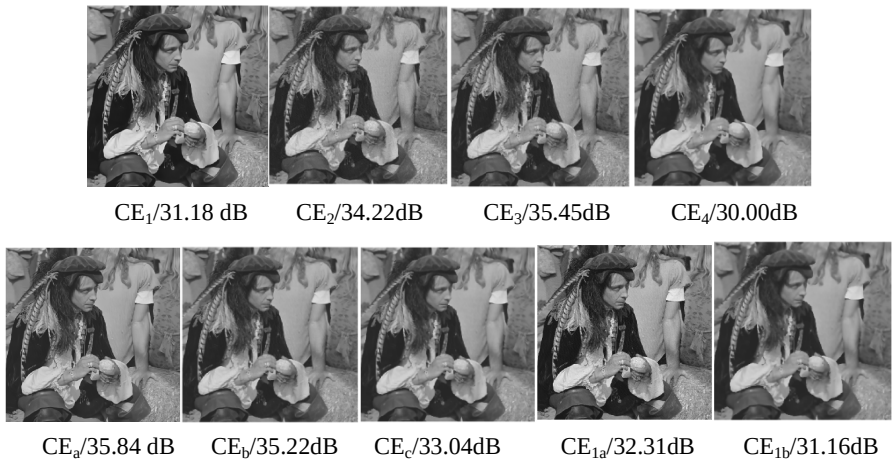
| 噪声水平              | 图像          | HIO   | PnPADMM | CE           |
|-------------------|-------------|-------|---------|--------------|
| $\sigma = 20/255$ | House256    | 29.24 | 36.32   | <b>37.10</b> |
|                   | Man512      | 29.02 | 34.77   | <b>35.84</b> |
|                   | Art512      | 20.98 | 32.67   | <b>33.66</b> |
|                   | Boat512     | 24.61 | 27.12   | <b>28.17</b> |
|                   | Couple512   | 24.59 | 26.53   | <b>27.06</b> |
|                   | Starfish256 | 24.90 | 29.38   | <b>30.44</b> |



续表

|                   |             |       |       |              |
|-------------------|-------------|-------|-------|--------------|
| $\sigma = 30/255$ | House256    | 29.31 | 33.46 | <b>34.55</b> |
|                   | Man512      | 28.17 | 32.12 | <b>33.26</b> |
|                   | Art512      | 22.78 | 31.46 | <b>32.20</b> |
|                   | Boat512     | 22.98 | 25.89 | <b>26.70</b> |
|                   | Couple512   | 28.86 | 30.50 | <b>31.49</b> |
|                   | Starfish256 | 24.47 | 29.93 | <b>31.18</b> |
| $\sigma = 40/255$ | House256    | 27.39 | 29.90 | <b>30.60</b> |
|                   | Man512      | 28.56 | 32.38 | <b>33.25</b> |
|                   | Art512      | 21.26 | 32.14 | <b>32.99</b> |
|                   | Boat512     | 19.34 | 20.30 | <b>21.23</b> |
|                   | Couple512   | 12.08 | 24.65 | <b>25.32</b> |
|                   | Starfish256 | 25.35 | 29.28 | <b>30.32</b> |

由表 1 可以明显比较出共识均衡的信噪比最高，即插即用 ADMM 次之，HIO 最低，且随着噪声强度的增加，图像的信噪比逐渐减小。为了比较 CE 在不同去噪器和不同去噪水平下的效果，本文设置了 9 组不同的共识均衡，以图像的噪声强度为  $\sigma = 20/255$  为例，其中 CE1、CE2、CE3、CE4 分别是同在 DnCNN，BM3D，TV，NLM 去噪器下，但在五种不同噪声水平下训练： $\sigma_1 = 10/255$ ， $\sigma_2 = 15/255$ ， $\sigma_3 = 25/255$ ， $\sigma_4 = 35/255$ ， $\sigma_5 = 50/255$ ，即在不同噪声水平下均衡，CE<sub>a</sub>，CE<sub>b</sub> 是在去噪水平均为  $\sigma = 10/255$  情况下，改变去噪器，使 CE<sub>a</sub> 为 DnCNN 与 BM3D、TV 混合，CE<sub>b</sub> 在 BM3D、TV、Bilateral、NLM 混合的使用情况下来训练图像，CE<sub>c</sub> 是在与 CE<sub>b</sub> 去噪器一样的情况下，去噪强度均为  $\sigma = 20/255$ ，即通过不同去噪器来实现均衡，CE<sub>1a</sub>，CE<sub>1b</sub> 是在不同去噪器、不同去噪水平下的图像均衡，五种噪声水平与 CE<sub>1</sub> 的一样，CE<sub>1a</sub> 五种去噪器与 CE<sub>a</sub> 的一样，CE<sub>1b</sub> 五种去噪器与 CE<sub>b</sub> 的一样，图 4 展示了 Man512 在不同共识均衡下的信噪比：



**Figure 4.** Peak signal-to-noise ratio of Man512 under different consensus equilibria  
**图 4.** Man512 在不同共识均衡下的峰值信噪比

下表展示了各个算法峰值信噪比：

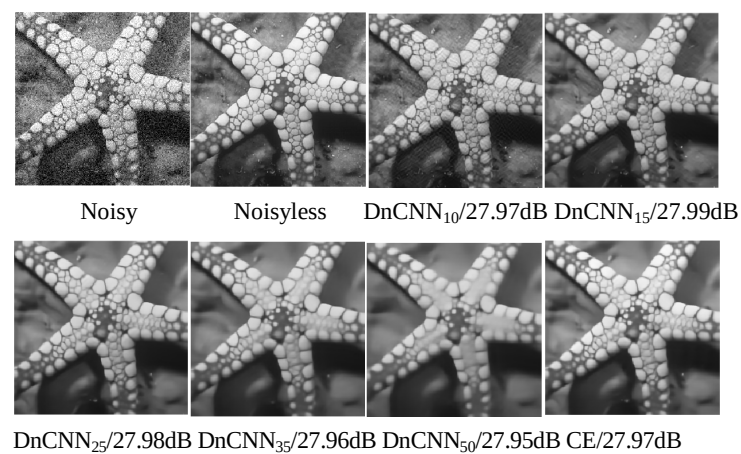


**Table 2.** PSNR comparison of different images under different CE  
**表 2.** 不同图像在不同 CE 下的 PSNR 比较

| 图像          | CE <sub>1</sub> | CE <sub>2</sub> | CE <sub>3</sub> | CE <sub>4</sub> | CE <sub>a</sub> | CE <sub>b</sub> | CE <sub>c</sub> | CE <sub>1a</sub> | CE <sub>1b</sub> |
|-------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| House256    | 33.93           | 36.23           | <b>37.10</b>    | 33.53           | 36.74           | 36.88           | 35.37           | 34.41            | 33.53            |
| Man512      | 31.18           | 34.22           | 35.45           | 30.00           | <b>35.84</b>    | 35.22           | 33.04           | 32.31            | 31.16            |
| Art512      | 32.02           | 30.94           | 32.76           | 31.61           | 32.46           | 33.30           | 33.52           | 31.91            | <b>33.66</b>     |
| Boat512     | 27.90           | 27.12           | 27.51           | <b>28.17</b>    | 27.75           | 27.84           | 28.12           | 27.92            | 27.79            |
| Couple512   | 26.57           | 26.44           | 26.74           | 26.31           | 26.92           | 27.02           | <b>27.06</b>    | 26.78            | 26.62            |
| Starfish256 | 30.03           | 29.15           | 29.86           | 29.25           | 29.98           | 30.35           | <b>30.44</b>    | 27.95            | 29.45            |

通过对于上表对于各均衡的信噪比较，综合对 CE<sub>1</sub>、CE<sub>2</sub>、CE<sub>3</sub>、CE<sub>4</sub> 相同去噪强度来看，TV 去噪器去噪效果明显，对相同去噪强度下，对比去噪器的混合 CE<sub>a</sub> 与 CE<sub>b</sub>，可以看出去噪器的混合对信噪比影响不大，一般情况下，CE<sub>b</sub> 比 CE<sub>a</sub> 好，BM3D、TV、Bilateral、NLM 优于 DnCNN 与 BM3D，TV 混合去噪器，通过 E<sub>b</sub> 和 CE<sub>c</sub> 发现信噪比差距并不大，这是由于各去噪器之间的权重是根据图像的噪声水平与去噪器的噪声水平之间偏差来似然估计的，在去噪强度不变的情况下，去噪器之间的权重不变，这时去噪器之间的均衡是各去噪器之间的均值，混合去噪器是集众去噪器优势，双边滤波能够很好保存图像的边缘信息，突出物体的轮廓和边缘特征；非均值滤波基于块匹配，能够保留较强的纹理细节，但弱的纹理细节被滤掉了，例如 Art512 这类低对比度和均匀纹理的处理效果不佳；TV 去噪对图像进行平滑，但对于图像边缘不怎么平滑；BM3D 能够恢复较多的细节，DnCNN 在特定的噪声水平对高斯噪声去噪较好。通过对比 CE<sub>1a</sub> 和 CE<sub>1</sub> 发现，去噪强度一样，则去噪器之间的权重相同的情况下，混合去噪器比单个去噪器去噪效果好。

由于 DnCNN 比最先进的 BM3D 对于特定的噪声水平更敏感，所以以 DnCNN 为例，以实际图像噪声水平为 20/255 为例作仿真实验，为了对比去噪效果有更直观的感受，图 5 是在 CE<sub>11</sub> 下五种去噪器和 CE 下的图像和信噪比：



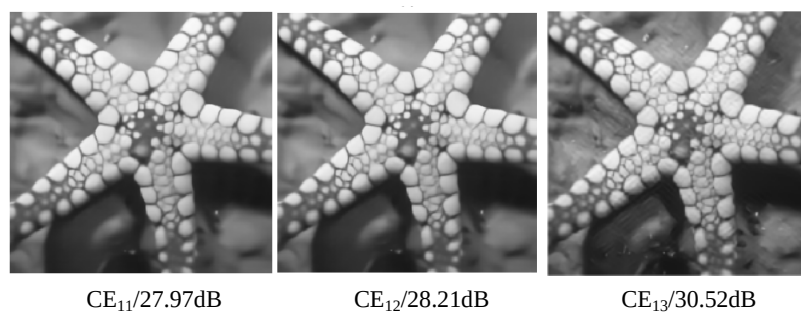
**Figure 5.** Peak signal-to-noise ratio of Starfish256 under different denoisers  
**图 5.** Starfish256 在不同去噪器下的峰值信噪比

由上图，当 DnCNN 的去噪水平为 50 时，图像过于平滑，模糊了细节，在去噪水平 15 和 25 时信噪比最高，故缩小去噪水平的范围，设定下面三组对比实验，实验结果如下表：

**Table 3.** PSNR comparison of different images under different denoising levels  
**表 3.** 不同图像在不同去噪水平的去噪器下的 PSNR 比较

| 图像               | D1                  | D2                  | D3                  | D4                  | D5                  | CE           |
|------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------|
| CE <sub>11</sub> | DnCNN <sub>10</sub> | DnCNN <sub>15</sub> | DnCNN <sub>25</sub> | DnCNN <sub>35</sub> | DnCNN <sub>50</sub> |              |
| House256         | 33.96               | <b>34.00</b>        | 33.88               | 33.90               | 33.90               | 33.93        |
| Art512           | 32.02               | 32.00               | 32.03               | <b>32.04</b>        | 31.76               | 31.64        |
| Man512           | <b>30.97</b>        | 30.87               | 30.72               | 30.44               | 30.11               | 31.18        |
| Couple512        | 26.57               | <b>26.58</b>        | 26.57               | <b>26.58</b>        | 26.50               | 26.57        |
| Starfish256      | 27.97               | <b>27.99</b>        | 27.98               | 27.96               | 27.95               | 27.97        |
| CE <sub>12</sub> | DnCNN <sub>10</sub> | DnCNN <sub>15</sub> | DnCNN <sub>20</sub> | DnCNN <sub>25</sub> | DnCNN <sub>35</sub> |              |
| House256         | 34.31               | <b>34.34</b>        | <b>34.34</b>        | 34.24               | 34.16               | 34.30        |
| Art512           | <b>32.00</b>        | <b>32.00</b>        | <b>32.00</b>        | 31.99               | 31.89               | <b>32.00</b> |
| Man512           | <b>31.44</b>        | <b>31.44</b>        | <b>31.44</b>        | 31.41               | 31.15               | 31.43        |
| Couple512        | 27.60               | <b>27.64</b>        | <b>27.64</b>        | 27.56               | 27.56               | 27.57        |
| Starfish256      | 28.21               | <b>28.23</b>        | <b>28.23</b>        | 28.22               | 28.20               | 28.21        |
| CE <sub>13</sub> | DnCNN <sub>10</sub> | DnCNN <sub>14</sub> | DnCNN <sub>16</sub> | DnCNN <sub>18</sub> | DnCNN <sub>20</sub> |              |
| House256         | <b>34.75</b>        | 34.70               | 34.70               | 34.70               | 34.70               | <b>34.70</b> |
| Art512           | <b>31.68</b>        | 31.66               | 31.66               | 31.66               | 31.66               | 31.68        |
| Man512           | <b>32.45</b>        | 32.35               | 32.35               | 32.35               | 32.35               | <b>32.35</b> |
| Couple512        | <b>28.90</b>        | 28.78               | 28.78               | 28.78               | 28.78               | <b>29.11</b> |
| Starfish256      | <b>30.54</b>        | 30.52               | 30.52               | 30.52               | 30.52               | <b>30.52</b> |

通过表 3 信噪比的比较, 在仿真实验中当模拟噪声强度为 20/255 时, CE<sub>11</sub> 设置了 10/255 到 50/255 五组去噪水平, 在五个不同训练水平中, 10/255 到 35/255 范围内信噪比高, 取 10/255 到 35/255 范围重新设置信噪比水平作为 CE<sub>12</sub>, 再取信噪比较高的 10/255 到 20/255 范围设置新的均衡 CE<sub>13</sub>, 由此看出 CE<sub>13</sub> 信噪比最高, CE<sub>12</sub> 信噪比居中, CE<sub>11</sub> 信噪比最低, 为了更直观感受信噪比提高, 如图 6:



**Figure 6.** Peak signal-to-noise ratio of Starfish256 under different consensus equilibria  
**图 6.** Starfish256 在不同共识均衡下的峰值信噪比

由此可以看出 CE<sub>13</sub> 去噪效果最好, 而 CE<sub>13</sub> 的噪声区间最接近模拟噪声, 说明越接近实际噪声水平时, 信噪比越高, 去噪器的去噪水平越高, 反之, 去噪器的去噪程度过大, 图像越平滑, 淹没了细节, 共识均衡后的结果越差。如果去噪器的去噪水平低, 图像也并不能完全去噪, 在接近实际噪声的水平范围内

去噪效果最好。

## 5. 结束语

本文中, 我们基于共识均衡的思想求解相位恢复问题, 并将 DnCNN、BM3D、TV 等优秀的去噪算子引入正则项解决去噪问题。共识均衡是基于一组平衡数据拟合和规则性平衡方程的解, 共识均衡方法可以解决没有相应的正则化优化的问题, 特别是我们展示了如何使用共识均衡来集成多个不同强度、不同去噪器之间的均衡。使用共识均衡不仅解决了相位恢复问题, 更是对于有着不同去噪水平、不同去噪器之间的去噪均衡, 使得在视觉效果和峰值信噪比上都略胜一筹。

在本文实验结果部分我们给出了共识均衡的算法收敛性。接下来我们将用共识均衡框架来解决图像去噪问题, 我们和即插即用 ADMM 的作比较。通过比较, 我们发现共识均衡比即插即用 ADMM 的效果要好, 且在不同去噪水平和去噪器下, 去噪的信噪比也各有差异, 混合各种去噪器的类型可以集众多去噪器的优点, 规避缺点, 且越接近实际噪声水平的范围, 图像去噪效果越好。但在实际情况下, 大多数情况下并不能知道待恢复图像的噪声水平, 利用共识均衡比较去噪器的去噪效果来缩小噪声水平的范围, 预估噪声水平的范围, 利用共识均衡盲去噪的问题亟待解决, 且将共识均衡应用于图像去模糊、图像修复、图像超分辨率等问题上是我们研究的目标。

## 参考文献

- [1] Gerchberg, R.W. (1972) A Practical Algorithm for the Determination of Plane from Image and Diffraction Pictures. *Optik*, **35**, 237-246.
- [2] Peer, T., Welker, S. and Gerkmann, T. (2022) Beyond Griffin-Lim: Improved Iterative Phase Retrieval for Speech. 2022 *International Workshop on Acoustic Signal Enhancement (IWAENC)*, 5-8 September 2022, Bamberg, 1-5. <https://doi.org/10.1109/IWAENC53105.2022.9914686>
- [3] Dainty, J.C. and Fienup, J.R. (1987) Phase Retrieval and Image Reconstruction for Astronomy. In: Jörgensen, C., Ed., *Image Retrieval: Theory & Application*, Academic Press, Cambridge, MA, 231-275.
- [4] Fienup, J.R. (1993) Phase-Retrieval Algorithms for a Complicated Optical System. *Applied Optics*, **32**, 1737-1746. <https://doi.org/10.1364/AO.32.001737>
- [5] Fienup, J.R. (1982) Phase Retrieval Algorithms: A Comparison. *Applied Optics*, **21**, 2758-2769. <https://doi.org/10.1364/AO.21.002758>
- [6] Elser, V., Rankenburg, I. and Thibault, P. (2007) From the Cover: Searching with Iterated Maps. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **104**, 418-423. <https://doi.org/10.1073/pnas.0606359104>
- [7] Cahill, J., Casazza, P.G., Peterson, J., et al. (2013) Phase Retrieval by Projections. arXiv:1305.6226
- [8] Bauschke, H.H., Combettes, P.L. and Luke, D.R. (2002) Phase Retrieval, Error Reduction Algorithm, and Fienup Variants: A View from Convex Optimization. *Journal of the Optical Society of America A*, **19**, 1334-1345. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.19.001334>
- [9] Luke, D.R. (2004) Relaxed Averaged Alternating Reflections for Diffraction Imaging. *Inverse Problems*, **21**, 37-50. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/1/004>
- [10] Marchesini, S. (2007) Invited Article: A Unified Evaluation of Iterative Projection Algorithms for Phase Retrieval. *Review of Scientific Instruments*, **78**, 229-261. <https://doi.org/10.1063/1.2403783>
- [11] Wen, Z., Yang, C., Liu, X. and Marchesini, S. (2012) Alternating Direction Methods for Classical and Ptychographic Phase Retrieval. *Inverse Problems*, **28**, Article 115010. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/11/115010>
- [12] Netrapalli, P., Jain, P. and Sanghavi, S. (2015) Phase Retrieval Using Alternating Minimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **63**, 4814-4826. <https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2448516>
- [13] Wang, Y. and Xu, Z. (2014) Phase Retrieval for Sparse Signals. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **37**, 531-544. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2014.04.001>
- [14] Manekar, R., Zhuang, Z., Tayal, K., et al. (2020) Deep Learning Initialized Phase Retrieval. *Proceedings of the 34th Conference on Neural Information Processing Systems*, Vancouver, 6-12 December 2020, 1-7.
- [15] Venkatakrishnan, S.V., Bouman, C.A. and Wohlberg, B. (2013) Plug-and-Play Priors for Model Based Reconstruction.

- 2013 *IEEE Global Conference on Signal and Information Processing*, Austin, 3-5 December 2013, 945-948.  
<https://doi.org/10.1109/GlobalSIP.2013.6737048>
- [16] Zhang, K., Zuo, W. and Zhang, L. (2019) Deep Plug-and-Play Super-Resolution for Arbitrary Blur Kernels. 2019 *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Long Beach, 15-20 June 2019, 1671-1681.  
<https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00177>
  - [17] Romano, Y., Elad, M. and Milanfar, P. (2017) The Little Engine That Could: Regularization by Denoising (RED). *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **10**, 1804-1844. <https://doi.org/10.1137/16M1102884>
  - [18] Chan, S.H., Wang, X. and Elgendy, O.A. (2016) Plug-and-Play ADMM for Image Restoration: Fixed-Point Convergence and Applications. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, **3**, 84-98.  
<https://doi.org/10.1109/TCI.2016.2629286>
  - [19] Cai, X.J., Gu, G.Y., He, B.S., et al. (2013) A Proximal Point Algorithm Revisit on the Alternating Direction Method of Multipliers. *Science China Mathematics*, **56**, 2179-2186. <https://doi.org/10.1007/s11425-013-4683-0>
  - [20] Tang, J. and Davies, M. (2020) A Fast Stochastic Plug-and-Play ADMM for Imaging Inverse Problems. arXiv: 2006.11630.
  - [21] Ryu, E., Liu, J., Wang, S., et al. (2019) Plug-and-Play Methods Provably Converge with Properly Trained Denoisers. *Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning*, Long Beach, 9-15 June 2019, 5546-5557.
  - [22] Pendu, M.L. and Guillemot, C. (2023) Preconditioned Plug-and-Play ADMM with Locally Adjustable Denoiser for Image Restoration. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **16**, 393-422. <https://doi.org/10.1137/22M1504809>
  - [23] Laroche, C., Almansa, A., Coup  t  , E., et al. (2023) Provably Convergent Plug & Play Linearized ADMM, Applied to Deblurring Spatially Varying Kernels. *ICASSP 2023-2023 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Rhodes Island, 4-10 June 2023, 1-5.  
<https://doi.org/10.1109/ICASSP49357.2023.10096037>
  - [24] He, B., Ma, F. and Yuan, X. (2020) Optimally Linearizing the Alternating Direction Method of Multipliers for Convex Programming. *Computational Optimization and Applications*, **75**, 361-388.  
<https://doi.org/10.1007/s10589-019-00152-3>
  - [25] Wang, X., Juang, J. and Chan, S.H. (2020) Automatic Foreground Extraction from Imperfect Backgrounds Using Multi-Agent Consensus Equilibrium. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, **72**, Article 102907.  
<https://doi.org/10.1016/j.jvcir.2020.102907>
  - [26] Buzzard, G.T., Chan, S.H., Sreehari, S., et al. (2018) Plug-and-Play Unplugged: Optimization-Free Reconstruction Using Consensus Equilibrium. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **11**, 2001-2020.  
<https://doi.org/10.1137/17M1122451>
  - [27] 柴鸿翔. 基于非凸优化与深度学习的相位恢复算法研究[D]: [硕士学位论文]. 秦皇岛: 燕山大学, 2021.