

# 时滞在线社交网络谣言传播模型的动力学分析

沈文涛

南京航空航天大学数学学院, 江苏 南京

收稿日期: 2024年5月21日; 录用日期: 2024年6月15日; 发布日期: 2024年6月24日

## 摘要

本文考虑了在谣言传播过程中, 政府干预带来的时滞效应, 建立了时滞在线社交网络谣言传播模型。运用常微分方程稳定性的相关知识讨论了正平衡点 $E^*$ 的存在性以及稳定性问题, 并证明得到了其发生Hopf分岔的判别条件。发现在满足相应条件下, 当时滞不超过临界值时, 正平衡点 $E^*$ 局部渐进稳定, 当超出临界值时, 正平衡点 $E^*$ 将由稳定变为不稳定。最后, 通过数值来仿真模拟正平衡点的局部稳定性, 并验证理论的正确性。

## 关键词

在线社交网络, 稳定性, 时滞, Hopf分岔

# Dynamic Analysis of Rumor Propagation Model in Online Social Networks with Time Delay

Wentao Shen

College of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

Received: May 21<sup>st</sup>, 2024; accepted: Jun. 15<sup>th</sup>, 2024; published: Jun. 24<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

This paper considers the time delay effect brought by government intervention in the process of rumor propagation and establishes a time-delayed online social network rumor propagation model. By using knowledge related to the stability of ordinary differential equations, the existence

and stability of the positive equilibrium point are discussed, and the discriminant conditions for Hopf bifurcation are proved. It is found that under the corresponding conditions, when the time delay does not exceed the critical value, the positive equilibrium point is locally asymptotically stable, and when it exceeds the critical value, the positive equilibrium point changes from stable to unstable. Finally, numerical simulations are conducted to verify the local stability of the positive equilibrium point and validate the correctness of the theory.

## Keywords

Online Social Networks, Stability, Time-Delay, Hopf Bifurcation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

一直以来, 谣言伴随着媒介传播于社会当中。随着大数据时代的到来, 谣言的传播形式已经从口口相传发展成通过社交网络如微信, 微博, 抖音等平台迅速扩散。在互联网的助力下, 谣言的传播速度愈发迅猛, 潜在危害也在不断升级, 给我们的生活带来了极大的负面影响。因此, 对社交网络谣言的研究是非常必要且有意义的。

对于谣言的传播动力学模型, 最早由 Daley 和 Kendall 两人开始研究[1]。他们将人群分为无知者, 传播者和遏制者三类, 并提出了随机谣言传播模型(DK 模型)。Zanette 等人基于这一模型, 深入探究了复杂网络上的谣言传播行为[2]。在 DK 模型的基础上, Maki 和 Thomson 假设其中的两名传播者相接触时, 一方会停止传播谣言, 并把这样改进得到的模型称为 MT 模型[3]。借助此模型, Xiao 等人进一步纳入了反谣言信息和用户心理因素, 构建了更为精细的谣言传播模型[4], 为相关研究提供了坚实的理论基础。此后, Zhang 等人在谣言传播过程中加入真实信息的传播者, 建立了 SITR 谣言传播模型[5]。Yao 等人考虑了谣言传播者的顽固性, 基于传统的 SIR 传播模型建立了 SDILR 模型, 探讨了网络上重复散布谣言的现象[6]。Zhao 等人建立了社交网络谣言传播的 SI 模型, 借助模型考虑了遗忘机制对谣言传播的影响, 并探讨了平衡点的稳定性[7]。Hu 等人进一步讨论了人们不同的态度对于谣言传播的影响情况[8]。

2018 年, Chen 等人考虑到政府控制、个人兴趣、自我识别能力等因素在谣言传播中的作用, 并基于此建立了一类新的社交网络谣言传播模型[9]。他们不仅运用常微分方程稳定性的相关知识讨论了边界平衡点和正平衡点的稳定性, 还通过数值仿真去验证理论的正确性。

然而, 值得注意的是, 这一领域内的多数研究都没有考虑到谣言传播过程中普遍存在的时滞效应。2022 年, Zhu 等人研究了具有时滞效应的谣言传播模型, 并讨论了平衡点的稳定性以及 Hopf 分岔情况[10]。本文在 Chen 等人的研究基础上, 进一步扩展模型, 以包含时滞效应这一关键因素, 我们主要研究在时滞影响下正平衡点的稳定性以及相应的 Hopf 分岔情况。通过这一动力学分析, 我们能更准确地理解谣言在社交网络中的传播机制, 为未来的研究和实践提供有力的理论支撑。

## 2. 模型改进

Chen 等人考虑到政府控制, 个人兴趣, 自我识别能力等因素, 建立的社交网络谣言传播模型如下[9]:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \frac{aI(t)}{1+bI(t)} - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{aI(t)}{1+bI(t)} + \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  分别表示  $t$  时刻谣言易感者, 传播者和恢复者的密度; 参数  $\Lambda, \alpha, \beta, \mu, \delta, r, a, b$  均为非负常数,  $\Lambda$  为新增网络谣言易感者的密度,  $\beta$  为谣言传播系数,  $\gamma$  为谣言传播者因自我识别而停止传播转化为谣言恢复者的概率,  $\mu$  为个体对网络谣言失去兴趣而移出网络平台的概率,  $a$  为政府控制参数,  $b$  为饱和系数,  $\frac{aI(t)}{1+bI(t)}$  表示政府部门对谣言传播的干预。

对于模型(1), 尽管已经考虑了政府通过发布辟谣信息来干预谣言传播, 但是在现实生活中, 谣言传播者并非能够即刻收到政府发布的辟谣信息, 同时, 即使收到这些消息, 他们也不一定能够立即作出反应。所以我们需要将时滞纳入原模型中, 用新函数  $\frac{aI(t-\tau)}{1+bI(t-\tau)}$  刻画出这种滞后。基于以上分析, 考虑政府干预带来的时滞效应, 建立了如下时滞在线社交网络谣言传播模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \frac{aI(t-\tau)}{1+bI(t-\tau)} - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{aI(t-\tau)}{1+bI(t-\tau)} + \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\tau$  为知道谣言的用户接触  $t$  时刻对谣言敏感用户的时间延迟。模型(2)的初值条件为:

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0(t) \geq 0, t \in (-\tau, 0], \\ I(t) &= I_0(t) \geq 0, t \in (-\tau, 0]. \end{aligned}$$

接下来, 我们考虑正平衡点的存在性以及稳定性。

### 3. 正平衡点存在性, 稳定性和 Hopf 分岔分析

#### 3.1. 正平衡点存在性

令系统(2)右端等于 0, 通过计算可知, 如果条件(H1)  $\beta > \max\{b\mu, (\Lambda + \mu + 2b\Lambda)\mu\}$  成立, 那么存在正平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ , 在该点处, 谣言在传播过程中同时存在谣言易感者, 谣言传播者和谣言恢复者, 其中

$$S^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, I^* = \frac{\Lambda - \mu S^*}{\beta S^*}, R^* = \frac{a\Lambda - a\mu S^*}{\mu\beta S^* + \mu b\Lambda - \mu b S^*} + \frac{\gamma\Lambda - \gamma\mu S^*}{\mu\beta S^*},$$

这里  $A = \beta(\beta - b\mu)$ ,  $B = b\beta\Lambda - \beta\gamma + b\gamma\mu - \mu\beta + b\mu^2 - a\beta$ ,  $C = -b\Lambda(\gamma + \mu)$ 。

#### 3.2. 正平衡点稳定性和 Hopf 分岔分析

现在我们开始讨论在系统(2)中正平衡点  $E^*$  的稳定性。

根据文献[9]可知, 这里仅需考虑二维系统:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \frac{aI(t-\tau)}{1+bI(t-\tau)} - \gamma I(t) - \mu I(t). \end{cases} \quad (3)$$

令  $X = S - S^*$ ,  $Y = I - I^*$ , 将平衡点  $E^*$  化为  $E_0 = (0, 0)$ , 此时系统(3)变为:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = \Lambda - \beta(X(t) + S^*)(Y(t) + I^*) - \mu(X(t) + S^*), \\ \frac{dY(t)}{dt} = \beta(X(t) + S^*)(Y(t) + I^*) - \frac{a(Y(t-\tau) + I^*)}{1+b(Y(t-\tau) + I^*)} - \gamma(Y(t) + I^*) - \mu(Y(t) + I^*). \end{cases}$$

线性化上面的系统:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = a_1 X(t) + a_2 Y(t) + a_3 Y(t-\tau), \\ \frac{dY(t)}{dt} = a_4 X(t) + a_5 Y(t) + a_6 Y(t-\tau), \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= -\beta I^* - \mu, a_2 = -\beta S^*, a_3 = 0, \\ a_4 &= \beta I^*, a_5 = \beta S^* - \gamma - \mu, a_6 = -\frac{a}{(1+bI^*)^2}. \end{aligned}$$

对于系统(4), 它在正平衡点的雅可比矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 + a_6 e^{-\lambda\tau} \end{bmatrix}.$$

则对应的特征方程为:

$$\lambda^2 - (a_1 + a_5)\lambda + a_1 a_5 - a_2 a_4 - (a_6 \lambda - a_1 a_6) e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (5)$$

对于  $\tau$  的不同情形, 我们分为以下两种情况进行讨论。

**情形 1**  $\tau = 0$ 。此时特征方程(5)变为:

$$\lambda^2 - (a_1 + a_5 + a_6)\lambda + a_1(a_5 + a_6) - a_2 a_4 = 0. \quad (6)$$

**引理 1** (Routh-Hurwitz 定理)考虑多项式方程

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

所有根具有负实部的充要条件是

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix} > 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

其中  $j > n$  时, 补充定义  $a_j = 0$ 。

根据引理 1 可知, 当  $a_1 + a_5 + a_2 < 0$  且  $a_1(a_5 + a_6) - a_2a_4 < 0$  时, 特征方程(6)的根具有负实部, 并根据稳定性的定义, 有:

**定理 1** 对于系统(3), 当  $\tau = 0$  时, 若条件(H21)  $a_1a_5 - a_2a_4 + a_1a_6 > 0$  和条件(H22)  $a_1 + a_5 + a_6 < 0$  成立, 则平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的。

**情形 2**  $\tau > 0$ , 记  $A_1 = -a_1 - a_5$ ,  $A_2 = a_1a_5 - a_2a_4$ ,  $B_1 = -a_6$ ,  $B_2 = a_1a_6$ 。则特征方程(6)变为:

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 + (B_1\lambda + B_2)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (7)$$

设  $\lambda = i\omega$  为方程(7)的一个根, 代入(7)可得

$$-\omega^2 + A_1i\omega + A_2 + (B_1i\omega + B_2)e^{-i\tau\omega} = 0.$$

利用欧拉公式, 整理得

$$-\omega^2 + A_2 + B_1\omega\sin\tau\omega + B_2\cos\tau\omega + i(A_1\omega + B_1\omega\cos\tau\omega - B_2\sin\tau\omega) = 0.$$

分离实部和虚部, 有

$$\begin{cases} -\omega^2 + A_2 + B_1\omega\sin\tau\omega + B_2\cos\tau\omega = 0, \\ A_1\omega + B_1\omega\cos\tau\omega - B_2\sin\tau\omega = 0. \end{cases} \quad (8)$$

将上面两式平方相加得:

$$\omega^4 + (A_1^2 - 2A_2 - B_1^2)\omega^2 + A_2^2 - B_2^2 = 0. \quad (9)$$

记  $A_{11} = A_1^2 - 2A_2 - B_1^2$ ,  $A_{12} = A_2^2 - B_2^2$ ,  $W = \omega^2$ 。从而方程(9)变为:

$$W^2 + A_{11}W + A_{12} = 0.$$

**引理 2** 对于方程  $W^2 + A_{11}W + A_{12} = 0$ , 有:

- 1) 当条件(H31)  $A_{11}^2 - 4A_{12} < 0$  或(H32)  $A_{11} > 0$ ,  $A_{12} > 0$  成立, 那么方程没有正实根;
- 2) 当条件(H33)  $\begin{cases} A_{11} < 0 \\ A_{11}^2 - 4A_{12} \geq 0 \end{cases}$  或(H34)  $A_{12} < 0$  成立, 那么上述方程至少有一个正实根。

**证明:** 根据一元二次方程的性质可得。

则满足条件(H33)  $\begin{cases} A_{11} < 0 \\ A_{11}^2 - 4A_{12} \geq 0 \end{cases}$  或条件(H34)  $A_{12} < 0$  时, 可设方程  $W^2 + A_{11}W + A_{12} = 0$  的一个正实根

为  $\sigma_0$ 。从而, 方程(8)有一个正实根  $\omega_0 = \sqrt{\sigma_0}$ 。

可以计算得到时滞的临界值:

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_0} \left( \arccos \frac{(B_2 - B_1A_1)\omega_0^2 - B_2A_2}{B_2^2 + B_1^2\omega_0^2} + 2k\pi \right), k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

则当  $k = 0$ , 即  $\tau = \tau_0$  时, 方程(8)有一对纯虚根  $\pm i\omega_0$ 。

下面考虑横截条件  $\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right|_{\lambda=i\omega_0}$  的符号。

特征方程(7)两边对  $\tau$  求导, 有

$$2\lambda \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} + A_1 \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} + B_1 \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} - e^{-\lambda\tau} \left( \tau \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} + \lambda \right) (B_1\lambda + B_2) = 0$$

所以, 有

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} \right)^{-1} &= \frac{2\lambda + A_1 + B_1 e^{-\lambda\tau} - \tau(B_1\lambda + B_2)e^{-\lambda\tau}}{\lambda e^{-\lambda\tau}(B_1\lambda + B_2)} \\ &= \frac{2e^{\lambda\tau}}{B_1\lambda + B_2} + \frac{A_1 e^{\lambda\tau} + B_1}{\lambda(B_1\lambda + B_2)} - \frac{\tau}{\lambda} \end{aligned}$$

那么当  $\tau = \tau_0$  时, 就有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{2e^{\lambda_0\tau_0}}{B_1\lambda_0 + B_2} \right) &= \operatorname{Re} \left( \frac{2(\cos \omega_0\tau_0 + i \sin \omega_0\tau_0)(B_2 - i\omega_0 B_1)}{B_2^2 - B_1^2\lambda_0^2} \right) \\ &= \frac{2(B_2 \cos \omega_0\tau_0 + B_1\omega_0 \sin \omega_0\tau_0)}{B_2^2 - B_1^2\lambda_0^2} \\ \operatorname{Re} \left( \frac{A_1 e^{\lambda_0\tau_0} + B_1}{\lambda_0(B_1\lambda_0 + B_2)} \right) &= \operatorname{Re} \left( \frac{A_1(\cos \omega_0\tau_0 + i \sin \omega_0\tau_0) + B_1}{\lambda_0(B_1\lambda_0 + B_2)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{(A_1 \cos \omega_0\tau_0 + iA_1 \sin \omega_0\tau_0 + B_1)(B_2 - iB_1\omega_0)}{\lambda_0(B_2^2 - B_1^2\lambda_0^2)} \right) \\ &= \frac{A_1 B_1 \omega_0 \cos \omega_0\tau_0 - A_1 B_2 \sin \omega_0\tau_0 + B_1^2 \omega_0}{-\omega_0(B_2^2 - B_1^2\lambda_0^2)} \end{aligned}$$

由(8)可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} &= \frac{2(B_2 \cos \omega_0\tau_0 + B_1\omega_0 \sin \omega_0\tau_0)}{B_2^2 - B_1^2\lambda_0^2} - \frac{A_1 B_1 \omega_0 \cos \omega_0\tau_0 - A_1 B_2 \sin \omega_0\tau_0 + B_1^2 \omega_0}{\omega_0(B_2^2 - B_1^2\lambda_0^2)} \\ &= \frac{2(\omega_0^2 - A_2) - (A_1^2 + B_1^2)}{B_2^2 + B_1^2\omega_0^2} \\ &= \frac{(2\omega_0^2 - 2A_2 - A_1^2 - B_1^2)(B_2^2 + B_1^2\omega_0^2)}{(B_2^2 + B_1^2\omega_0^2)^2} \end{aligned}$$

整理可得

$$\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right|_{\lambda=i\omega_0} = \frac{C_1\omega_0^4 + C_2\omega_0^2 + C_3}{(B_2^2 + B_1^2\omega_0^2)^2}$$

其中

$$\begin{aligned} C_1 &= 2B_1^2, \\ C_2 &= 2B_2^2 + A_1^2 B_1^2 - 2A_2 B_1^2 - B_1^4, \\ C_3 &= -2A_2 B_2^2 + A_1^2 B_2^2 - B_1^2 B_2^2. \end{aligned}$$

不难发现, 分母恒大于 0。分子记为:  $f(\omega_0) = C_1\omega_0^4 + C_2\omega_0^2 + C_3$ 。而  $\sigma_0 = \omega_0^2$ , 则有

$$f(\sigma_0) = C_1\sigma_0^2 + C_2\sigma_0 + C_3.$$

**引理 3** 对于  $f(\sigma_0) = C_1\sigma_0^2 + C_2\sigma_0 + C_3$ , 如果条件(H41)  $C_2^2 - 4C_1C_3 < 0$  或条件(H42)  $C_2^2 - 4C_1C_3 \geq 0$ ,  $\frac{-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4C_1C_3}}{2C_1} \leq 0$  成立, 那么  $f(\sigma_0) > 0$ 。

**证明：**利用二次函数的性质可得。

所以若条件(H41)  $C_2^2 - 4C_1C_3 < 0$  或条件(H42)  $C_2^2 - 4C_1C_3 \geq 0$ ,  $\frac{-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4C_1C_3}}{2C_1} \leq 0$ , 则

$$\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right|_{\lambda=i\omega_0} > 0.$$

综上, 结合定理 1 和引理 2, 3, 我们可以得到下面的结论:

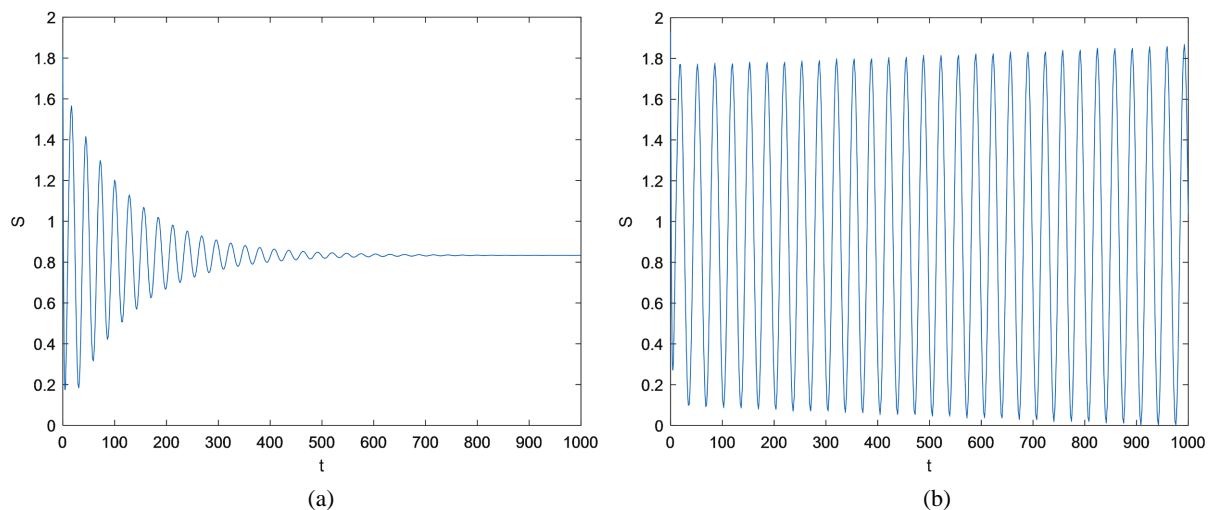
**定理 2** 对于系统, 当  $\tau > 0$  时假设条件(H1)和(H21)和(H22)成立, 则有:

- 1) 当条件(H31)或条件(H32)成立, 正平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的;
- 2) 当条件(H33) (H41)或(H33) (H42)或(H34) (H41)或(H34) (H42)成立时, 则当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时, 正平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的; 当  $\tau \in (\tau_0, +\infty)$  时, 正平衡点  $E^*$  是不稳定的; 当  $\tau = \tau_0$  时, 正平衡点  $E^*$  在时滞临界值附近会产生 Hopf 分岔。

#### 4. 数值仿真分析

利用 Matlab 软件来进行数值模拟, 对理论分析加以验证。

首先, 在系统中选取参数  $\Lambda = 0.5$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.15$ ,  $\mu = 0.1$ 。通过计算, 我们可以得到  $\tau_0 \approx 11.907$  和  $E^* = (0.8333, 1.38809)$ 。条件(H1) (H21) (H22) (H34) (H42)成立, 根据定理 2, 正平衡点  $E^*$  对于  $\tau \in [0, \tau_0)$  局部渐近稳定, 对于  $\tau \in (\tau_0, +\infty)$  时不稳定。由图 1(a)知, 正平衡点  $E^*$  在  $\tau = 9.2 < \tau_0$  时局部渐近稳定; 由图 1(b)知, 在  $\tau = 12 > \tau_0$  时不稳定。



**Figure 1.** (a)  $E^*$  local asymptotic stability; (b)  $E^*$  instability

**图 1.** (a)  $E^*$  局部渐近稳定; (b)  $E^*$  不稳定

接下来考虑  $\tau = 0$  的情况, 在系统中选取参数  $\Lambda = 0.45$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\mu = 0.1$ 。通过计算, 可以得到  $E^* = (0.7317, 1.0301, 3.4652)$ 。条件(H1) (H21) (H22)成立, 根据定理 1, 正平衡点  $E^*$  是局部渐近稳定的。由图 2 知, 当时间没有延迟时, 随着时间推移到  $t \approx 30$ , 谣言传播最终会停留在平衡点  $E^*$ 。

通过理论证明与数值模拟, 我们都得到了在一定条件下存在临界值  $\tau_0$ , 当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时, 正平衡点  $E^*$  局部渐近稳定; 当  $\tau > \tau_0$  时, 正平衡点  $E^*$  不稳定并出现周期震荡现象, 产生 Hopf 分岔。

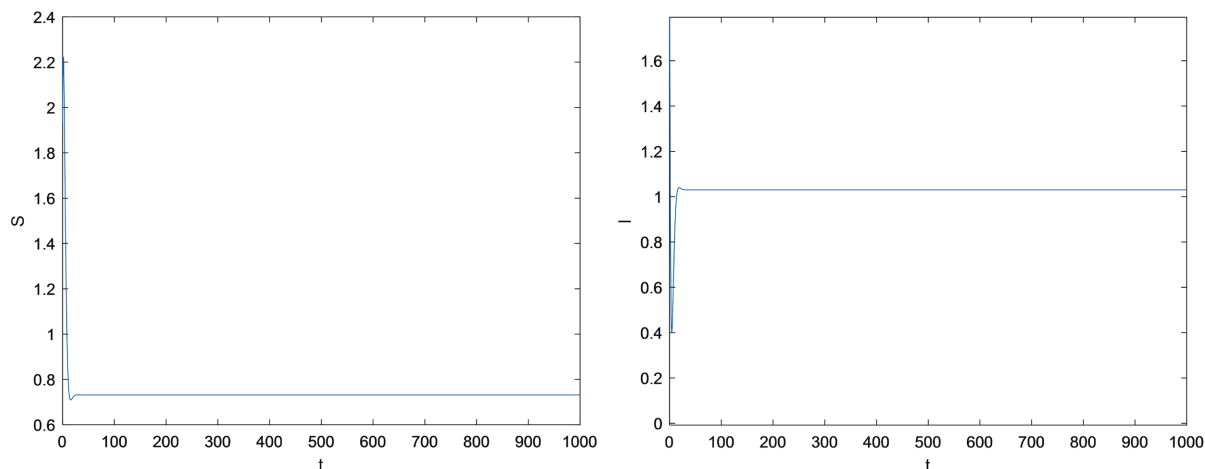


Figure 2.  $E^*$  local asymptotic stability when  $\tau = 0$

图 2. 当  $\tau = 0$ ,  $E^*$  局部渐近稳定

## 5. 结论

本文首先验证了正平衡点  $E^*$  的存在性, 然后讨论了系统的正平衡点的稳定性以及 Hopf 分岔的判别条件。选取  $\tau$  为分岔参数, 当时滞不超过临界值时正平衡点  $E^*$  局部渐进稳定, 当超出临界值时正平衡点  $E^*$  将由稳定变为不稳定, 并且正平衡点在分岔临界附近出现周期解。

## 参考文献

- [1] Daley, D.J. and Kendall, D.G. (1964) Epidemics and Rumours. *Nature*, **204**, 1118-1118. <https://doi.org/10.1038/2041118a0>
- [2] Zanette, D.H. (2002) Dynamics of Rumor Propagation on Small-World Networks. *Physical Review E*, **65**, 041908. <https://doi.org/10.1103/physreve.65.041908>
- [3] Maki, D. and Thomson, M. (1973) *Mathematical Model and Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, **5**, 75-81.
- [4] Xiao, Y., Chen, D., Wei, S., Li, Q., Wang, H. and Xu, M. (2018) Rumor Propagation Dynamic Model Based on Evolutionary Game and Anti-Rumor. *Nonlinear Dynamics*, **95**, 523-539. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4579-1>
- [5] 张菊平, 郭昊明, 荆文君, 靳祯. 基于真实信息传播者的谣言传播模型的动力学分析[J]. 物理学报, 2019, 68(15): 193-204.
- [6] Yao, Y., Xiao, X., Zhang, C., Dou, C. and Xia, S. (2019) Stability Analysis of an SDILR Model Based on Rumor Recurrence on Social Media. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **535**, 122236. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122236>
- [7] Zhao, H. and Zhu, L. (2016) Dynamic Analysis of a Reaction-Diffusion Rumor Propagation Model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **26**, 1650101. <https://doi.org/10.1142/s0218127416501017>
- [8] Hu, Y., Pan, Q., Hou, W. and He, M. (2018) Rumor Spreading Model with the Different Attitudes towards Rumors. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **502**, 331-344. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.02.096>
- [9] 赵敏, 陈文霞, 张平正. 在线社交网络中谣言传播模型的稳定性分析[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2018, 21(2): 21-24.
- [10] 朱霖河, 汤宇轩. 时滞谣言传播模型的动力学分析[J]. 数学的实践与认识, 2022, 52(10): 250-256.