**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2024, 13(6), 2726-2733
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.136261

# 一元DC复合优化问题的最优性条件

**肖程凤[*]，田超松**

吉首大学师范学院，湖南 吉首

收稿日期：2024年5月24日；录用日期：2024年6月19日；发布日期：2024年6月26日

## 摘 要

约束优化问题在自动控制、图像处理、水处理、网络分析、工程设计中有着十分重要的应用，实际生活中的许多问题在一定条件下都可以看作或者转化为一个约束优化问题，因此约束优化问题的研究具有非常重要的意义。本文将在函数不一定具有连续性，集合不一定是闭集的情形下，利用函数上图、次微分性质和凸化技巧，引入新的约束规范条件，对一元DC复合约束优化问题进行研究。从而建立了一元DC复合优化问题的局部和全局最优性条件的充分和必要条件，推广了前人的结论。

## 关键词

**DC复合优化问题，最优性条件，凸化**

# Optimality Conditions for the Composite Optimization of DC with One Variable

**Chengfeng Xiao[*], Chaosong Tian**

Normal College of Jishou University, Jishou Hunan

Received: May 24th, 2024; accepted: Jun. 19th, 2024; published: Jun. 26th, 2024

## Abstract

**Constrained optimization problems have very important applications in automatic control, image processing, water treatment, network analysis, and engineering design. Many problems in real life can be seen as or transformed into a constrained optimization problem under certain conditions, so the study of constrained optimization problems is of great significance. This article will study the univariate DC composite constrained optimization problem by utilizing the epigraph of functions, subdifferential properties, and convexification techniques in situations where functions**

[*]通讯作者。

文章引用: 肖程凤, 田超松. 一元 DC 复合优化问题的最优性条件[J]. 应用数学进展, 2024, 13(6): 2726-2733.
DOI: 10.12677/aam.2024.136261

**may not be continuous and sets may not be closed. By introducing new constrained standard conditions, this research establishes the sufficient and necessary conditions for local and global optimality of the univariate DC composite optimization problem, thus extending the conclusions of predecessors.**

## Keywords

**DC Composite Optimization Problem, Optimality Condition, Convexification**



## 1. 引言

约束优化问题在自动控制、图像处理、水处理、网络分析、工程设计中有着十分重要的应用，实际生活中的许多问题在一定条件下都可以看作或者转化为一个约束优化问题，例如，运输问题、分派问题、生产调度问题、设备更新年限问题等，因此无论从理论角度还是实际应用来看，约束优化问题的研究都具有非常重要的意义。对于经典的凸优化问题[1] [2]、复合优化问题[3]-[6]，DC (两个凸函数的差)优化问题[7] [8]，已有诸多学者利用内点条件、闭性条件、上图类条件等进行了研究，并得到了鞍点定理、对偶理论等系列结论。受此启发，本文拟对目标函数为复合函数，约束函数为 DC 函数的这一类一元 DC 复合优化问题进行研究。

## 2. 预备知识

设 $X,Y$ 是 Banach 空间，$X^*,Y^*$ 分别是 $X,Y$ 的共扼空间。定义 $Y$ 上的序为：若 $y-x\in -K$，则 $y\le_K x$。设 $Z$ 是 $X$ 的非空子集，记 $Z$ 的凸锥包为 $\mathrm{cone}Z$。非空集合 $Z$ 的对偶锥和示性函数分别定义为：

$$Z^{\oplus}:=\left\{x^*\in X^*:\left\langle x^*,x\right\rangle\ge 0,\forall x\in Z\right\},$$

$$\delta_Z\left(x\right):=\begin{cases}0, & x\in Z,\\ +\infty, & \text{其它}.\end{cases}$$

定义凸子集 $Z$ 在 $z_0\in Z$ 处的法锥为

$$N\left(z_0;Z\right):=\left\{x^*\in X^*:\left\langle x^*,z-z_0\right\rangle\le 0,\forall z\in Z\right\}.$$

设 $f$ 是 $X$ 上的真函数，定义 $f$ 的有效定义域和共轭函数分别为：

$$\mathrm{dom}f:=\left\{x\in X: f\left(x\right)<+\infty\right\},$$

$$f^*\left(x^*\right):=\sup\left\{\left\langle x^*,x\right\rangle-f\left(x\right):x\in X\right\},\forall x^*\in X^*,$$

当 $f$ 是凸函数时，$f$ 在点 $x\in\mathrm{dom}f$ 的次微分定义为

$$\partial f\left(x\right):=\left\{x^*\in X^*: f\left(x\right)+\left\langle x^*,y-x\right\rangle\le f\left(y\right),\forall y\in X\right\}.$$

设 $\phi:X\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 是实值延拓函数，点 $x_0\in\mathrm{dom}\phi$ 且满足 $\left|\phi\left(x_0\right)\right|<+\infty$。由文[9]知，函数 $\phi$ 在 $x_0$ 处 $\varepsilon$-Fréchet

次微分定义为$\hat{\partial}_\varepsilon \phi(x_0) := \left\{ x^* \in X^* : \liminf_{x \to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0) - \langle x^*, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} \ge -\varepsilon \right\}, \varepsilon \ge 0$。当$x_0 \notin \mathrm{dom}\phi$时，$\hat{\partial}_\varepsilon \phi(x_0) = \varnothing$。当$\varepsilon = 0$时，$\hat{\partial}\phi(x_0) := \hat{\partial}_\varepsilon \phi(x_0)$为$\phi$在$x_0$处 Fréchet 次微分。特别地，当$\phi$是凸函数时，$\hat{\partial}\phi(x_0) := \partial\phi(x_0)$即为凸分析中经典的次微分。由定义有

$$x_0 \text{是} \phi \text{的局部最优解} \Rightarrow 0 \in \hat{\partial}\phi(x_0). \tag{2.1}$$

由文[4]知，设函数$\psi : Y \to \overline{\mathbb{R}}$，对任意的$x, y \in Y$，若当$y \le_K x$时有$\psi(y) \le \psi(x)$，则称函数$\psi$是$K$-增函数。设函数$\varphi : X \to Y$，对任意的$x_1, x_2 \in X, t \in [0,1]$，有

$$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \le_K t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2),$$

则称函数$\varphi$是$K$-凸函数。对于任意的$\lambda \in K^{\oplus}$，定义$(\lambda\varphi)(\bullet) : X \to \overline{\mathbb{R}}$为

$$(\lambda\varphi)(x) := \begin{cases} \langle \lambda, \varphi(x) \rangle, & x \in \mathrm{dom}\varphi, \\ +\infty, & \text{其它}. \end{cases}$$

定义复合函数的复合形式为

$$(f \circ \varphi)(x) := \begin{cases} f(\varphi(x)), & x \in \mathrm{dom}\varphi, \\ +\infty, & \text{其它}. \end{cases}$$

并且，对$X$上的系统$\{S_t : t \in T\}$，约定$\bigcap_{t \in \phi} S_t = X$。

## 3. DC 复合优化问题的最优性条件

设$C \subseteq X$是非空凸子集，$T$是任意(可能无限)指标集，$\varphi : X \to Y$是真$K$-凸映射，$f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$是真凸$K$-增函数，$f_t, g_t : X \to \overline{\mathbb{R}}, t \in T$是真凸函数。考虑一元 DC 复合优化问题

$$(\mathbb{P}) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{Min} \quad (f \circ \varphi)(x) \\ &\text{s. t.} \quad f_t(x) - g_t(x) \le 0, t \in T, \\ &\qquad\quad x \in C. \end{aligned}$$

本文将在函数不一定具有连续性，集合$C$不一定是闭集的情形下，利用函数次微分的相关性质，引进新的约束规范条件，建立问题$(\mathbb{P})$的局部和全局最优性条件的充分和必要条件，从而推广和改进前人的相关结论。

### 3.1. 局部最优性条件

设$A$表示系统$\{x \in C; f_t(x) - g_t(x) \le 0, \forall t \in T\}$的解集，即$A := \{x \in C : f_t(x) - g_t(x) \le 0, \forall t \in T\}$。设$x_0$是问题$(\mathbb{P})$的局部极小点，则$x_0$也将是下面问题的局部极小点：

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min} \quad (f \circ \varphi)(x) \\ &\text{s. t.} \quad f_t(x) - \langle u_t^*, x \rangle + g_t^*(u_t^*) \le 0, t \in T, \\ &\qquad\quad x \in C, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中：$u_t^* \in \mathrm{dom} g_t^*$。对任意的$u_t^* \in \mathrm{dom} g_t^*$，问题(3.1)是凸优化问题。用$T(x_0)$，$T_{u_t^*}(x_0)$分别表示不等式系统$\{x \in C; f_t(x) - g_t(x) \le 0, t \in T\}$与$\{x \in C; f_t(x) - \langle u_t^*, x \rangle + g_t^*(u_t^*) \le 0, t \in T\}$在点$x_0$的活动指标集，即

$$T(x_0) := \{t \in T : f_t(x_0) - g_t(x_0) = 0\},$$

$$T_{u_t^*}(x_0):=\left\{t\in T: f_t(x_0)-\left\langle u_t^*,x_0\right\rangle+g_t^*\left(u_t^*\right)=0\right\}.$$

由文([8]，(1.2)式)可以定义问题(3.1)的局部 KKT 条件：

$$\begin{aligned}&x_0\text{ 是问题(3.1)的局部极小点}\\ \Rightarrow\quad &\forall u_t^*\in\operatorname{dom}g_t^*,\exists\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}_+^{(T)},\beta\in\partial f\left(\varphi(x_0)\right),\\ &\text{s. t. }\ 0\in\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T_{u_t^*}(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right).\end{aligned}$$

因此，可类似定义问题$(\mathbb{P})$在点$x_0\in\operatorname{dom}(f\circ\varphi)\cap A$的局部 KKT 条件。

**定义 3.1.1** 设$x_0\in\operatorname{dom}(f\circ\varphi)\cap A$是问题$(\mathbb{P})$的局部极小点。若对任意的$u_t^*\in\partial g_t(x_0)$，$t\in T$，存在$\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}_+^{(T)}$和$\beta\in\partial f\left(\varphi(x_0)\right)$，使得

$$0\in\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right),$$

则称系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$在点$x_0$满足局部 KKT 条件。若系统在任意点$x_0\in\operatorname{dom}(f\circ\varphi)\cap A$均满足局部 KKT 条件，则称系统满足局部 KKT 条件。

为研究问题$(\mathbb{P})$的局部最优性条件，我们首先引进如下约束规范条件。

**定义 3.1.2** 设$x_0\in\operatorname{dom}(f\circ\varphi)\cap A$，若

$$\hat{\partial}(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)\subseteq\bigcap_{u_t^*\in\partial g_t(x_0)}\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\left(\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right)\right),\tag{3.2}$$

则称系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$在点 $x_0$ 满足 F-(BCQ)$_1$ 条件。若系统在任意点$x_0\in\operatorname{dom}(f\circ\varphi)\cap A$均满足 F-(BCQ)$_1$条件，则称系统满足 F-(BCQ)$_1$条件。

**定理 3.1.1** 设$x_0\in\operatorname{dom}(f\circ\varphi)\cap A$。若系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$在点 $x_0$ 满足 F-(BCQ)$_1$条件，则称此系统在点 $x_0$ 满足局部 KKT 条件。

**证明** 假设系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$在点 $x_0$ 满足 F-(BCQ)$_1$条件。设 $x_0$ 是问题$(\mathbb{P})$的局部极小点。由(3.2)及(2.1)式可知

$$0\in\hat{\partial}(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)\subseteq\bigcap_{u_t^*\in\partial g_t(x_0)}\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\left(\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right)\right).$$

故对任意的$u_t^*\in\partial g_t(x_0)$，$t\in T$，存在$\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}_+^{(T)}$和$\beta\in\partial f\left(\varphi(x_0)\right)$，使得

$$0\in\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right),$$

故定理得证。

**注 3.1.1** [4]由文[4]知，令$x_0\in\operatorname{dom}(f\circ\varphi)\cap A$，若

$$\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)\subseteq\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\operatorname{cone}\left(\bigcup_{t\in T(x_0)}\partial f_t(x_0)\right),$$

则称系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t:t\in T\}$在点 $x_0$ 满足(CBCQ)条件。若系统在任意点$x_0\in\operatorname{dom}(f\circ\varphi)\cap A$均满足(CBCQ)条件，则称系统满足(CBCQ)条件。显然，当$g_t=0,t\in T$时 F-(BCQ)$_1$条件即为文[4]中的(CBCQ)条件。

故由定理 3.1.1 及注 3.1.1 可直接得到下面推论。

**推论 3.1.1** 设$g_t=0,t\in T$。设$x_0\in\operatorname{dom}(f\circ\varphi)\cap A$是问题$(\mathbb{P})$的局部极小点。若系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t:t\in T\}$

在点 $x_0$ 满足(CBCQ)条件，则下面结论成立：

$$0\in\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\partial f_t(x_0).$$

设 $u_t^*\in\mathrm{dom}g_t^*$，$t\in T$，定义凸函数 $F_t^{u_t^*}:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 为

$$F_t^{u_t^*}(x):=f_t(x)-\langle u_t^*,x\rangle+g_t^*(u_t^*),\forall x\in X.$$

由文([10]，定理 2.4.2(vi))知

$$\partial F_t^{u_t^*}(x)=\partial f_t(x)-u_t^*,\forall x\in\mathrm{dom}f_t. \tag{3.3}$$

用 $A_{u_t^*}$ 表示不等式系统 $\left\{x\in C;F_t^{u_t^*}(x)\le 0,t\in T\right\}$ 的解集，即 $A_{u_t^*}:=\left\{x\in C:F_t^{u_t^*}(x)\le 0,t\in T\right\}$。由文[10]的 Young-Fenchel 不等式知

$$f_t-g_t\le F_t^{u_t^*},\forall t\in T, \tag{3.4}$$

所以

$$A_{u_t^*}\subseteq A. \tag{3.5}$$

令 $T_{u_t^*}(x_0):=\left\{t\in T:F_t^{u_t^*}(x_0)=0\right\}$，故对任意的 $u_t^*\in\partial g_t(x_0)$，由文[10]的 Young 等式知

$$F_t^{u_t^*}(x_0)=f_t(x_0)-g_t(x_0),\forall t\in T, \tag{3.6}$$

因此，

$$T(x_0)=T_{u_t^*}(x_0),\forall u_t^*\in\partial g_t(x_0). \tag{3.7}$$

**定理 3.1.2** 设 $x_0\in\mathrm{dom}(f\circ\varphi)\cap A$。若对任意的 $u_t^*\in\partial g_t(x_0),t\in T$，系统 $\left\{f,\varphi,\delta_C;F_t^{u_t^*}:t\in T\right\}$ 点 $x_0$ 满足(CBCQ)条件，则系统 $\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$ 点 $x_0$ 满足局部 KKT 条件。

**证明** 设 $x_0$ 是问题 $(\mathbb{P})$ 的局部极小点，任取 $u_t^*\in\partial g_t(x_0)$。由(3.4)~(3.6)式知，$x_0$ 也是下面问题的局部极小点：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}\quad (f\circ\varphi)(x)\\&\mathrm{s.\,t.}\quad x\in A_{u_t^*}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

由于 $f\circ\varphi$ 是凸函数且 $A_{u_t^*}$ 是 $X$ 上的凸集可知，$x_0$ 也是问题(3.8)的局部极小点，故结合([10]，定理 2.5.7)有

$$0\in\partial\left(f\circ\varphi+\delta_{A_{u_t^*}}\right)(x_0).$$

又对任意的 $u_t^*\in\partial g_t(x_0)$，系统 $\left\{f,\varphi,\delta_C;F_t^{u_t^*}:t\in T\right\}$ 在点 $x_0$ 满足(CBCQ)条件，故

$$0\in\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\mathrm{cone}\left(\bigcup_{t\in T_{u_t^*}(x_0)}\partial F_t^{u_t^*}(x_0)\right).$$

再结合(3.3)和(3.7)式可得，对任意的 $u_t^*\in\partial g_t(x_0)$，存在 $\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}_+^{(T)}$ 和 $\beta\in\partial f(\varphi(x_0))$，使得

$$0\in\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right),$$

因此定理得证。

当函数 $g_t=0,t\in T$ 时，设 $x_0\in A$，由文[11]知，若

$$N_A(x_0)=N_C(x_0)+\text{cone}\left(\bigcup_{t\in T(x_0)}\partial f_t(x_0)\right),$$

则称系统 $\{\delta_C; f_t : t\in T\}$ 在点 $x_0$ 满足(BCQ)条件。

**推论 3.1.2** 设 $x_0\in\text{dom}(f\circ\varphi)\cap A$。假设 $f,\varphi$ 分别在点 $\varphi(x_0)$ 与 $x_0$ 处连续。若对任意的 $u_t^*\in\partial g_t(x_0)$，$t\in T$，系统 $\left\{\delta_C;F_t^{u_t^*}:t\in T\right\}$ 在点 $x_0$ 满足(BCQ)条件，则系统 $\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$ 点 $x_0$ 满足局部 KKT 条件。

**证明** 设 $u_t^*\in\partial g_t(x_0)$。由定理 3.1.2 知，欲证此推论，只需证明系统 $\left\{f,\varphi,\delta_C;F_t^{u_t^*}:t\in T\right\}$ 在点 $x_0$ 满足(CBCQ)条件，即证

$$\partial\left(f\circ\varphi+\delta_{A_{u_t^*}}\right)(x_0)\subseteq\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\text{cone}\left(\bigcup_{t\in T_{u_t^*}(x_0)}\partial F_t^{u_t^*}(x_0)\right).\tag{3.9}$$

注意到，函数 $f,\varphi$ 分别在点 $\varphi(x_0)$ 与 $x_0$ 处连续，$f\circ\varphi$ 是凸函数且 $A_{u_t^*}$ 是凸集，故

$$\partial\left(f\circ\varphi+\delta_{A_{u_t^*}}\right)(x_0)\subseteq\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_{A_{u_t^*}}(x_0).\tag{3.10}$$

由(3.6)式及 $x_0\in A$ 可得 $x_0\in A_{u_t^*}$。又系统 $\left\{\delta_C;F_t^{u_t^*}:t\in T\right\}$ 在点 $x_0$ 满足(BCQ)条件，故

$$N_{A_{u_t^*}}(x_0)=N_C(x_0)+\text{cone}\left(\bigcup_{t\in T_{u_t^*}(x_0)}\partial F_t^{u_t^*}(x_0)\right).\tag{3.11}$$

结合(3.10)、(3.11)式，可得(3.9)式，故结论得证。

## 3.2. 全局最优性条件

本节主要对问题 $(\mathbb{P})$ 的全局最优性条件进行研究，为此考虑下面问题：

$$(\mathbb{P}_p)\qquad \begin{aligned}&\text{Min}\quad (f\circ\varphi)(x)-\langle p,x\rangle\\ &\text{s. t.}\quad f_t(x)-g_t(x)\le 0, t\in T,\\ &\qquad x\in C.\end{aligned}$$

从而，我们可以得出以下定义。

**定义 3.2.1** 设 $p\in X^*$，$x_0\in\text{dom}(f\circ\varphi)\cap A$。若 $x_0$ 是问题 $(\mathbb{P}_p)$ 的全局极小点当且仅当对任意的 $u_t^*\in\partial g_t(x_0)$，$t\in T$，存在 $\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}_+^{(T)}$ 和 $\beta\in\partial f(\varphi(x_0))$，使得

$$p\in\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right),$$

则称系统 $\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$ 点 $x_0$ 满足全局稳定 KKT 条件。特别地，当 $p=0$ 时，称系统 $\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$ 点 $x_0$ 满足全局 KKT 条件。若系统在任意点 $x_0\in\text{dom}(f\circ\varphi)\cap A$ 均满足全局稳定 KKT 条件(或全局 KKT 条件)，则称系统满足全局稳定 KKT 条件(或全局 KKT 条件)。

特别地，当 $p=0$ 时，问题 $(\mathbb{P}_p)$ 即为本文所研究的问题 $(\mathbb{P})$，故由文([10]，定理 2.5.7)知，系统 $\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$ 在点 $x_0$ 满足全局 KKT 条件当且仅当

$$0\in\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)\Leftrightarrow 0\in\bigcap_{u_t^*\in\partial g_t(x_0)}\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\left(\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right)\right).$$

**定义 3.2.2** 设 $x_0\in\text{dom}(f\circ\varphi)\cap A$。若

$$\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)=\bigcap_{u_t^*\in\partial g_t(x_0)}\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\left(\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right)\right),$$

则称系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$在点 $x_0$ 满足(BCQ)$_1$ 条件。若系统在任意点 $x_0\in\mathrm{dom}(f\circ\varphi)\cap A$ 均满足(BCQ)$_1$ 条件，则称系统满足(BCQ)$_1$ 条件。

**定理 3.2.1** 设 $x_0\in\mathrm{dom}(f\circ\varphi)\cap A$。系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$在点 $x_0$ 满足(BCQ)$_1$ 条件当且仅当对任意的 $p\in X^*$，系统在点 $x_0$ 满足全局稳定 KKT 条件。

**证明** 对任意的 $p\in X^*$，系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$在点 $x_0$ 满足全局稳定 KKT 条件当且仅当下面的等价关系成立：

$$0\in\partial(f\circ\varphi-p+\delta_A)(x_0)\Leftrightarrow p\in\bigcap_{u_t^*\in\partial g_t(x_0)}\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\left(\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right)\right),$$

即

$$p\in\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)\Leftrightarrow p\in\bigcap_{u_t^*\in\partial g_t(x_0)}\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\left(\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right)\right).$$

故

$$\partial(f\circ\varphi+\delta_A)(x_0)=\bigcap_{u_t^*\in\partial g_t(x_0)}\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\left(\bigcup_{\beta\in\partial f(\varphi(x_0))}\partial(\beta\varphi)(x_0)+N_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\left(\partial f_t(x_0)-u_t^*\right)\right),$$

结论成立。

由定理 3.2.1 可直接得到下面推论。

**推论 3.2.1** 若系统$\{f,\varphi,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$满足(BCQ)$_1$ 条件，则此系统满足全局 KKT 条件。

**注 3.2.1** 当 $\varphi$ 为单位算子，$g_t=0,t\in T$ 时，问题$(\mathbb{P})$变成文[1]中的问题$(P_f)$，(BCQ)$_1$ 条件变成

$$\partial(f+\delta_A)(x_0)=\partial f(x_0)+N_C(x_0)+\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\partial f_t(x_0),$$

即文[1]中的(BCQ)$_f$ 条件，故本文的结论是对文[1]中相关结论的推广。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(11861033)。

## 参考文献


[1] Fang, D.H., Li, C. and Ng, K.F. (2010) Constraint Qualifications for Optimality Conditions and Total Lagrange Dualities in Convex Infinite Programming. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **73**, 1143-1159. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.04.020

[2] Boţ, R.I., Grad, S. and Wanka, G. (2008) New Regularity Conditions for Strong and Total Fenchel-Lagrange Duality in Infinite Dimensional Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **69**, 323-336. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.05.021

[3] Long, X., Sun, X. and Peng, Z. (2016) Approximate Optimality Conditions for Composite Convex Optimization Problems. *Journal of the Operations Research Society of China*, **5**, 469-485. https://doi.org/10.1007/s40305-016-0140-4

[4] Fang, D. and Zhang, Y. (2019) Optimality Conditions and Total Dualities for Conic Programming Involving Composite Function. *Optimization*, **69**, 305-327. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1561695

[5] Li, G. and Zhou, Y. (2015) The Stable Farkas Lemma for Composite Convex Functions in Infinite Dimensional Spaces. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **31**, 677-692. https://doi.org/10.1007/s10255-015-0493-1

[6] Fang, D.H., Ansari, Q.H. and Zhao, X.P. (2018) Constraint Qualifications and Zeroduality Gap Properties in Conical Programming Involving Composite Functions. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **19**, 53-69.

[7] Dinh, N., Nghia, T.T.A. and Vallet, G. (2010) A Closedness Condition and Its Applications to DC Programs with Convex Constraints. *Optimization*, **59**, 541-560. https://doi.org/10.1080/02331930801951348

[8] Fang, D.H. and Zhao, X.P. (2014) Local and Global Optimality Conditions for DC Infinite Optimization Problems. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **18**, 817-834. https://doi.org/10.11650/tjm.18.2014.3888

[9] Mordukhovich, B.S. (2006) Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory. Springer-Verlag.

[10] Zalinescu, C. (2002) Convex Analysis in General Vector Spaces. World Scientific.

[11] Li, C. and Ng, K.F. (2003) Constraint Qualification, the Strong CHIP, and Best Approximation with Convex Constraints in Banach Spaces. *SIAM Journal on Optimization*, **14**, 584-607. https://doi.org/10.1137/s1052623402415846