

离散不适定问题的扩展迭代正则化方法

匡洪博^{1,2}, 王正盛^{1,2*}, 李 乐^{1,2}, 吴梦颖^{1,2}

¹南京航空航天大学数学学院, 江苏 南京

²飞行器数学建模与高性能计算工业和信息化部重点实验室, 江苏 南京

收稿日期: 2024年5月24日; 录用日期: 2024年6月19日; 发布日期: 2024年6月26日

摘 要

Arnoldi-Tikhonov方法是求解大规模离散不适定问题的一种常用子空间迭代正则化方法, 其由Arnoldi算法构建低维Krylov子空间, 再对低维问题用Tikhonov正则化从而获得正则化解。但由于低维子空间信息缺失, 正则化解的有时效果欠佳。为了改进正则化效果, 本文通过增加一个含有特定先验信息的低维子空间来扩展Krylov子空间, 提出了求解大规模离散不适定问题的一种扩展子空间迭代正则化方法。该方法通过扩展Arnoldi算法构建扩展子空间, 并融合Tikhonov正则化, 从而获得更优正则化解。针对经典算例, 将所提算法与Arnoldi-Tikhonov算法进行了数值实验和性态比较, 数值结果验证了所提算法的有效性。

关键词

Tikhonov正则化, Arnoldi过程, 扩展子空间, Krylov子空间

The Enriched Iterative Regularization Method for Discrete Ill-Posed Problems

Hongbo Kuang^{1,2}, Zhengsheng Wang^{1,2*}, Le Li^{1,2}, Mengying Wu^{1,2}

¹School of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

²Key Laboratory of Mathematical Modelling and High Performance Computing of Air Vehicles (NUAA), MIIT, Nanjing Jiangsu

Received: May 24th, 2024; accepted: Jun. 19th, 2024; published: Jun. 26th, 2024

Abstract

Arnoldi-Tikhonov method is one of the often used Krylov subspace iterative regularization me-

*通讯作者。

文章引用: 匡洪博, 王正盛, 李乐, 吴梦颖. 离散不适定问题的扩展迭代正则化方法[J]. 应用数学进展, 2024, 13(6): 2742-2752. DOI: 10.12677/aam.2024.136263

thods for solving large scale discrete ill-posed problems. It generates the Krylov subspace through Arnoldi process and gets the regularized solution through applying Tikhonov regularization method to the projected small problem. However, due to the information deficiency of the dimension reduced subspace, the regularized solution by Arnoldi-Tikhonov method sometimes is not as good as expected. In order to improve the regularized solution, an enriched subspace iterative regularization method is proposed in this paper. The proposed new method enriches the Krylov subspace by adding a special subspace that holds some specific prior information. Numerical experiments are carried out. The numerical results show that the proposed method is more effective than the Arnoldi-Tikhonov method.

Keywords

Tikhonov Regularization, Arnoldi Process, Enriched Subspace, Krylov Subspace

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

考虑求解如下大规模离散不适定问题:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 \quad A \in R^{m \times n}. \quad (1)$$

此类问题经常出现于科学和工程等诸多领域[1], 通常是由连续不适定问题的离散化产生[2], 例如, 具有紧致核的第一类 Fredholm 积分方程的离散化等. 求解离散不适定问题的常用方法是 Tikhonov 正则化方法[3] [4], 通常采用以下形式:

$$\min_x \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_2^2 \right\} \quad (2)$$

其中 λ 是正则化参数[5] [6], 意图控制着 $\|Ax - b\|_2^2$ 和 $\|x\|_2^2$ 组合权重.

对于大型离散不适定问题, 由于矩阵 A 的规模过大, 限于存储量和计算量, 应用 Tikhonov 正则化方法直接求解该问题正则化解是不现实的.

因此, 需要将矩阵 A 投影在一个低维空间中, 得到一个低维空间中的不适定问题, 即:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 \quad \text{s.t. } x \in S_k$$

这里的子空间 S_k 是一个维数为 k 的线性子空间. 如果能够得到 S_k 的一组合适的基 $\text{span}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$, 那么这种方法可以取得很好的效果. 于是, 通常选取 S_k 是 Krylov 子空间[4]:

$$K_k = \text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b\}.$$

例如, GMRES、RRGMRES 方法[7]-[12]和 LSQR 方法[13]都是使用到了此类子空间.

对于不同的问题, 上述子空间中的一个或多个可能非常适合用来计算出一个好的正则化解, 也就是说, 这个正则化解可以对精确解有着很好的估计, 并且对于数据的扰动不敏感. 将低维 Krylov 子空间投影与 Tikhonov 正则化相结合, 即将 Tikhonov 正则化方法应用在原问题的投影问题, 这就是所谓的经典子空间迭代正则化算法. 特别地, 如果使用 Arnoldi 算法投影, 即为 Arnoldi-Tikhonov 正则化算法.

然而, 对于一些矩阵 A 和向量 b , 构造 Krylov 子空间可能不包含可以表示精确解 x_{exact} 已知特征的向量。由于 Arnoldi-Tikhonov 正则化算法中生成的 Krylov 子空间的维数通常远小于矩阵 A 的维数, 所以通过该 Krylov 子空间不能准确地表示这样的解。在这种情况下, 使用 Arnoldi-Tikhonov 正则化算法就会得不到理想的效果, 即得到的解不是精确解 x_{exact} 好的近似。

于是, 本文对利用 Arnoldi 算法进行 Krylov 子空间进行了扩展, 通过加入特定的先验信息, 来使得到的正则化解更加准确。将这种新方法称为扩展 Arnoldi 算法。该方法的主要思想是: 假设所求得解在子空间 W_p 中有一个重要的组成部分, 这里的 W_p 是一个给定的子空间, 它的维数为 $p < k$, 将该子空间与上述 Krylov 子空间相结合。于是, 可以将所求得解分称两个部分, 其中一个部分在给出的子空间 W_p 中, 另一部分在 W_p 的正交补空间 W_p^\perp 中。具体来说, 在一个新的子空间 $S_{p,k}$ 中计算问题的正则化解, 这里的子空间 $S_{p,k}$ 是上述两个子空间 W_p 和 K_k 的直和

$$S_{p,k} = W_p + K_k \equiv \{x + y \mid x \in W_p \wedge y \in K_k\},$$

这里的 $S_{p,k}$ 是一个线性子空间。

需要强调的一点是所选择的子空间必须是合适的, 只有一个好的扩展子空间 W_p 才能使得到的解比原方法得到的正则化解更加精确。如果所选的 W_p 不够理想, 那么通过该方法得到的解可能与精确解相差甚远, 因此子空间 W_p 的选取十分重要。

基于上述思路, 对 Arnoldi-Tikhonov 正则化算法进行扩展, 称算法称为扩展 Arnoldi 迭代正则化算法。与传统 Arnoldi-Tikhonov 正则化算法类似, 可以计算出扩展 Arnoldi 迭代正则化算法相应的 Tikhonov 正则化参数, 并且在子空间 W_p 选择合适的情况下, 通过该方法得到的正则化解通常优于传统 Arnoldi-Tikhonov 正则化算法。

本文的组织结构如下: 第 2 节对 Arnoldi 算法进行扩展, 得到了扩展 Arnoldi 算法。在第 3 节中, 融合扩展 Arnoldi 算法和 Tikhonov 正则化, 给出了扩展 Arnoldi 迭代正则化算法, 给出了具体的算法描述。第 4 节进行了一系列数值实验, 来展示和验证本文所提出的扩展 Arnoldi 迭代正则化算法的有效性和优越性。

2. 扩展 Arnoldi 算法

本节讨论如何实现扩展子空间算法。类似于 Arnoldi 算法构造 Krylov 子空间的标准正交基, 实施推广的 Hessenberg 分解

$$A[W_p, b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b] = V_{p+k+1} H_{p+k}.$$

于是, 可以计算出问题的解:

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= [W_p, b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b] y^{(k)} \\ y^{(k)} &= \arg \min_y \|H_{p+1} y - V_{p+k+1}^\top b\|_2^2 \end{aligned}$$

对于 Krylov 子空间 K_k 的构造, 可以通过 Arnoldi 算法来计算出其一组标准正交基; 接下来将子空间 W_p 扩展到这组标准正交基中, 使之成为一个新的扩展的子空间。当 Arnoldi 算法的迭代次数为 k 时, 可以得到如下形式的矩阵分解:

$$A[V_k, W_p] = [V_{k+1}, \tilde{V}_k] \begin{bmatrix} B_k & G_k \\ 0 & F_k \end{bmatrix}.$$

在上面的公式中 V_k , V_{k+1} , 和 B_k 都是与经典的 Arnoldi 算法相关的, 其余的矩阵与加入的扩展子空

间 W_p 有关。

具体来说，

- $AV_k = V_{k+1}B_k$ 是由 Arnoldi 过程经过 k 次迭代后得到的；
- $V_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 有着标准正交的列向量，并且可以张成 Krylov 子空间 K_k ；
- $V_{k+1} \in \mathbb{R}^{n \times (k+1)}$ 有着标准正交的列向量，并且它是由矩阵 V_k 扩展了一列之后形成的；
- $B_k \in \mathbb{R}^{(k+1) \times k}$ 是一个上 Hessenberg 矩阵；
- $\tilde{V}_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 满足等式 $AW_p = V_{k+1}G_k + \tilde{V}_kF_k$ 并且 $\tilde{V}_k^T V_{k+1} = 0$ ；
- $F_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 与 Arnoldi 过程的迭代次数有关，迭代的次数不同， F_k 也会不同；
- $G_k \in \mathbb{R}^{(k+1) \times p}$ 与矩阵 V_{k+1} 有关。

由上述矩阵分解可知 $[V_{k+1}, \tilde{V}_k]$ 的列向量形成了子空间 $S_{p,k}$ 的一组基。矩阵 G_k 和 F_k 分别是由 V_{k+1} 和 \tilde{V}_k 来计算得到的，计算公式如下所示：

$$G_k = V_{k+1}^T AW_p, F_k \in \tilde{V}_k^T AW_p.$$

于是，原问题可转换为求解如下最小二乘问题：

$$y^{(k)} = \arg \min_y \left\| \begin{bmatrix} B_k & G_k \\ 0 & F_k \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} V_{k+1}^T \\ \tilde{V}_k^T \end{bmatrix} b \right\|_2^2$$

通过解决此最小二乘问题求得 $y^{(k)}$ ，进而可以求得 $x^{(k)}$ ：

$$x^{(k)} = [V_k, W_p] y^{(k)}.$$

于是，给出具体的扩展算法如下 **算法 1**：

Algorithm 1. Enriched Arnoldi algorithm

算法 1. 扩展 Arnoldi 算法

- 1) 设定 $V_1 = b/\|b\|_2$ ， $V_0 = []$ ， $B_0 = []$ ， $G_0 = V_1^T AW_p$ ， $k=1$ ；
- 2) 通过 Arnoldi 过程来计算得出 v_{k+1} 使得等式 $AV_k = V_{k+1}B_k$ 成立，其中 $V_{k+1} = [V_k, v_{k+1}]$ ， $B_k = \begin{bmatrix} B_{k-1} & 0 \\ 0 & \times \end{bmatrix}$ ；
- 3) 计算 $G_k = \begin{bmatrix} G_{k-1} \\ V_{k+1}^T AW_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times p}$ ；
- 4) 通过 V_{k+1} 对 AW_p 进行标准正交化，从而计算得到 $\tilde{V}_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ；
- 5) 计算 $F_k = \tilde{V}_k^T AW_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ；
- 6) 通过解决最小二乘问题 $\min_y \left\| \begin{bmatrix} B_k & G_k \\ 0 & F_k \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} V_{k+1}^T \\ \tilde{V}_k^T \end{bmatrix} b \right\|_2^2$ 来得到解 $y^{(k)}$ ；
- 7) 得到 $x^{(k)} = [V_k, W_p] y^{(k)}$ ；
- 8) 在迭代次数达到要求时停止，否则令 $k = k+1$ 并重复步骤 2。

对比原算法，上述扩展 Arnoldi 算法需要对矩阵 W_p ， \tilde{V}_k ， G_k 和 F_k 进行额外的计算，但是由于选择的扩展子空间 W_p 维数很小，计算它们的开销可以忽略不计。

3. 扩展 Arnoldi 迭代正则化算法

本节融合扩展 Arnoldi 算法和 Tikhonov 正则化, 给出扩展 Arnoldi 正则化算法。

基于扩展 Arnoldi 算法, 得到

$$A[V_k, W_p] = [V_{k+1}, \tilde{V}_k] \begin{bmatrix} B_k & G_k \\ 0 & F_k \end{bmatrix}.$$

将此分解带入上述问题(2), 进行运算处理后得到如下低维问题:

$$y_{\lambda_k}^{(k)} = \arg \min_y \left\| \begin{bmatrix} B_k & G_k \\ 0 & F_k \\ \lambda_k V_k & \lambda_k W_p \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} V_{k+1}^T \\ \tilde{V}_k^T \\ 0 \end{bmatrix} b \right\|_2^2 \quad (3)$$

其中 $y_{\lambda_k}^{(k)}$ 满足如下的等式:

$$x_{\lambda_k}^{(k)} = [V_k, W_p] y_{\lambda_k}^{(k)}.$$

于是对于低维子空间最小二乘问题运用 Tikhonov 正则化算法, 就实现了扩展子空间投影正则化过程。这种算法的优势在于: 一是通过扩展 Arnoldi 算法获得具有特定信息的投影低维子空间, 实现投影降维和信息补充的双重效果; 二是可以更为灵活地选用正则化参数 λ , 包括偏差原理[14], L-曲线准则[15]-[17]以及广义交叉验证方法[18]等。本文选用广义交叉验证方法来作为正则化参数的选取方法[19]。

于是, 给出扩展 Arnoldi 正则化算法(算法 2)描述:

Algorithm 2. Enriched Arnoldi regularization algorithm

算法 2. 扩展 Arnoldi 正则化算法

- 1) 设定 $V_1 = b/\|b\|_2$, $V_0 = []$, $B_0 = []$, $G_0 = V_1^T A W_p$, $k=1$;
- 2) 通过 Arnoldi 过程来计算得出 v_{k+1} 使得等式 $AV_k = V_{k+1}B_k$ 成立, 其中 $V_{k+1} = [V_k, v_{k+1}]$, $B_k = \begin{bmatrix} B_{k-1} & 0 \\ \times & \times \\ 0 & \times \end{bmatrix}$;
- 3) 计算 $G_k = \begin{bmatrix} G_{k-1} \\ v_{k+1}^T A W_p \end{bmatrix} \in R^{(k+1) \times p}$;
- 4) 通过 V_{k+1} 对 $A W_p$ 进行标准正交化, 计算 $\tilde{V}_k \in R^{n \times p}$;
- 5) 计算 $F_k = \tilde{V}_k^T A W_p \in R^{p \times p}$;
- 6) 使用广义交叉验证方法获得正则化参数 λ , 计算 $\min_y \left\| \begin{bmatrix} B_k & G_k \\ 0 & F_k \\ \lambda_k V_k & \lambda_k W_p \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} V_{k+1}^T \\ \tilde{V}_k^T \\ 0 \end{bmatrix} b \right\|_2^2$ 的正则化解 $y_{\lambda_k}^{(k)}$;
- 7) 于是得到原始正则化解 $x_{\lambda_k}^{(k)} = [V_k, W_p] y_{\lambda_k}^{(k)}$;
- 8) 在迭代次数达到要求时停止, 否则令 $k = k + 1$ 并重复步骤 2。

对于大规模离散不适定问题, 通过扩展 Arnoldi 正则化算法计算得到正则化解通常优于通过经典 Arnoldi-Tikhonov 正则化算法得到的解。在下一节中, 通过一系列数值算例来验证其有效性和优越性。

4. 数值实验

本节将给出一些数值例子验证扩展子空间迭代正则化算法的效能。

具体实验参数说明如下：考虑含有噪音来自第一类 Fredholm 积分方程离散化得到的离散不适定问题

$$Ax_{exact} = b_{exact} + e$$

这里 A 分别取 deriv2、foxgood 和 baart 矩阵问题[2]； e 为随机高斯白噪声向量，其噪声水平为 $\eta = \|e\|_2 / \|b_{exact}\|_2$ ；相对误差的计算方法为 $\|x_{exact} - x^{(k)}\|_2 / \|x_{exact}\|_2$ ，即用计算所得正则化解与精确解在 2-范数意义下的相对误差来描述该解的准确程度。

分别比较扩展 Arnoldi 迭代正则化方法(Enriched Arnoldi-Tikhonov, 简记为 E-A-T 算法)和 Arnoldi-Tikhonov 正则化方法(Arnoldi-Tikhonov, 简记为 A-T 算法)所得解的准确度。在数值实验中，统一使用广义交叉验证方法(GCV)作为正则化参数的选取方法。

4.1. 例 1

考虑第一个问题是 deriv2 ($n, 2$)问题，选择扩展子空间为

$$W_2 = \text{span}\{w_1, w_2\}, w_1 = (1, 1, \dots, 1)^T, w_2 = (1, 2, \dots, n)^T$$

设置 n 的值为 32，相对噪音水平 $\eta = 10^{-6}$ ，选择 Arnoldi 过程的迭代次数 k 为 20。通过上述两种方法对该问题进行了求解，结果如图 1、图 2 所示。

表 1 也展示了扩展 Arnoldi 迭代正则化方法可以明显得提升计算得出的解的准确性。

Table 1. Comparing the relative errors of the two algorithms of the first case in example 1

表 1. 例 1 的第一种情况中两种算法相对误差数值对比

算法	A-T 算法	E-A-T 算法
相对误差	5.2780e-02	3.8089e-04

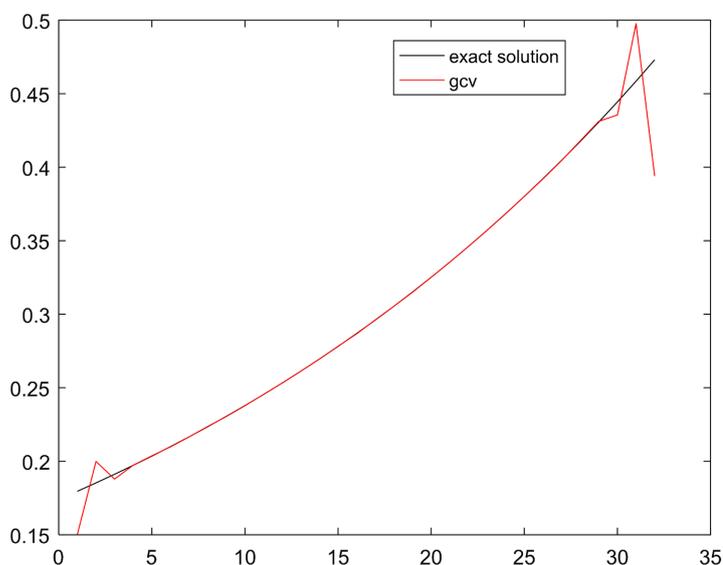


Figure 1. The regular solution obtained by A-T algorithm of the first case in example 1

图 1. 例 1 的第一种情况中通过 A-T 算法计算得到的正则化解

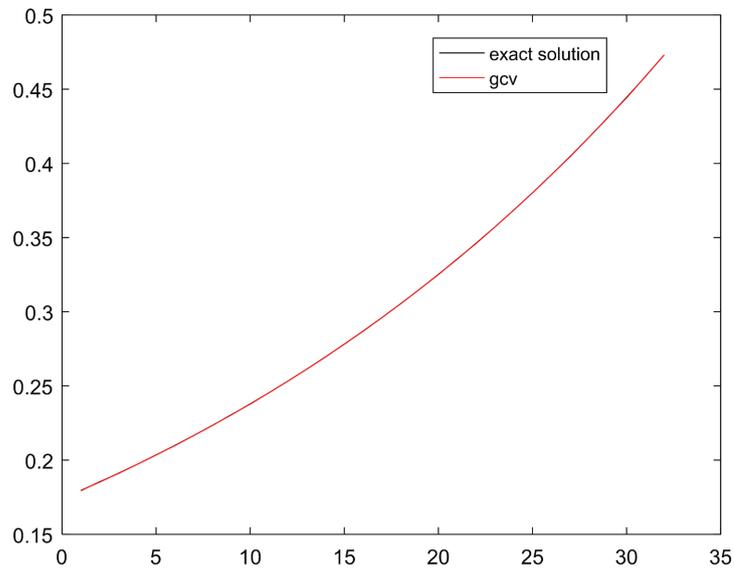


Figure 2. The regular solution obtained by E-A-T algorithm of the first case in example 1

图 2. 例 1 的第一种情况中通过 E-A-T 算法计算得到的正则化解

同样对于 $\text{deriv2}(n, 2)$ 问题, 设置 n 的值为 1000, 并且相对噪音水平 $\eta = 10^{-3}$, 选择 k 为 50。类似的, 也得到了该问题相应的解曲线和相对误差, 分别如图 3、图 4 以及表 2 所示。

Table 2. Comparing the relative errors of the two algorithms of the second case in example 1

表 2. 例 1 的第二种情况中两种算法相对误差数值对比

算法	A-T 算法	E-A-T 算法
相对误差	1.6747e-01	1.7762e-02

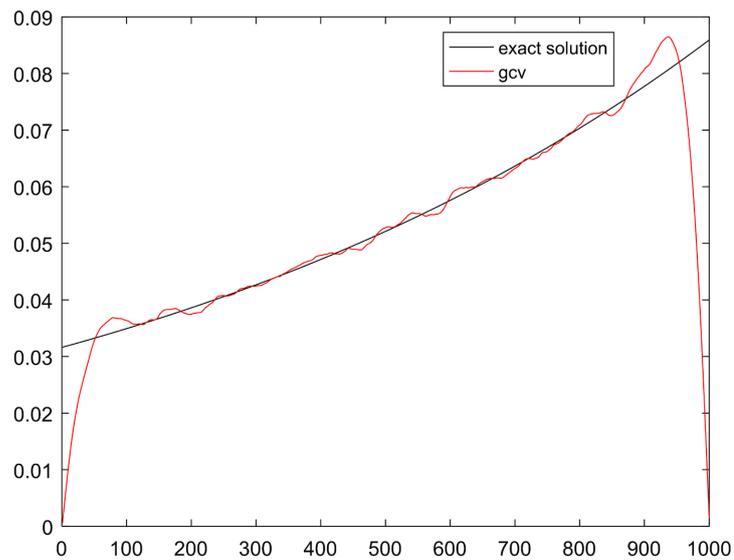


Figure 3. The regular solution obtained by A-T algorithm of the second case in example 1

图 3. 例子的第二种情况中通过 A-T 算法计算得到的正则化解

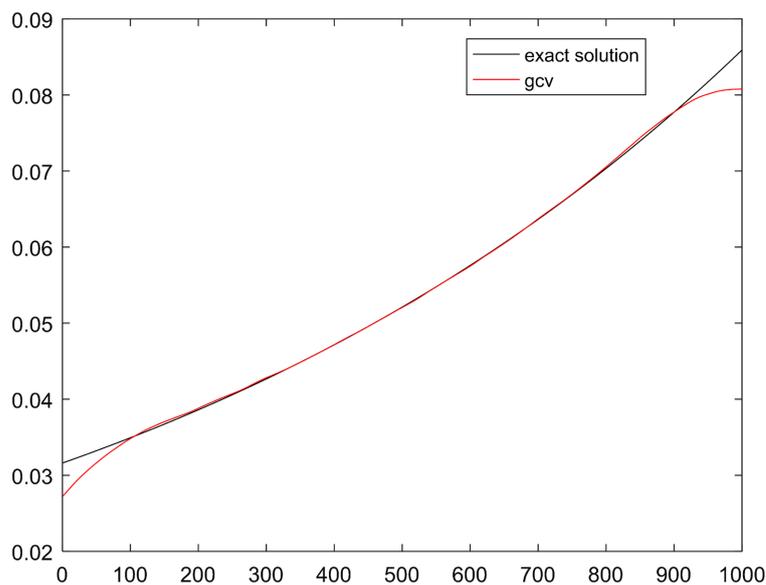


Figure 4. The regular solution obtained by E-A-T algorithm of the second case in example 1

图 4. 例 1 的第二种情况中通过 E-A-T 算法计算得到的正则化解

可以看到通过扩展 Arnoldi 迭代正则化方法得到的解表现得更好，因为它的解曲线更加光滑，并且与精确解曲线更加接近。可见，对于此类问题，本文所提算法是有效且有优势的。

4.2. 例 2

考虑 foxgood (n)问题，选择扩展子空间与第一个例子相同，如下所示

$$W_2 = \text{span}\{w_1, w_2\}, \quad w_1 = (1, 1, \dots, 1)^T, \quad w_2 = (1, 2, \dots, n)^T$$

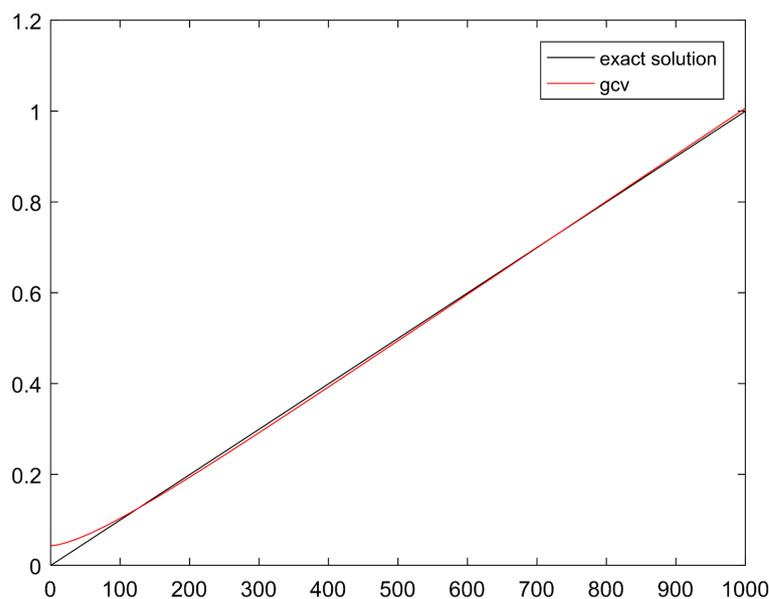


Figure 5. The regular solution obtained by A-T algorithm in example 2

图 5. 例 2 中通过 A-T 算法计算得到的正则化解

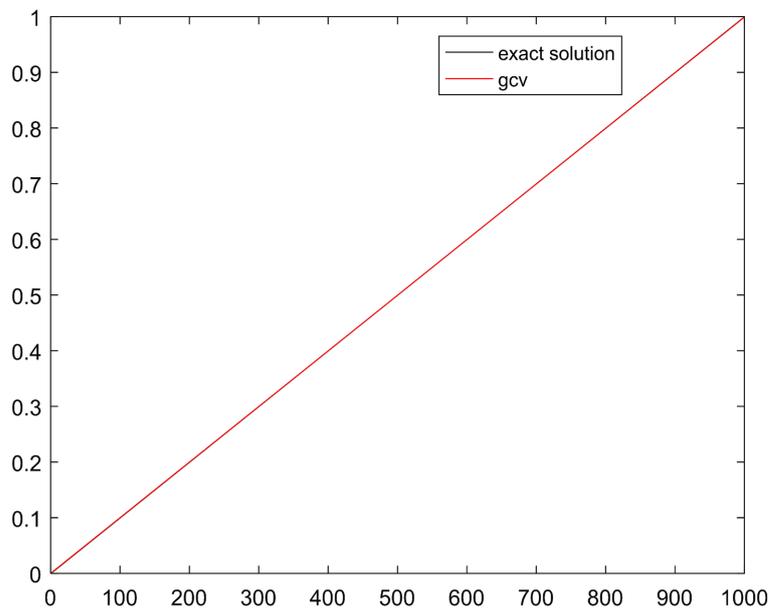


Figure 6. The regular solution obtained by E-A-T algorithm in example 2

图 6. 例 2 中通过 E-A-T 算法计算得到的正则化解

Table 3. Comparing the relative errors of the two algorithms in example 2

表 3. 例 2 中两种算法相对误差数值对比

算法	A-T 算法	E-A-T 算法
相对误差	1.2207e-02	4.4613e-04

设置 n 的值为 1000，设置相对噪音水平 $\eta = 10^{-3}$ ，选择迭代次数 k 的值为 30。同样的，通过上述两种方法对该问题进行了求解，并且将解向量的图像与相对误差的结果展示在图 5、图 6 以及表 3 中。从图 5 中可以看出，通过 Arnoldi-Tikhonov 正则化方法得到的解向量的前 100 项与精确解向量的前 100 项差距较大，而从图 6 来看通过本文所提方法得到的正则解向量很好的修正了这一点，使得解向量整体上都与精确解向量十分相近。正因如此，通过本文的方法求得的解相对误差比 Arnoldi-Tikhonov 正则化方法要小得多，如表 3 所示。

可见，对于该问题，扩展 Arnoldi 迭代正则化方法依然比 Arnoldi-Tikhonov 正则化方法更为有效。

4.3. 例 3

考虑 baart $(n, 1)$ 问题，选择的扩展子空间为

$$W_2 = \text{span} \{w_1, w_2\}, w_1 = (1, 1, \dots, 1)^T, w_2 = (1, 2, \dots, n)^T, w_3 = (1, 4, \dots, n^2)^T$$

设置 n 的值为 1000，相对噪音水平设置为 $\eta = 10^{-4}$ ，选择迭代次数 k 为 30。通过上述两种方法对该问题进行求解，将解向量的图像与相对误差的结果展示在图 7、图 8 以及表 4 中。从图 7 中可以看出，通过 Arnoldi-Tikhonov 正则化方法得到的解向量与精确解向量有较大差距，得到的解图像只有与精确解图像大致类似的形状，而从图 8 中可知通过本文方法得到的解图像与精确解图像更加相近，精确程度远好于 Arnoldi-Tikhonov 正则化方法。在表 4 中也得出此结论。

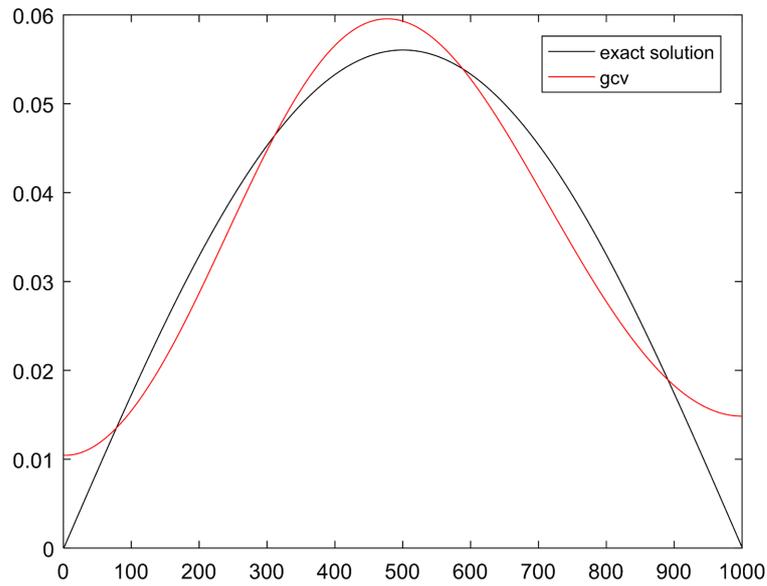


Figure 7. The regular solution obtained by A-T algorithm in example 3
图 7. 例 3 中通过 A-T 算法计算得到的正则化解

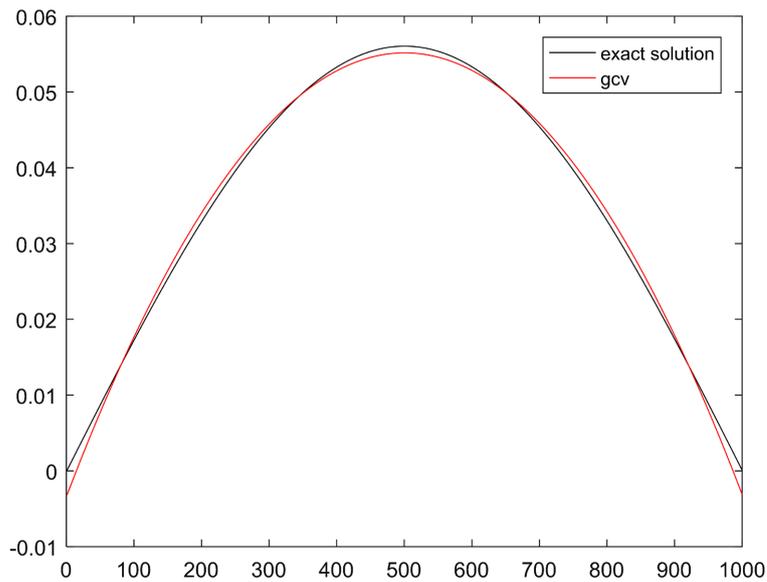


Figure 8. The regular solution obtained by E-A-T algorithm in example 3
图 8. 例 3 中通过 E-A-T 算法计算得到的正则化解

Table 4. Comparing the relative errors of the two algorithms in example 3
表 4. 例 3 中两种算法相对误差数值对比

算法	A-T 算法	E-A-T 算法
相对误差	1.1177e-01	2.4867e-02

5. 结论

本文融合扩展 Arnoldi 算法和 Tikhonv 正则化, 给出了求解大规模离散不适定问题的一种扩展迭代正

则化算法, 即扩展 Arnoldi-Tikhonov 正则化算法。该算法实现了特定信息补充和投影降维的双重效果, 获得更具优势的正则化解。并通过一系列数值算例, 展示和验证了所提算例的有效性和优越性。

基金项目

本文得到中央高校基本科研业务费专项资金(NG2023004)资助。

参考文献

- [1] Kirsch, A. (2021) An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. 3th Edition, Springer.
- [2] Hansen, P.C. (1994) Regularization Tools: A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems. *Numerical Algorithms*, **6**, 1-35. <https://doi.org/10.1007/bf02149761>
- [3] Phillips, D.L. (1962) A Technique for the Numerical Solution of Certain Integral Equations of the First Kind. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **9**, 84-97. <https://doi.org/10.1145/321105.321114>
- [4] Tikhonov, A.N. (1963) Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method. *Soviet Mathematics Doklady*, **4**, 1035-1038.
- [5] Groetsch, C.W. (1984) The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind. Pitman.
- [6] Engl, H.W., Hanke, M. and Neubauer, A. (1996) Regularization of Inverse Problems. Kluwer.
- [7] Calvetti, D., Lewis, B. and Reichel, L. (2001) Krylov Subspace Iterative Methods for Nonsymmetric Discrete Ill-Posed Problems in Image Restoration. *Proceedings of the 2001 International Symposium on Optical Science and Technology*, San Diego, 29 July-3 August 2001, 224-233. <https://doi.org/10.1117/12.448653>
- [8] Morikuni, K., Reichel, L. and Hayami, K. (2014) FGMRES for Linear Discrete Ill-Posed Problems. *Applied Numerical Mathematics*, **75**, 175-187. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2013.08.004>
- [9] Saad, Y. and Schultz, M.H. (1986) GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **7**, 856-869. <https://doi.org/10.1137/0907058>
- [10] Neuman, A., Reichel, L. and Sadok, H. (2012) Implementations of Range Restricted Iterative Methods for Linear Discrete Ill-Posed Problems. *Linear Algebra and Its Applications*, **436**, 3974-3990. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.08.033>
- [11] Lewis, B. and Reichel, L. (2009) Arnoldi-Tikhonov Regularization Methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **226**, 92-102. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.05.003>
- [12] Reichel, L. and Ye, Q. (2005) Breakdown-Free GMRES for Singular Systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **26**, 1001-1021. <https://doi.org/10.1137/s0895479803437803>
- [13] Hansen, P.C. (2010) Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718836>
- [14] Morozov, V.A. (1984) Methods for Solving Incorrectly Posed Problems. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5280-1>
- [15] Miller, K. (1970) Least Squares Methods for Ill-Posed Problems with a Prescribed Bound. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **1**, 52-74. <https://doi.org/10.1137/0501006>
- [16] Calvetti, D., Lewis, B. and Reichel, L. (2002) GMRES, L-Curves, and Discrete Ill-Posed Problems. *Bit Numerical Mathematics*, **42**, 44-65. <https://doi.org/10.1023/a:1021918118380>
- [17] Hansen, P.C. (1992) Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve. *SIAM Review*, **34**, 561-580. <https://doi.org/10.1137/1034115>
- [18] Calvetti, D., Lewis, B. and Reichel, L. (2000) GMRES-Type Methods for Inconsistent Systems. *Linear Algebra and Its Applications*, **316**, 157-169. [https://doi.org/10.1016/s0024-3795\(00\)00064-1](https://doi.org/10.1016/s0024-3795(00)00064-1)
- [19] Calvetti, D., Morigi, S., Reichel, L. and Sgallari, F. (2000) Tikhonov Regularization and the L-Curve for Large Discrete Ill-Posed Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **123**, 423-446. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00414-3](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00414-3)