Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(6), 2771-2779
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.136266

不定方程$x^2-kxy+ky^2+dy=0$的正整数解

龚禹豪

西华师范大学，数学与信息学院，四川 南充

收稿日期：2024年5月24日；录用日期：2024年6月19日；发布日期：2024年6月26日

摘　要

本文研究了在$d\in\{3,5,7,11,13,17,19\}$，$k\in N^*$时，不定方程$x^2-kxy+ky^2+dy=0$有无穷多个正整数解$(x,y)$当且仅当$d=3$，$k=5,6,7$；$d=5$，$k=5,7,9$；$d=7$，$k=5,8,11$；$d=11$，$k=5,6,9,10,15$；$d=13$，$k=5,11,17$；$d=17$，$k=5,7,11,13,21$；$d=19$，$k=5,11,14,23$。在$d$为奇素数时，给出了不定方程$x^2-kxy+ky^2+dy=0$正整数解的一些必要条件。

关键词

不定方程，Pell方程，正整数解，二次剩余，同余

The Positive Integer Solutions of the Diophantine Equation $x^2-kxy+ky^2+dy=0$

Yuhao Gong

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: May 24th, 2024; accepted: Jun. 19th, 2024; published: Jun. 26th, 2024

Abstract

In this paper, we study that at $d\in\{3,5,7,11,13,17,19\}$, $k\in N^*$, the indefinite equation $x^2-kxy+ky^2+dy=0$ has infinitely many positive integer solutions (x,y) when and only when $d=3$, $k=5, 6, 7$; $d=5$, $k=5, 7, 9$; $d=7$, $k=5, 8, 11$; $d=11$, $k=5, 6, 9, 10, 15$; $d=13$, $k=5, 11, 17$; $d=17$, $k=5, 7, 11, 13, 21$; $d=19$, $k=5, 11, 14, 23$. Some necessary conditions for positive integer solutions of the indefinite equation $x^2-kxy+ky^2+dy=0$ are given when d is an odd prime.

文章引用: 龚禹豪. 不定方程$x^2-kxy+ky^2+dy=0$的正整数解[J]. 应用数学进展, 2024, 13(6): 2771-2779.
DOI: 10.12677/aam.2024.136266

Keywords

Diophantine Equation, Pell Equation, Positive Integer Solution, Quadratic Residues, Congruence

1. 引言及主要结论

设 Z, N^* 分别是全体整数和正整数的集合。方程

$$x^2 - kxy + y^2 + lx = 0, k, l \in N^* \tag{1}$$

是一类典型的二次不定方程。此类不定方程一直是数论研究的重要内容，已有许多相关研究。2004 年，Marlewski A 与 Zarzycki P [1]证明了不定方程 $x^2 - kxy + y^2 + x = 0$ 有无穷多组正整数解。袁平之与胡永忠[2]在 2011 年将文献[1]中的 $l = 1$ 推广到 $l \in \{1,2,4\}$ 的情况。2012 年，袁平之与冯丽[3]给出不定方程 $x^2 - kxy + y^2 + lx = 0$ 有无穷多组正整数解，当且仅当 $(k,l) = (3,3),(4,3),(5,3),(3,5),(5,5),(7,5)$ 这六种情形。2013 年胡永忠与乐茂华[4]证明了不定方程(1)有无穷多组正整数解时，必须满足 $k \ge 3$ 的条件。2015 年樊晖[5]研究了不定方程 $x^2 - kxy + y^2 - lx = 0$ 在 $k \ge 3$ 且 $l \in \{1,3,4\}$ 时，有无穷多组正整数解。2016 年管训贵[6]将不定方程 $x^2 - kxy + y^2 + px = 0$ 推广到 p 为奇素数也有无穷多组正整数解的情形。此外，许多学者也研究了不定方程 $x^2 - kxy + ky^2 + ly = 0$ 的情形。其中，2013 年 Karaatli O 与 Siar Z [7]证明了当 $l \in \{1,2,4,8\}$ 时，不定方程 $x^2 - kxy + ky^2 + ly = 0$ 有无限多组正整数解，接着 Mavecha [8]于 2017 年将其推广到 $l \in \{2^n | n \in N\}$，这里的 N 为自然数集。最近，Alkabouss S [9]等人证明了在 $l = 3^n$ 且 $k \equiv 2 \pmod 3$ 时，或者在 $l = 2^r 3^s$ 与 $k = 2k' + 1$ 且 $k' \equiv 2 \pmod 3$ 时，不定方程 $x^2 - kxy + ky^2 + ly = 0$ 有无限多组正整数解，这里的 n、r 与 s 为正整数集。文献[8]与文献[9]证明了不定方程 $x^2 - kxy + ky^2 + ly = 0$ 其 y 的系数为 2、3 的方幂或者 2 与 3 的方幂情况。我们考虑将不定方程 $x^2 - kxy + ky^2 + ly = 0$ 中 y 的系数推广到奇素数的情形。本文借助佩尔方程与取模同余等方法，主要研究在 $d \in \{3,5,7,11,13,17,19\}$ 且 $k \in N^*$ 时，不定方程

$$x^2 - kxy + ky^2 + dy = 0, k, d \in N^* \tag{2}$$

有无限多个正整数解(x, y)当且仅当 $d = 3$，$k = 5, 6, 7$；$d = 5$，$k = 5, 7, 9$；$d = 7$，$k = 5, 8, 11$；$d = 11$，$k = 5, 6, 9, 10, 15$；$d = 13$，$k = 5, 11, 17$；$d = 17$，$k = 5, 7, 11, 13, 21$；$d = 19$，$k = 5, 11, 14, 23$。此外，还给出了 d 为奇素数方程(2)有无限多组正整数解 k 的取值情况。

下面为本文的主要定理及推论，由于证明较长，我们将关键性引理放在第二章，并将主要定理及推论的证明放在第三章。

定理 1 不定方程(2)有无限多组正整数解 (x, y) 的必要条件是：

i) $2 | k$ 时，$k = 2k_1$，$6 \le k \le d + 4$，$k \in N^*$，$\left(\frac{k_1^2 - 2k_1}{d}\right) = 1$；

ii) $2 \nmid k$ 时，$5 \le k \le d + 4$，$k \in N^*$，$\left(\frac{k^2 - 4k}{d}\right) = 1$。

注：无论 d 取何值时，k 的上界 $d + 4$ 与下界 5 均满足不定方程(2)有无限多组正整数解。这里及下文中 $\left(\frac{*}{*}\right)$ 表示 Legendre 符号。由定理 1 直接可得下面的推论：

推论 1 当 $d=3$ 时，方程(2)有无限多组正整数解当且仅当 $k=5,6,7$。

推论 2 当 $d=5$ 时，方程(2)有无限多组正整数解当且仅当 $k=5,7,9$。

推论 3 当 $d=11$ 时，方程(2)有无限多组正整数解当且仅当 $k=5,6,9,10,15$。

推论 4 当 $d=17$ 时，方程(2)有无限多组正整数解当且仅当 $k=5,7,11,13,21$。

定理 2 若素数 $d\equiv 1(\bmod 6)$，则不定方程(2)有无限多组正整数解 (x,y) 的必要条件是：

i) $2|k$ 时，$k=6m+2$，$1\le m\le\left[\dfrac{d+2}{6}\right]$，$m\in N^*$，$\left(\dfrac{9m^2-1}{d}\right)=1$。

ii) $2\nmid k$ 时，$k=6m-1$，$1\le m\le\left[\dfrac{d+5}{6}\right]$，$m\in N^*$，$\left(\dfrac{36m^2-36m+5}{d}\right)=1$。

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分。

定理 3 若素数 $d=6n+1\left(n\in N^*\right)$，则当 $k=5$，$k=3n+5$ 和 $k=6n+5$ 时，不定方程(2)有无限多组正整数解 (x,y)。

由定理 2、定理 3 可得

推论 5 当 $d=7$ 时，方程(2)有无限多组正整数解当且仅当 $k=5,8,11$。

推论 6 当 $d=13$ 时，方程(2)有无限多组正整数解当且仅当 $k=5,11,17$。

推论 7 当 $d=19$ 时，方程(2)有无限多组正整数解当且仅当 $k=5,11,14,23$。

2. 关键性引理

引理 1 [3]设 $d>1$ 且为非平方数，$c\in Z$。若不定方程 $x^2-dy^2=c$ 有一组正整数解满足 $\gcd(x,y)=1$，则必有无限多组正整数解满足 $\gcd(x,y)=1$。

引理 2 [7]若有 $x,y,k\in N^*$ 满足不定方程 $x^2-kxy+ky^2+y=0$，则存在 $c,e\in N^*$ 使得 $x=ce$，$y=c^2$ 且 $\gcd(c,e)=1$。

引理 3 若有 $x,y,k\in N^*$ 及奇素数 d 满足(2)，则存在 $c,e\in N^*$ 使得 $x=ce$，$y=c^2$ 或 $x=dce$，$y=dc^2$ 且 $\gcd(c,e)=1$。

证明 i) 特别地，当 $y=1$ 时，代入方程(2)得到 $x^2-kx+k+d=0$，即 $(2x-k)^2-k^2+4(k+d)=0$。故 $x=\dfrac{k+\sqrt{k^2-4(k+d)}}{2}$。令 $x=e$，则有 $x=ce, y=c^2$ 且 $\gcd(c,e)=1$。

ii) 当 $y\ge 2$ 时，设 q 为任意素数，则由 $q|y$ 知，$q|x$。令 $x=q^t x_1$，$y=q^s y_1$ 且 $q\nmid x_1y_1$

情形 1 $\gcd(x,y,d)=1$。把 x，y 的值代入方程(2)得到

$$q^{2t}x_1^2-q^{s+t}kx_1y_1+q^{2s}ky_1^2+dq^s y_1=0$$

不难推得 $s=2t$。由 q 的任意性知，$x=d_1^{t_1}d_2^{t_2}\cdots d_k^{t_k}\cdot e$，$y=d_1^{2t_1}d_2^{2t_2}\cdots d_k^{2t_k}$，这里 $d_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 是 y 的不同素因数。令 $c=d_1^{t_1}d_2^{t_2}\cdots d_k^{t_k}$，则有 $x=ce$，$y=c^2$ 且 $\gcd(c,e)=1$。

情形 2 $\gcd(x,y,d)=d$。可设 $x=dx_2$，$y=dy_2$，把 x，y 的值代入方程(2)得到

$$d^2x_2^2-kd^2x_2y_2+kd^2y_2^2+d^2y_2=0,$$

化简得 $x_2^2-kx_2y_2+ky_2^2+y_2=0$，由引理 2 知 $x_2=ce$，$y_2=c^2$ 且 $\gcd(c,e)=1$。因此 $x=dce$，$y=dc^2$ 且 $\gcd(c,e)=1$。引理 3 得证。

引理 4 [10]设 $\dfrac{p_n}{q_n}=[a_0,a_1,\cdots,a_n]$ $(0\le n\le N, n\in Z)$ 为连分数 $[a_0,a_1,\cdots,a_n]$ 的第 n 个渐进分数，$d>1$ 且为非平方数及 $(-1)^n Q_n=p_{n-1}^2-dq_{n-1}^2$，则不定方程 $x^2-dy^2=(-1)^n Q_n$ 有正整数解。若 $l\ne(-1)^n Q_n$，且 $|l|<\sqrt{d}$，

则 $x^2-dy^2=l$ 无正整数解。

引理 5 设 d 为奇素数，$k\in N^*$。i) 若 $\gcd(x,y,d)=1$，当 $2|k$ $k\ge 2(d+2)$ 时，方程(2)没有正整数解；当 $2\nmid k$，$k\ge 4d+3$ 时，方程(2)也没有正整数解；ii) $\gcd(x,y,d)=d$，则当且仅当 $k=5$ 时，方程(2)有无限多组正整数解。

证明 i) 当 $\gcd(x,y,d)=1$，将 $x=ce$，$y=c^2$ 代入方程(2)中，有 $e^2-kce+kc^2+d=0$ 即

$$(2e-kc)^2-(k^2-4k)c^2=-4d \tag{3}$$

若 $2|k$ 则设 $k=2k_1$ 有

$$(e-k_1c)^2-(k_1^2-2k_1)c^2=-d \tag{4}$$

由连分数展开，这里 $k_1\ge 3$，$k_1\in Z$。根据引理 4 可知 $d<\sqrt{k_1^2-2k_1}$ 即 $k\ge 2(d+2)$ 时，无正整数 k_1 使(4)式成立，那么方程(2)没有正整数解。若 $2\nmid k$，由连分数展开，这里 $k\ge 5$ 且为奇数。根据引理 4 可知 $4d<\sqrt{k^2-4k}$，即 $k\ge 4d+3$ 时，无正整数 k 使(3)式成立，从而方程(2)也没有正整数解。

ii) $\gcd(x,y,d)=d$，把 $x=dce$，$y=dc^2$ 代入方程(2)中有 $d^2c^2e^2-kd^2c^3e+kd^2c^4+d^2c^2=0$ 即 $c^2e^2-kc^3e+kc^4+c^2=0$ 由文献[6]得 $k=5$ 时，方程(2)有无限多组正整数解。引理 5 得证。

引理 6 [11]设 $N,D\in N^*$ 且 D 为非平方数，$x_0+y_0\sqrt{D}$ 是方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解，若 $u_0+v_0\sqrt{D}$ 是方程 $u^2-Dv^2=-N$ 且 $\gcd(u,v)=1$ 的基本解，则有 $0<v_0\le\frac{y_0\sqrt{N}}{\sqrt{2(x_0-1)}}$，$0\le u_0\le\sqrt{\frac{1}{2}(x_0-1)N}$。

引理 7 [12]设 N,D 为奇正整数且 D 为非平方数，$x_0+y_0\sqrt{D}$ 是方程 $x^2-Dy^2=4$ 且 $\gcd(x,y)=1$ 的基本解，若 $u_0+v_0\sqrt{D}$ 是方程 $u^2-Dv^2=-4N$ 且 $\gcd(u,v)|2$ 的基本解，则有 $0<v_0\le\frac{y_0\sqrt{N}}{\sqrt{x_0-2}}$，$0\le u_0\le\sqrt{(x_0-2)N}$。

引理 8 设 d 为奇素数，$k\in N^*$，$k>4$。i) 若 $2|k$，$k=2k_1$，故 $u_0+v_0\sqrt{k_1^2-2k_1}$ 为方程 $u^2-(k_1^2-2k_1)v^2=-d$ 且 $\gcd(u,v)=1$ 的基本解，则有 $0<v_0\le\frac{1}{\sqrt{k-4}}\sqrt{d}$，$0\le u_0\le\sqrt{\frac{1}{2}(k_1-2)d}$。

ii) 若 $2\nmid k$，$u_0+v_0\sqrt{k^2-4k}$ 是方程 $u^2-(k^2-4k)v^2=-4d$ 且 $\gcd(u,v)|2$ 的基本解，则有 $0<v_0\le\frac{1}{\sqrt{k-4}}\sqrt{d}$，$0\le u_0\le\sqrt{(k-4)d}$。

证明 i) 因为方程 $x^2-(k_1^2-2k_1)y^2=1$ 的基本解是 $x_0=k_1-1$，$y_0=1$。所以由引理 6 知 $0<v_0\le\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{2(k_1-1-1)}}=\frac{1}{\sqrt{k-4}}\sqrt{d}$，$0\le u_0\le\sqrt{\frac{1}{2}(k_1-2)d}$。

ii) 因为方程 $x^2-(k^2-4k)y^2=4$ 的基本解是 $x_0=k-2$，$y_0=1$。所以由引理 7 知 $0<v_0\le\frac{1}{\sqrt{k-4}}\sqrt{d}$，$0\le u_0\le\sqrt{(k-4)d}$。

3. 主要定理及推论的证明

定理 1 的证明：

i) 由引理 5 知，当 $2|k$，$k\ge 2(d+2)$ 时，(2)没有正整数解，$2|k$ 时，$6\le k\le 2(d+1)$。又 $k>d+4$ 时，由引理 8 的 i)知 $0<c\le\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{k-4}}<1$，此时(4)没有正整数解，从而(2)也没有正整数解。再由式(4)知

$(e-k_1c)^2 \equiv (k_1^2-2k_1)c^2 \pmod d$，故

$$\left(\frac{k_1^2-2k_1}{d}\right)=1.$$

ii) 由引理5知，当 $2\nmid k$ 时，$k\ge 4d+3$ 时，(2)没有正整数解，故 $2\nmid k$ 时，$5\le k\le 4d+1$。同理，当 $k>d+4$ 时，由引理 8 的 ii)知 $0<c\le\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{k-4}}<1$，此时(3)没有正整数解，从而(2)也没有正整数解。再由式(3)知 $(2e-kc)^2\equiv(k^2-4k)c^2 \pmod d$，故

$$\left(\frac{k^2-4k}{d}\right)=1.$$

定理 1 得证。

推论 1 的证明：

当 $d=3$ 时。

若 $2\mid k$，则由定理 1 中的 i)知 $k=6$，则 $k_1=3$，式(4)为

$$(e-3c)^2-3c^2=-3. \tag{5}$$

式(5)有一组正整数解 $(e-3c,c)=(0,1)$，即 $(c,e)=(1,3)$。由引理 1 知，方程(2)当 $k=6$ 时有无限多组正整数解。

若 $2\nmid k$，则由定理 1 中的 ii)知 $k=5,7,9,11,13$。当 $k=5$ 时，方程(2)显然有无限多组正整数解。

当 $k=7$ 时，式(3)为

$$(2e-7c)^2-21c^2=-12, \tag{6}$$

式(6)有一组正整数解 $(2e-7c,c)=(3,1)$，即 $(c,e)=(1,5)$。由引理 1 知，方程(2)此时有无限多组正整数解；当 $k=9$ 时，式(3)为

$$(2e-9c)^2-45c^2=-12, \tag{7}$$

对(7)模 5 得 $(2e-9c)^2\equiv 3 \pmod 5$，故 $1=\left(\frac{3}{5}\right)=-1$ 矛盾，即此时方程(2)没有正整数解；

当 $k=11$ 时，式(3)为

$$(2e-11c)^2-77c^2=-12, \tag{8}$$

对(8)式模 11 得 $(2e-11c)^2\equiv -1 \pmod{11}$，故 $1=\left(\frac{-1}{11}\right)=-1$ 矛盾。即此时方程(2)没有正整数解；当 $k=13$ 时，式(3)为

$$(2e-13c)^2-117c^2=-12, \tag{9}$$

由引理 8 中的 ii)知，$0<c\le\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}<1$，又 c 为正整数，故(9)没有正整数解，即方程(2)也没有正整数解。推论 1 得证。

推论 2 的证明：

当 $d=5$ 时。

若 $2\mid k$，则由定理 1 中的 i)知 $k=6,8$。当 $k=5$ 时，对(4)模 5 知，方程(2)没有正整数解；

当 $k=8$ 时，因 $\left(\frac{8^2-32}{5}\right)=-1$，故(2)没有正整数解。

若 $2\nmid k$，则由定理 1 中的 ii)知 $k=5,7,9$。当 $k=5$ 时，方程(2)显然有无限多组正整数解。

当 $k=7$ 时，式(3)为

$$(2e-7c)^2-21c^2=-20, \tag{10}$$

式(10)有一组正整数解 $(2e-7c,c)=(1,1)$，即 $(c,e)=(1,4)$。由引理 1 知，方程(2)此时有无限多组正整数解；当 $k=9$ 时，(3)式为

$$(2e-9c)^2-45c^2=-20, \tag{11}$$

式(11)有一组正整数解 $(2e-9c,c)=(5,1)$，即 $(c,e)=(1,7)$。由引理 1 知，方程(2)此时有无限多组正整数解。推论 2 得证。

推论 3 的证明：

当 $d=11$ 时。

若 $2\mid k$，则由定理 1 中的 i)知 $k=6,8,10,12,14$。

当 $k=6$ 时，令 $k=2k_1$，故 $k_1=3$，代入(4)式为

$$(e-3c)^2-3c^2=-11, \tag{12}$$

显然，式(12)有一组正整数解 $(e-3c,c)=(1,2)$，即 $(c,e)=(2,7)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=10$ 时，令 $k=2k_1$，故 $k_1=5$，代入(4)式为

$$(e-5c)^2-15c^2=-11, \tag{13}$$

显然，式(13)有一组正整数解 $(e-5c,c)=(2,1)$，即 $(c,e)=(1,7)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=8,12,14$ 时，对(4)模 11 知，方程(2)没有正整数解。

若 $2\nmid k$，则由定理 1 中的 ii)知 $k=5,7,9,11,13,15$。

当 $k=9$ 时，方程(2)显然有无限多组正整数解。

当 $k=9$ 时，式(3)为

$$(2e-9c)^2-45c^2=-44, \tag{14}$$

显然，式(14)有一组正整数解 $(2e-9c,c)=(1,1)$，即 $(c,e)=(1,5)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=15$ 时，式(3)为

$$(2e-15c)^2-165c^2=-44, \tag{15}$$

显然，式(15)有一组正整数解 $(2e-15c,c)=(11,1)$，即 $(c,e)=(1,13)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=11$ 时，对(3)模 7 知，方程(2)没有正整数解；当 $k=7,13$ 时，对(3)模 11 知，方程(2)没有正整数解。推论 3 得证。

推论 4 的证明：

当 $d=17$ 时。

若 $2\mid k$，则由定理 1 中的 i)知 $k=6,8,10,12,14,16,18,20$。当 $k=8$ 时，令 $k=2k_1$，故 $k_1=4$，代入(4)式为 $(e-4c)^2-8c^2=-17$，由引理 8 中的 i)知 $0<c\le\frac{\sqrt{17}}{2}<3$，故 $c=1,2$。逐一验证知，(4)式没有正整数解，即方程(2)也没有正整数解；当 $k=6,10,12,16,18$ 时，对(4)模 17 知，方程(2)没有正整数解；当 $k=14,20$

时，对(4)模 5 知，方程(2)没有正整数解。

若 $2\nmid k$，则由定理 1 中的 ii)知 $k=5,7,9,11,13,15,17,19,21$。

当 $k=5$ 时，方程(2)显然有无限多组正整数解。

当 $k=7$ 时，式(3)为

$$(2e-7c)^2-21c^2=-68, \tag{16}$$

显然，式(16)有一组正整数解 $(2e-7c,c)=(4,2)$，即 $(c,e)=(2,9)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=11$ 时，式(3)为

$$(2e-11c)^2-77c^2=-68, \tag{17}$$

显然，式(17)有一组正整数解 $(2e-11c,c)=(3,1)$，即 $(c,e)=(1,7)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=13$ 时，式(3)为

$$(2e-13c)^2-117c^2=-68, \tag{18}$$

显然，式(18)有一组正整数解 $(2e-13c,c)=(7,1)$，即 $(c,e)=(1,10)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=21$ 时，式(3)为

$$(2e-21c)^2-357c^2=-68, \tag{19}$$

显然，式(19)有一组正整数解 $(2e-21c,c)=(17,1)$，即 $(c,e)=(1,19)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=9,15,19$ 时，对(3)模 5 知，方程(2)没有正整数解；当 $k=17$ 时，由引理 8 中的 ii)知 $0<c\le\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17-4}}<2$，故 $c=1$。验证知(3)没有正整数解，即方程(2)也没有正整数解。

定理 2 的证明：

i) 由定理 1 的 i)知，当 $2\mid k$，$6\le k\le d+4$，若 $k_1\equiv -1(\bmod 3)$ 与 $k_1\equiv 0(\bmod 3)$ 时，对方程(4)模 3 得 $(e-k_1c)^2\equiv -d\equiv -1(\bmod 3)$，故 $1=\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$，矛盾，因此 $k_1\equiv 1(\bmod 3)$。此时，$k=6m+2$，$1\le m\le\left[\frac{d+2}{6}\right]$，$m\in N^*$，$\left(\frac{9m^2-1}{d}\right)=1$。

ii) 由定理 1 的 ii)知，当 $2\nmid k$，$5\le k\le d+4$，若 $k\equiv 1(\bmod 3)$ 与 $k\equiv 0(\bmod 3)$ 时，对方程(3)模 3 得 $(2e-kc)^2\equiv -d\equiv -1(\bmod 3)$，故 $1=\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$，矛盾，因此 $k\equiv -1(\bmod 3)$。此时，$k=6m-1$，$1\le m\le\left[\frac{d+5}{6}\right]$，$m\in N^*$，$\left(\frac{36m^2-36m+5}{d}\right)=1$。定理 2 得证。

定理 3 的证明：

$k=5$ 时，不定方程(2)显然有无限多组正整数解。

由于 $k=3n+5$ 时，方程(3)存在一组正整数解 $(c,e)=(1,3n+2)$，$k=6n+5$ 时，方程(3)存在一组正整数解 $(c,e)=(1,6n+3)$，故由引理 1 知，定理 3 得证。

推论 5 的证明：

当 $d=7$ 时。

若 $2\mid k$，则由定理 2 中的 i)知 $k=8$。根据定理 3，$k=8$ 时，方程(2)有无限多组正整数解。

若 $2\nmid k$，则由定理 2 中的 ii)知 $k=5,11$。

当 $k=5$ 时，方程(2)显然有无限多组正整数解。

当 $k=11$ 时，代入(3)式为

$$(2e-11c)^2-77c^2=-28, \tag{20}$$

显然，式(20)有一组正整数解 $(2e-11c,c)=(7,1)$，即 $(c,e)=(1,9)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解。推论 5 得证。

推论 6 的证明：

当 $d=13$ 时。

若 $2|k$，则由定理 2 中的 i)知 $k=8,14$。当 $k=8$ 时，对(4)模 13 知，方程(2)没有正整数解；当 $k=14$ 时，对(4)模 5 知，方程(2)没有正整数解。

若 $2\nmid k$，则由定理 2 中的 ii)知 $k=5,11,17$。

当 $k=5$ 时，方程(2)显然有无限多组正整数解。

当 $k=11$ 时，代入(3)式为

$$(2e-11c)^2-77c^2=-52, \tag{21}$$

显然，式(21)有一组正整数解 $(2e-11c,c)=(5,1)$，即 $(c,e)=(1,8)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=17$ 时，式(3)为

$$(2e-17c)^2-221c^2=-52, \tag{22}$$

显然，式(22)有一组正整数解 $(2e-17c,c)=(13,1)$，即 $(c,e)=(1,15)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解。推论 6 得证。

推论 7 的证明：

当 $d=19$ 时。

若 $2|k$，则由定理 2 中的 i)知 $k=8,14,20$。

当 $k=14$ 时，令 $k=2k_1$，故 $k_1=7$，代入(4)式为

$$(e-7c)^2-35c^2=-19, \tag{23}$$

显然，式(23)有一组正整数解 $(e-7c,c)=(4,1)$，即 $(c,e)=(1,11)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=8$ 时，对(4)模 19 知，方程(2)没有正整数解；当 $k=20$ 时，由引理 8 中的 i)知 $0<c\le\frac{\sqrt{19}}{4}<2$，故 $c=1$。验证知(4)没有正整数解，即方程(2)也没有正整数解。

若 $2\nmid k$，则由定理 2 中的 ii)知 $k=5,11,17,23$。

当 $k=5$ 时，方程(2)显然有无限多组正整数解。

当 $k=11$ 时，代入(3)式为

$$(2e-11c)^2-77c^2=-76, \tag{24}$$

显然，式(24)有一组正整数解 $(2e-11c,c)=(1,1)$，即 $(c,e)=(1,6)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=23$ 时，式(3)为

$$(2e-23c)^2-437c^2=-76, \tag{25}$$

显然，式(25)有一组正整数解 $(2e-23c,c)=(19,1)$，即 $(c,e)=(1,21)$。由引理 1 知，方程(2)有无限多组正整数解；当 $k=17$ 时，由引理 8 中的 ii)知 $0<c\le\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{17}-4}<2$，故 $c=1$。验证知(3)没有正整数解，即

方程(2)也没有正整数解。推论 7 得证。

本文研究的不定方程(2)相较于不定方程 $x^2-kxy+y^2+lx=0$ 来说，是将 y^2 系数由 1 变为 k。本文借助佩尔方程与取模同余等方法，主要研究在 $d\in\{3,5,7,11,13,17,19\}$ 且 $k\in N^*$ 时，不定方程(2)有无限多个正整数解的情况。此外，还给出了 d 为奇素数方程(2)有无限多组正整数解 k 的取值情形。在定理的证明过程中发现，无论 d 取何值时，k 的上界 $d+4$ 与下界 5 均满足不定方程(2)有无限多组正整数解。不定方程(2)中 y 的系数还可作进一步推广，可以考虑 d 大于 19 的素数的情况。最后，论文在程开敏老师、文仕林老师以及审稿专家的指导与建议下完成，在此表示衷心的感谢。

基金项目

阿坝师范学院校级项目(AS-PYYB2023-08)。

参考文献

[1] Marlewsk, A. and Zarzycki, P. (2004) Infinitely Many Positive Solutions of the Diophantine Equation $x^2-kxy+y^2+x=0$. *Computers & Mathematics with Applications*, **47**, 115-121. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(04)90010-7

[2] Yuan, P.Z. and Hu, Y.Z. (2011) On the Diophantine Equation $x^2-kxy+y^2+lx=0$ $l\in\{1,2,4\}$. *Computers & Mathematics with Applications*: *An International Journal*, **61**, 573-577.

[3] 冯丽，袁平之. 关于一类二次不定方程[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2012, 44(2): 46-47.

[4] Hu, Y.Z. and Le, M.H. (2013) On the Diophantine Equation $x^2-kxy+y^2+lx=0$. *Chinese Annals of Mathematics*, *Series B*, **34**, 715-718. https://doi.org/10.1007/s11401-013-0792-x

[5] 樊晖. 关于不定方程 $x^2-kxy+y^2-lx=0$ [D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2015: 7-18.

[6] 管训贵. 关于不定方程 $x^2-kxy+y^2+px=0$ [J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(8): 208-214.

[7] Keskin, R., Şiar, Z. and Karaatli, O. (2013) On the Diophantine Equation $x^2-kxy+y^2-2^n=0$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **63**, 783-797. https://doi.org/10.1007/s10587-013-0052-y

[8] Mavecha, S. (2017) On the Diophantine Equation $x^2-kxy+ky^2+ly=0$ $l=2^n$. *Annals of West University of Timisoara—Mathematics and Computer Science*, **55**, 115-118. https://doi.org/10.1515/awutm-2017-0008

[9] Alkabouss, S.A., Benseba, B., Berbara, N., *et al*. (2021) A Note on the Diophantine Equation $x^2-kxy+ky^2+ly=0$. *Acta Mathematica*, **63**, 151-157. https://doi.org/10.24193/mathcluj.2021.2.01

[10] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1979: 264-287.

[11] 柯召，孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海: 上海教育出版社, 1980: 31-32.

[12] Stolt, B. (1952) On the Diophantine Equation $u^2-Dv^2=\pm 4N$: Part II. *Arkiv för Matematik*, **2**, 251-268. https://doi.org/10.1007/BF02590882