Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(6), 2791-2801
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.136268

Hans汉斯

数论函数方程$Z(n)=\varphi_7(SL(n))$的可解性

向万国，尹　秘，王　军*，钟佐琴
云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2024年5月26日；录用日期：2024年6月21日；发布日期：2024年6月26日

摘　要

本文主要研究数论函数方程$Z(n)=\varphi_7(SL(n))$的可解性。为此，先给出广义欧拉函数$\varphi_7(n)$的表达式。由此，给出$\varphi_7(p^\beta)$的表达式，其中p是素数，且$\beta\in\mathbb{Z}^+$。最后，讨论该方程的可解性，我们证明了其无正整数解。

关键词

欧拉函数，广义欧拉函数，可解性，整数解

The Solvability of Arithmetic Equation $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$

Wanguo Xiang, Mi Yin, Jun Wang*, Zuoqin Zhong
School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: May 26th, 2024; accepted: Jun. 21st, 2024; published: Jun. 26th, 2024

Abstract

In this paper, we mainly study the solvability of the arithmetic equation $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$. For this purpose, we derive the expression of the generalized Euler function $\varphi_7(n)$, from which the formula of $\varphi_7(p^\beta)$ is obtained, where p is prime, and $\beta\in\mathbb{Z}^+$. Afterwards, the solvability of the above equation is discussed, thus drawing the conclusion that it is has no solution in positive integers.

*通讯作者。

文章引用: 向万国, 尹秘, 王军, 钟佐琴. 数论函数方程$Z(n)=\varphi_7(SL(n))$的可解性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(6): 2791-2801. DOI: 10.12677/aam.2024.136268

Keywords

Euler Function, Generalized Euler Function, Solvability, Integer Solution

1. 引言

欧拉函数 $\varphi(n)$ 是定义在正整数集 $\mathbb{Z}^+$ 上的数论函数，表示从序列 $0,1,\cdots,n-1$ 中与 n 互素的数的个数。它在数论中占有重要的地位。例如，原根的刻画，素数定理的证明，RSA 加密算法等都用到它。下面这个重要的同余恒等式也是欧拉函数的一个应用，它是 1938 年由著名数学家 Lehmer [1]得到的，用于证明费马大定理的第一种情形[2]： $x^n+y^n=z^n$， $4|n$ 无正整数解。具体而言，对于任意的奇素数 p，有：

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{i}\equiv -2q_2(p)+pq_2^2(p)\left(mod\ p^2\right),$$

其中 $q_r(n)=\dfrac{r^{\varphi(n)}-1}{n}$， $\varphi(n)$ 是欧拉函数，n 和 r 是大于等于 2 的正整数，且 $\gcd(n,r)=1$， $\gcd(x,y)$ 表示 x 和 y 的最大公因子。

从 2002 年到 2007 年，蔡天新[3] [4]企图将 Lehmer 的上述同余恒等式进行推广：从模为素数的平方推广到模为任意整数的平方。为此，他定义了广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$：

$$\varphi_e(n)=\sum_{\substack{i=1\\ \gcd(i,n)=1}}^{[n/e]}1,$$

即 $\varphi_e(n)$ 等于序列 $0,1,\cdots,[n/e]$ 中与 n 互素的数的个数，其中 $[x]$ 是 Gauss 取整函数。

最近，蔡天新[5] [6]得到了 $\varphi_e(n)(e=2,3,4,6)$ 的表达式。文献[7]使用模 e 相关的同余方程，得到了 $\varphi_e(n)$ 的一个递归公式，且从这个递归公式出发，获得了 $\varphi_e(n)(e=5)$ 的计算公式。但随着 e 的不断增大，这个递归公式变得越来越复杂。本文将对这个递归公式进行深入研究，从而得到广义欧拉函数 $\varphi_7(n)$ 的计算公式，为讨论本文的数论函数方程 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 的可解性作准备。

现在回到我们要讨论的方程本身。它含有 $Z(n)$ 与 $SL(n)$，它们的定义分别如下：对任意的正整数 n，$Z(n)=\min\left\{m:m\in\mathbb{Z}^+,n\,|\,\dfrac{m(m+1)}{2}\right\}$， $SL(n)=\min\left\{m:m\in\mathbb{Z}^+,n\,|\,lcm[1,2,3,\cdots,m]\right\}$。其中 $lcm[x,y]$ 表示 x 和 y 的最小公倍数。前者称之为伪 Smarandache 函数，后者称之为 Smarandache LCM 函数。二者均源于著名数论专家 Smarandache 教授提出的与正整数 n 相关的 Smarandache 函数，都是人们对它的推广。

近来，有许多学者对与伪 Smarandache 函数、Smarandache LCM 函数和广义欧拉函数相关联的数论函数方程进行研究，并取得了一些好的结果。例如，文献[8]中，贺艳峰对方程 $Z(n^2)=\varphi_e(SL(n^2))$ 进行了研究，并给出其所有正整数解。在文献[9]中，王慧莉对方程 $S(SL(n^2))=\varphi_e(n)(e=3,4,6)$ 的可解性进行了研究，给出了其所有正整数解。在文献[10]中，姜莲霞等人讨论了广义欧拉函数 $\varphi_3(n)$ 与欧拉函数 $\varphi(n)$ 混合的方程 $\varphi(xy)=k(\varphi_3(x)+\varphi_3(y))$ 的可解性。文献[11]对 $\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$ 进行了研究，给出了这个方程的一切正整数解。朱杰[12]对方程 $Z(n)=\varphi_e(SL(n))(e=2,3,4,6)$ 进行研究，给出了其所有正整

数解。本文在此基础上，利用得到的 $\varphi_7(n)$ 的计算公式，对方程 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 的可解性进行研究，并给出其无正整数解。

2. 相关定义及引理

定义 1 [7]对任意的正整数 t 和 e，矩阵 $A_e(t)=(a_{i,j})_{1\le i,j\le[(e-1)/2]}$ 为

$$a_{i,j}=\begin{cases}1, & tj\equiv i(mod\ e);\\ -1, & tj\equiv e-i(mod\ e);\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

此外，对任意整数 a 和非负整数 λ，定义

$$\bar{A}_e(a,\lambda)=\begin{cases}A_e(a^\lambda)-A_e(a^{\lambda-1}), & \lambda>0;\\ \mathrm{I}_{\left[\frac{e-1}{2}\right]\times\left[\frac{e-1}{2}\right]}, & \lambda=0.\end{cases}$$

在给出相关引理之前，先规定一些记号。设正整数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$，记 $\Omega(n)$ 为 n 的素因子个数(重复计数)，$\omega(n)$ 为 n 的不同的素因子个数，即 $\Omega(n)=\sum_{i=1}^{s}k_i$，$\omega(n)=s$，并规定 $\Omega(1)=\omega(1)=0$。

对于给定的正整数 n，假设 $n=7^r\prod_{i=1}^{6}\prod_{j=1}^{k_i}p_{i,j}^{r_{i,j}}$，其中 $k_1,\cdots,k_6$ 是正整数，$r,r_{11},\cdots,r_{1,k_1},\cdots,r_{6,1},\cdots,r_{6,k_6}$ 是非负整数；$p_{1,1},\cdots p_{1,k_1},\cdots,p_{6,1},\cdots,p_{6,k_6}$ 是不同的素数，满足 $gcd(p_{i,j},7)=1$，且 $p_{i,j}\equiv i(mod7)$，$(i=1,\cdots,6;\ j=1,\cdots,k_i)$。规定 $\Omega_{l,t}^7(n)$ 是满足条件 $p_{i,j}\equiv l(mod7)$，$r_{i,j}\equiv t(mod6)$ $(l=1,\cdots,6;t=1,\cdots,6)$ 的数 $p_{i,j}^{r_{i,j}}$ 的个数，记 $\Omega_l^7(n)=\sum_{t=1}^{6}\Omega_{l,t}^7(n)$，$\omega_6^7(n)=\sum_{j=0}^{2}\Omega_{6,2j+1}^7(n)$。

引理 1 [7]对于素数 7 和任意的正整数 n 且 $n>7$，假设 $n=7^r\prod_{i=1}^{6}\prod_{j=1}^{k_i}p_{i,j}^{r_{i,j}}$，则

$$\varphi_7(n)=\begin{cases}\frac{1}{7}\varphi(n), & r\ge 2\text{ or }\Omega_1^7(n)\ge 1;\\ \frac{1}{7}\varphi(n)+\frac{(-1)^{r+\omega_6(n)}2^{\Omega_6^7(n)-1}}{7}\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}^T\prod_{i=2}^{5}\prod_{j=1}^{6}\bar{A}_7(i,j)^{\Omega_{i,j}^7(n)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

引理 2 [12]设正整数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$，则

$$SL(n)=\max\{p_i^{k_i}\mid i=1,2,\cdots,s\}$$

特别地，当 p 为素数及 $k\ge 1$时，$SL(p^k)=p^k$。

3. 主要定理及证明

由引理 1 可知，为了得出 $\varphi_7(n)$ 的准确表达式，还需对 $\prod_{i=2}^{5}\prod_{j=1}^{6}\bar{A}_7(i,j)^{\Omega_{i,j}^7(n)}$ 进行讨论。易知，这个部分是 24 个矩阵的任意次幂的乘积，是一个非常复杂的部分。通过简单的计算，可以得出这 24 个矩阵分别是

$$\bar{A}_7(2,1)=\bar{A}_7(2,4)=D,\ \bar{A}_7(4,1)=\bar{A}_7(4,4)=M^5D,\ \bar{A}_7(2,2)=\bar{A}_7(2,5)=M^4D$$

$$\bar{A}_7(4,2)=\bar{A}_7(4,5)=MD,\ \bar{A}_7(2,3)=\bar{A}_7(2,6)=M^2D,\ \bar{A}_7(4,3)=\bar{A}_7(4,6)=M^3D$$

$$\bar{A}_7(3,1)=\bar{A}_7(5,3)=B,\ \bar{A}_7(3,4)=\bar{A}_7(5,6)=M^3B,\ \bar{A}_7(3,2)=\bar{A}_7(5,2)=M^5B$$

$$\bar{A}_7(3,5)=\bar{A}_7(5,5)=M^2B,\ \bar{A}_7(3,3)=\bar{A}_7(5,1)=M^4B,\ \bar{A}_7(3,6)=\bar{A}_7(5,4)=MB$$

其中 $B=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=-\left(I+M^2\right)$， $D=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}=-\left(I+M\right)$。

$$M^r=\begin{cases}\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, & r\equiv 1(mod 6)\\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}, & r\equiv 2(mod 6)\\ -I_{3\times3}, & r\equiv 3(mod 6)\\ \begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}, & r\equiv 4(mod 6)\\ \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, & r\equiv 5(mod 6)\\ I_{3\times3}, & r\equiv 6(mod 6)\end{cases}$$

为了方便表达，我们先规定一些记号。令 $\alpha=\Omega_2^7(n)+\Omega_4^7(n)$， $\beta=\Omega_3^7(n)+\Omega_5^7(n)$，

$$\theta=2\left(\Omega_{4,1}^7(n)+\Omega_{4,4}^7(n)+\Omega_{2,3}^7(n)+\Omega_{2,6}^7(n)+\Omega_{3,2}^7(n)+\Omega_{5,2}^7(n)+\Omega_{3,5}^7(n)+\Omega_{5,5}^7(n)\right.$$
$$\left.+\Omega_{3,6}^7(n)+\Omega_{5,4}^7(n)\right)+\Omega_{2,2}^7(n)+\Omega_{2,5}^7(n)+\Omega_{4,2}^7(n)+\Omega_{4,5}^7(n)+\Omega_{3,3}^7(n)+\Omega_{5,1}^7(n),$$

$$\bar{\Omega}=\Omega_{2,1}^7(n)+\Omega_{2,4}^7(n)+\Omega_{2,3}^7(n)+\Omega_{2,6}^7(n)+\Omega_{3,1}^7(n)+\Omega_{5,3}^7(n)+\Omega_{4,2}^7(n)+\Omega_{4,5}^7(n)$$
$$+\Omega_{3,5}^7(n)+\Omega_{5,5}^7(n).$$

$$[i]_n=\binom{n}{i}+\cdots+\binom{n}{3\ell+i}+\cdots,(i=0,1,2),\langle k\rangle_n=\binom{n}{k}+\cdots+\binom{n}{6\ell+k}+\cdots,(0\le k\le 5)$$

其中 ℓ 是正整数，则有 $\prod_{i=2}^{5}\prod_{j=1}^{6}\bar{A}_7(i,j)^{\Omega_{i,j}^7(n)}=(-1)^{\bar{\Omega}}\cdot M^{\theta}\cdot\left(I+M^2\right)^{\alpha}\cdot\left(I+M\right)^{\beta}$。

命题 1 关于规定的 $[0]_n,[1]_n,[2]_n$ 和 $\langle 0\rangle_n,\langle 1\rangle_n,\langle 2\rangle_n,\langle 3\rangle_n,\langle 4\rangle_n,\langle 5\rangle_n$ 有如下运算法则。

(i) $[0]_n=[0]_{n-1}+[2]_{n-1}$， $[1]_n=[0]_{n-1}+[1]_{n-1}$， $[2]_n=[1]_{n-1}+[2]_{n-1}$。

(ii) $\langle 0\rangle_n=\langle 0\rangle_{n-1}+\langle 5\rangle_{n-1}$， $\langle 1\rangle_n=\langle 0\rangle_{n-1}+\langle 1\rangle_{n-1}$， $\langle 2\rangle_n=\langle 1\rangle_{n-1}+\langle 2\rangle_{n-1}$。

(iii) $\langle 3\rangle_n=\langle 2\rangle_{n-1}+\langle 3\rangle_{n-1}$， $\langle 4\rangle_n=\langle 3\rangle_{n-1}+\langle 4\rangle_{n-1}$， $\langle 5\rangle_n=\langle 4\rangle_{n-1}+\langle 5\rangle_{n-1}$。

证明：利用帕斯卡恒等式 $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$，即可得到(i)、(ii)、(iii)。

定理 1 对于任意的非负整数 α，关于 $[0]_\alpha$、$[1]_\alpha$ 和 $[2]_\alpha$，我们有如下结论

1) 若 $\alpha=3\ell$，则有 $[1]_\alpha=[2]_\alpha$ 成立，此时 $\left(I+M^2\right)^\alpha=\begin{pmatrix}[0]_\alpha & [1]_\alpha & -[1]_\alpha\\ [1]_\alpha & [0]_\alpha & -[1]_\alpha\\ -[1]_\alpha & -[1]_\alpha & [0]_\alpha\end{pmatrix}$。

a) 若 $\ell\equiv 0(mod\,2)$，则 $[0]_\alpha-1=[1]_\alpha=[2]_\alpha$ 成立，且 $[0]_\alpha=\dfrac{2^\alpha+2}{3}$，$[1]_\alpha=\dfrac{2^\alpha+2}{3}-1$；

b) 若 $\ell\equiv 1(mod\,2)(\ell\ge 3)$，则 $[0]_\alpha+1=[1]_\alpha=[2]_\alpha$ 成立，$[0]_\alpha=\dfrac{2^\alpha-2}{3}$，$[1]_\alpha=\dfrac{2^\alpha-2}{3}+1$。

2) 若 $\alpha=3\ell+1$，则有 $[0]_\alpha=[1]_\alpha$ 成立，此时 $\left(I+M^2\right)^\alpha=\begin{pmatrix}[0]_\alpha & [0]_\alpha & -[2]_\alpha\\ [2]_\alpha & [0]_\alpha & -[0]_\alpha\\ -[0]_\alpha & -[2]_\alpha & [0]_\alpha\end{pmatrix}$。

a) 若 $\ell\equiv 0(mod\,2)$，则 $[2]_\alpha+1=[0]_\alpha=[1]_\alpha$ 成立，且 $[2]_\alpha=\dfrac{2^\alpha-2}{3}$，$[0]_\alpha=\dfrac{2^\alpha-2}{3}+1$；

b) 若 $\ell\equiv 1(mod\,2)$，则 $[2]_\alpha-1=[0]_\alpha=[1]_\alpha$ 成立，且 $[2]_\alpha=\dfrac{2^\alpha+2}{3}$，$[0]_\alpha=\dfrac{2^\alpha+2}{3}-1$。

3) 若 $\alpha=3\ell+2$，则有 $[0]_\alpha=[2]_\alpha$ 成立，此时 $\left(I+M^2\right)^\alpha=\begin{pmatrix}[0]_\alpha & [1]_\alpha & -[0]_\alpha\\ [0]_\alpha & [0]_\alpha & -[1]_\alpha\\ -[1]_\alpha & -[0]_\alpha & [0]_\alpha\end{pmatrix}$。

a) 若 $\ell\equiv 0(mod\,2)$，则 $[1]_\alpha-1=[0]_\alpha=[2]_\alpha$ 成立，且 $[1]_\alpha=\dfrac{2^\alpha+2}{3}$，$[0]_\alpha=\dfrac{2^\alpha+2}{3}-1$；

b) 若 $\ell\equiv 1(mod\,2)$，则 $[1]_\alpha+1=[0]_\alpha=[2]_\alpha$ 成立，且 $[1]_\alpha=\dfrac{2^\alpha-2}{3}$，$[0]_\alpha=\dfrac{2^\alpha-2}{3}+1$。

证明：因为 2)和 3)可类比 1)进行证明，故在此只证明 1)。$[1]_\alpha=[2]_\alpha$ 是显然的。下面，我们用数学归纳法来完成 a)的证明。

a) 若 $\ell\equiv 0(mod\,2)$，即 $\ell=2t$，对 t 进行归纳。当 $t=1$，显然有结论成立。当 $t=k$ 时，假设命题成立，即当 $\alpha=6k$ 时，有 $[0]_{6k}-1=[1]_{6k}=[2]_{6k}$ 成立。当 $t=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}[0]_{6k+6}-[1]_{6k+6}&=\left([0]_{6k+5}+[2]_{6k+5}-[0]_{6k+5}-[1]_{6k+5}\right)=[2]_{6k+5}-[1]_{6k+5}\\&=[2]_{6k+4}-[0]_{6k+4}=[1]_{6k+3}-[0]_{6k+3}=[1]_{6k+2}-[2]_{6k+2}\\&=[0]_{6k+1}-[2]_{6k+1}=[0]_{6k}-[1]_{6k}=1\end{aligned}$$

因此有 $[0]_{6k+6}-[1]_{6k+6}=1$，由此便知当 $t=k+1$ 时，结论成立。

b) 若 $\ell\equiv 1(mod\,2)$ $\ell\ge 3$，即 $\ell=2t+1$，对 t 进行归纳。此时归纳证明过程与 a)相似，证明细节留给感兴趣的读者。

定理 2 对于任意的非负整数 β，关于 $\langle 0\rangle_\beta,\langle 1\rangle_\beta,\langle 2\rangle_\beta,\langle 3\rangle_\beta,\langle 4\rangle_\beta,\langle 5\rangle_\beta$，我们有如下结论。

1) 若 $\beta=6\ell$，则有 $\langle 1\rangle_\beta=\langle 5\rangle_\beta$，$\langle 2\rangle_\beta=\langle 4\rangle_\beta$，且 $\ell\ge 2$ 时，成立 $\langle 1\rangle_\beta-\langle 2\rangle_\beta=(-1)^\ell 3^{\frac{\beta-2}{2}}$，$\langle 0\rangle_\beta-\langle 3\rangle_\beta=2\cdot(-1)^\ell 3^{\frac{\beta-2}{2}}$。此时有 $(I+M)^\beta=(-1)^\ell 3^{\frac{\beta-2}{2}}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$。

2) 若 $\beta=6\ell+1$，则有 $\langle 0\rangle_\beta=\langle 1\rangle_\beta$，$\langle 2\rangle_\beta=\langle 5\rangle_\beta$，$\langle 3\rangle_\beta=\langle 4\rangle_\beta$，且 $\langle 0\rangle_\beta-\langle 3\rangle_\beta=(-1)^\ell 3^{\frac{\beta-1}{2}}$。此时有

$$(I+M)^{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}。$$

3) 若 $\beta=6\ell+2$，则有 $\langle 2\rangle_{\beta}=\langle 0\rangle_{\beta}$，$\langle 3\rangle_{\beta}=\langle 5\rangle_{\beta}$，$\langle 0\rangle_{\beta}-\langle 3\rangle_{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-2}{2}}$，且有 $\langle 1\rangle_{\beta}-\langle 4\rangle_{\beta}=2(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-2}{2}}$。此时有 $(I+M)^{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-2}{2}}\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&1&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$。

4) 若 $\beta=6\ell+3$，则有 $\langle 5\rangle_{\beta}=\langle 4\rangle_{\beta}$，$\langle 1\rangle_{\beta}=\langle 2\rangle_{\beta}$，$\langle 0\rangle_{\beta}=\langle 3\rangle_{\beta}$，且 $\langle 1\rangle_{\beta}-\langle 4\rangle_{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-1}{2}}$。此时有

$$(I+M)^{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-1}{2}}\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}。$$

5) 若 $\beta=6\ell+4$，则有 $\langle 0\rangle_{\beta}=\langle 4\rangle_{\beta}$，$\langle 1\rangle_{\beta}=\langle 3\rangle_{\beta}$，且有 $\langle 1\rangle_{\beta}-\langle 0\rangle_{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-2}{2}}$，$\langle 2\rangle_{\beta}-\langle 5\rangle_{\beta}=2\cdot(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-2}{2}}$。此时有 $(I+M)^{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-2}{2}}\begin{pmatrix}-1&2&1\\-1&-1&-2\\-2&-1&-1\end{pmatrix}$。

6) 若 $\beta=6\ell+5$，则有 $\langle 0\rangle_{\beta}=\langle 5\rangle_{\beta}$，$\langle 1\rangle_{\beta}=\langle 4\rangle_{\beta}$，$\langle 2\rangle_{\beta}=\langle 3\rangle_{\beta}$，且 $\langle 2\rangle_{\beta}-\langle 0\rangle_{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-1}{2}}$。此时有

$$(I+M)^{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-1}{2}}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}。$$

证明：1) 若 $\beta=6\ell$，显然有 $\langle 1\rangle_{\beta}=\langle 5\rangle_{\beta}$，$\langle 2\rangle_{\beta}=\langle 4\rangle_{\beta}$，下面我们通过数学归纳法，来完成 $\langle 1\rangle_{\beta}-\langle 2\rangle_{\beta}=(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-2}{2}}$，$\langle 0\rangle_{\beta}-\langle 3\rangle_{\beta}=2\cdot(-1)^{\ell}3^{\frac{\beta-2}{2}}$ 的证明。

当 $\ell=2$，即 $\beta=12$ 时，显然有结论成立。当 $\ell=k$，即 $\beta=6k$ 时，假设有 $\langle 1\rangle_{6k}-\langle 2\rangle_{6k}=(-1)^{k}3^{\frac{6k-2}{2}}$，$\langle 0\rangle_{6k}-\langle 3\rangle_{6k}=2\cdot(-1)^{k}3^{\frac{6k-2}{2}}$ 成立。当 $\ell=k+1$ 时

$$\begin{aligned}&\langle 1\rangle_{6k+6}-\langle 2\rangle_{6k+6}\\&=\left(\langle 1\rangle_{6k+5}+\langle 0\rangle_{6k+5}-\langle 1\rangle_{6k+5}-\langle 2\rangle_{6k+6}\right)\\&=5\left(\langle 4\rangle_{6k+1}-\langle 0\rangle_{6k+1}\right)+4\left(\langle 3\rangle_{6k+1}-\langle 1\rangle_{6k+1}\right)\\&=(-1)^{k+1}3^{\frac{6k-2}{2}+3}=(-1)^{k+1}3^{\frac{6k+4}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle 0\rangle_{6k+6}-\langle 3\rangle_{6k+6}\\&=3\left(\langle 5\rangle_{6k+3}+\langle 4\rangle_{6k+3}-\langle 2\rangle_{6k+3}-\langle 1\rangle_{6k+3}\right)\\&=18\left(\langle 3\rangle_{6k}-\langle 0\rangle_{6k}\right)+18\left(\langle 2\rangle_{6k}-\langle 1\rangle_{6k}\right)\\&=2(-1)^{k+1}3^{\frac{6k+4}{2}}\end{aligned}$$

由此便知当 $\ell=k+1$ 时，结论依然成立。其余情形的证明和(1)相似。

定理 3 我们给出广义欧拉函数 $\varphi_7(n)$ 的部分表示表达式，其余情形可类似给出。

$$\varphi_7(n)=\begin{cases}\frac{1}{7}\varphi(n), & \text{if } r\geq 2 \text{ or } \Omega_1^7(n)\geq 1;\\ \frac{1}{7}\varphi(n)+\frac{1}{7}(-1)^{\left(r+\omega_6(n)+\bar{\Omega}+1\right)}2^{\Omega_6^7(n)}\cdot 3^{\frac{\beta-1}{2}} & \text{if } C_7(2,1,1) \text{ holds;}\\ \frac{1}{7}\varphi(n)+\frac{1}{7}(-1)^{\left(r+\omega_6(n)+\bar{\Omega}\right)}2^{\Omega_6^7(n)+1}\cdot 3^{\frac{\beta-1}{2}} & \text{if } C_7(2,1,2) \text{ holds;}\\ \frac{1}{7}\varphi(n)+\frac{5}{7}(-1)^{\left(r+\omega_6(n)+\bar{\Omega}\right)}2^{\Omega_6^7(n)}\cdot 3^{\frac{\beta-2}{2}} & \text{if } C_7(3,2,1) \text{ holds;}\\ \frac{1}{7}\varphi(n)+\frac{1}{7}(-1)^{\left(r+\omega_6(n)+\bar{\Omega}\right)}2^{\Omega_6^7(n)+2}\cdot 3^{\frac{\beta-2}{2}} & \text{if } C_7(3,2,2) \text{ holds;}\\ \frac{1}{7}\varphi(n)+\frac{1}{7}(-1)^{\left(r+\omega_6(n)+\bar{\Omega}\right)}2^{\Omega_6^7(n)}\cdot 3^{\frac{\beta-1}{2}} & \text{if } C_7(4,3,1) \text{ holds.}\end{cases}$$

其中 $\omega_6(n)=\Omega_{6,1}^7(n)+\Omega_{6,3}^7(n)+\Omega_{6,5}^7(n)$，
$\bar{\Omega}=\Omega_{2,1}^7(n)+\Omega_{2,4}^7(n)+\Omega_{2,3}^7(n)+\Omega_{2,6}^7(n)+\Omega_{3,1}^7(n)+\Omega_{5,3}^7(n)+\Omega_{4,2}^7(n)+\Omega_{4,5}^7(n)+\Omega_{3,5}^7(n)+\Omega_{5,5}^7(n)$。

$C_7(i,j,k)(1\leq i\leq 6, 0\leq j\leq 5, k=0,1,2)$ 表示同余方程组

$$\begin{cases}\theta\equiv i(mod 6);\\ \beta=\Omega_3^7(n)+\Omega_5^7(n)\equiv j(mod 6);\\ \alpha=\Omega_2^7(n)+\Omega_4^7(n)\equiv k(mod 3).\end{cases}$$

证明：由定理 1 和定理 2 和引理 1，通过简单的计算即可得出结论。

推论 1 若正整数 $n=7^\beta$，则 $\varphi_7(n)=\frac{1}{7}\varphi(7^\beta)$，其中 $\beta\geq 2$ 为整数。

推论 2 若正整数 $n=p^\beta$，其中 p 为素数，且 $(p,7)=1$ 则有如下结论。为了叙述方便，先规定记号 $\delta(i,j)=\begin{cases}1, & \text{if } \beta\equiv i(mod 6)\\ -1, & \text{if } \beta\equiv j(mod 6)\end{cases}(1\leq i,j\leq 6)$。

1) 若 $p\equiv 1(mod 7)$，则 $\Omega_1^7(n)=\Omega_1^7(p^\beta)=1$，故 $\varphi_7(p^\beta)=\frac{1}{7}\varphi(p^\beta)$。

2) 若 $p\equiv 2(mod 7)$，则

$$\varphi_7(p^\beta)=\begin{cases}\frac{\varphi(p^\beta)-1}{7}, & \text{if } \beta\equiv 1,4(mod 6);\\ \frac{\varphi(p^\beta)-2}{7}, & \text{if } \beta\equiv 2,5(mod 6);\\ \frac{\varphi(p^\beta)+3}{7}, & \text{if } \beta\equiv 3,6(mod 6).\end{cases}$$

3) 若 $p\equiv 3(mod 7)$，则

$$\varphi_7(p^\beta)=\begin{cases}\frac{\varphi(p^\beta)+2\delta(1,4)}{7}, & \text{if } \beta\equiv 1,4(mod 6);\\ \frac{\varphi(p^\beta)+\delta(2,5)}{7}, & \text{if } \beta\equiv 2,5(mod 6);\\ \frac{\varphi(p^\beta)+4\delta(3,6)}{7}, & \text{if } \beta\equiv 3,6(mod 6).\end{cases}$$

4) 若 $p\equiv 4(mod7)$，则

$$\varphi_7\left(p^\beta\right)=\begin{cases}\dfrac{\varphi\left(p^\beta\right)-3}{7}, \text{ if } \beta\equiv 1,4(mod6);\\ \dfrac{\varphi\left(p^\beta\right)+2}{7}, \text{ if } \beta\equiv 2,5(mod6);\\ \dfrac{\varphi\left(p^\beta\right)+1}{7}, \text{ if } \beta\equiv 3,6(mod6).\end{cases}$$

5) 若 $p\equiv 5(mod7)$，则

$$\varphi_7\left(p^\beta\right)=\begin{cases}\dfrac{\varphi\left(p^\beta\right)+4\delta(1,4)}{7}, \text{ if } \beta\equiv 1,4(mod6);\\ \dfrac{\varphi\left(p^\beta\right)+\delta(2,5)}{7}, \text{ if } \beta\equiv 2,5(mod6);\\ \dfrac{\varphi\left(p^\beta\right)+2\delta(3,6)}{7}, \text{ if } \beta\equiv 3,6(mod6).\end{cases}$$

6) 若 $p\equiv 6(mod7)$，则

$$\varphi_7\left(p^\beta\right)=\begin{cases}\dfrac{\varphi\left(p^\beta\right)-5}{7}, \text{ if } \beta\equiv 1,3,5(mod6);\\ \dfrac{\varphi\left(p^\beta\right)+5}{7}, \text{ if } \beta\equiv 2,4,6(mod6).\end{cases}$$

证明：1)是显然的，下面来证明 2)的第 1 种情形，其余情形可类似证明。如果 $\beta\equiv 1(mod6)$，则 $\Omega_{2,1}^7(n)=\Omega_{2,1}^7\left(p^\beta\right)=1$，由引理 1 得

$$\begin{aligned}\varphi_7\left(p^\beta\right)&=\frac{1}{7}\varphi(n)+\frac{(-1)^{v_1}2^{v_2}}{7}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\prod_{i=2}^{5}\prod_{j=1}^{6}\bar{A}_7(i,j)^{\Omega_{i,j}^7(n)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{7}\varphi\left(p^\beta\right)+\frac{1}{14}\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\bar{A}_7(2,1)^{\Omega_{2,1}^7\left(p^\beta\right)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{7}\varphi\left(p^\beta\right)+\frac{1}{14}(-2)\\&=\frac{\varphi\left(p^\beta\right)-1}{7}.\end{aligned}$$

如果 $\beta\equiv 4(mod6)$，则 $\varphi_7\left(p^\beta\right)=\dfrac{\varphi\left(p^\beta\right)-1}{7}$ 是显然的。

定理 4 数论函数方程

$$Z(n)=\varphi_7\left(SL(n)\right)$$

无正整数解。

证明：当 $n=1$ 时， $Z(1)=1$，而 $\varphi_7\left(SL(1)\right)=\varphi_7(1)=0$，显然 1 不是方程的解。现在设

$n=2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} \geq 2$，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 为不同的奇素数，$k \geq 0, s \geq 0$，且 $k_i \geq 0 (i=1,\cdots,s)$，但 k,s,k_i 不同时取 0。

1) 若 $2^k \geq \max\{2^k, p_i^{k_i}\}$，则必有 $k \geq 1$。当 $k=1$ 时，即 $n=2$，$\varphi_7(SL(2))=\varphi_7(2)=0$，而 $Z(2)=3$，显然 $Z(2)\neq\varphi_7(SL(2))$，故此时方程无解。考虑 $k \geq 2$ 的情形，此时 $SL(n)=2^k$。若 $k=2$，则 $\varphi_7(SL(n))=\varphi_7(4)=0$，而从 $Z(n)$ 的定义可知 $Z(n)\neq 0$，故此时方程无解。若 $k \geq 3$，则考虑如下 3 种情形。

(i) 若 $k \equiv 0(mod 3)$，则 $\varphi_7(SL(n))=\varphi_7(2^k)=\frac{\varphi(2^k)+3}{7}=\frac{2^{k-1}+3}{7}$。如果有 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义必成立

$$2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} \mid \frac{\left(\frac{2^{k-1}+3}{7}\right)\left(\frac{2^{k-1}+3}{7}+1\right)}{2}$$

故有 $2^{k+1}7^2 p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} \mid (2^{k-1}+3)(2^{k-1}+10)$ 成立，由此可知 $2^k \mid (2^{k-1}+3)(2^{k-2}+5)$。断言 $(2^k, 2^{k-1}+3)=1$，故有 $2^k \mid (2^{k-2}+5)$，而此式不可能成立，由此可知方程无解。

(ii) 若 $k \equiv 1,2(mod 3)$，这两种情形的讨论和(i)相似，故在此不再赘述。

2) 若 $p_s^{k_s} \geq \max\{2^k, p_i^{k_i}\}$，则必有 $k_s \geq 1$。故由引理2，可知 $SL(n)=p_s^{k_s}$，因此 $\varphi_7(SL(n))=\varphi_7(p_s^{k_s})$，为了计算 $\varphi_7(p_s^{k_s})$ 的值，将对 p_s 分 7 种情况进行讨论。

(1°) 若 $p_s=7$，当 $k_s=1$ 时，即 $7=p_s \geq \max\{2^k, p_i^{k_i}\}$。故 $k=0,1$ 或 2，$s=1,2$ 或 3，则 $n=7,21,35,105,14,42,70,210,28,84,140,420$。因为 $\varphi_7(SL(n))=\varphi_7(p_s)=\varphi_7(7)=1$。然而，通过计算可知，无论 n 取上述何值，都有 $Z(n)\neq 1$，故此时方程无解。

若 $p_s=7$，当 $k_s \geq 2$ 时，由推论 1 知 $\varphi_7(SL(n))=\varphi_7(p_s^{k_s})=\frac{1}{7}\varphi_7(7^{k_s})=6\cdot 7^{k_s-2}$。如果方程 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义必成立

$$2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} \mid \frac{(6\cdot 7^{k_s-2})(6\cdot 7^{k_s-2}+1)}{2}$$

故有 $2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} \mid (3\cdot 7^{k_s-2})(6\cdot 7^{k_s-2}+1)$ 成立，显然有 $2 \mid (6\cdot 7^{k_s-2}+1)$。然而，此式不可能成立，故此时方程 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 无解。

(2°) 若 $p_s \equiv 1(mod 7)$，则由推论 2 知 $\varphi_7(p_s^{k_s})=\frac{1}{7}\varphi(p_s^{k_s})=\frac{1}{7}p_s^{k_s-1}(p_s-1)$。如果方程 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义及整除的性质可知 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1))(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+7)$ 成立，$\gcd(p_s^{k_s-1}(p_s-1), p_s^{k_s-1}(p_s-1)+7)=1$ 或者 7，无论何种情形均有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1))$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+7)$ 成立。显然，上述两式均不可能成立，故此时方程无解。

(3°) 若 $p_s \equiv 2(mod 7)$，则分如下 3 种情形进行讨论。

(i) 若 $k_s \equiv 1,4(mod 6)$，则 $\varphi_7(SL(n))=\varphi_7(p_s^{k_s})=\frac{\varphi(p_s^{k_s})-1}{7}=\frac{p_s^{k_s-1}(p_s-1)-1}{7}$。如果有 $Z(n)=\varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义及整除的性质，可知 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)-1)(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+6)$ 成立。显然有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)-1)$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+6)$ 成立。而上述两式均不可能成立。

(ii) 若 $k_s \equiv 2,5(mod 6)$ 或者 $k_s \equiv 3,6(mod 6)$，这两种情形的讨论和(i)相似。

(4°) 若 $p_s \equiv 3(mod 7)$，分 3 种情况进行讨论。

(i) 若 $k_s \equiv 1,4(mod6)$，则根据推论 $2\varphi_7(SL(n)) = \varphi_7(p_s^{k_s}) = \dfrac{\varphi(p_s^{k_s}) + 2\delta(1,4)}{7}$。先看 $k_s \equiv 1(mod6)$，且 $p_s = 3$ 的情形，若 $k_s = 1$，则 $\varphi_7(SL(n)) = \varphi_7(3) = 0$，而 $Z(n) \neq 0$，此时方程无解。若 $p_s = 3$，且 $k_s \neq 1$ 的情形，此时 $\varphi_7(SL(n)) = \varphi_7(3^{k_s}) = \dfrac{\varphi(3^{k_s}) - 2}{7} = \dfrac{2\cdot 3^{k_s-1} - 2}{7}$。如果有 $Z(n) = \varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义，成立

$$2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s} \mid \frac{\left(\frac{2\cdot 3^{k_s-1}-2}{7}\right)\left(\frac{2\cdot 3^{k_s-1}-2}{7}+1\right)}{2}$$

故有 $3^{k_s} \mid (2\cdot 3^{k_s-1}-2)(2\cdot 3^{k_s-1}+5)$ 成立，由此可知 $3^{k_s} \mid (2\cdot 3^{k_s-1}-2)$ 或者 $3^{k_s} \mid (2\cdot 3^{k_s-1}+5)$，显然上述两式均不可能成立，故此时方程无解。

其余情形，即 $k_s \equiv 1(mod6)$ $p_s \neq 3$ 和 $k_s \equiv 4(mod6)$，则 $\varphi_7(SL(n)) = \varphi_7(p_s^{k_s}) = \dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1) + 2\delta(1,4)}{7}$。如果有 $Z(n) = \varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义及整除的性质，可知，有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1) + 2\delta(1,4))$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1) + 2\delta(1,4) + 7)$ 成立。此时上述两式均不可能成立，由此便推出矛盾。

(ii) 若 $k_s \equiv 2,5(mod6)$，则根据推论 2 知，$\varphi_7(SL(n)) = \varphi_7(p_s^{k_s}) = \dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1) + \delta(2,5)}{7}$。如果有 $Z(n) = \varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义及整除的性质，可知，必定有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1) + \delta(2,5))$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1) + \delta(2,5) + 7)$ 成立，显然这是一个矛盾。故此时方程无解。

(iii) 若 $k_s \equiv 3,6(mod6)$，这种情形的讨论和(ii)相似。

(5°) 若 $p_s \equiv 4(mod7)$，分 3 种情况进行讨论。

(i) 若 $k_s \equiv 1,4(mod6)$，则 $\varphi_7(SL(n)) = \varphi_7(p_s^{k_s}) = \dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1) - 3}{7}$。如果有 $Z(n) = \varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义及整除性质，可知 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)-3)(p_s^{k_s-1}(p_s-1)+4)$ 成立，显然有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)-3)$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+4)$ 成立。而上述两式均不可能成立，故此时方程无解。

(ii) 如果 $k_s \equiv 2,5(mod6)$ 或者 $k_s \equiv 3,6(mod6)$，这两种情形的讨论和(i)相似。

(6°) 若 $p_s \equiv 5(mod7)$，从推论 2 可以看出，这种情形和(4°)中的讨论是一样的，在此不再赘述。

(7°) 若 $p_s \equiv 6(mod7)$，分 2 种情况进行讨论。

(i) 若 $k_s \equiv 1,3,5(mod6)$，则 $\varphi_7(SL(n)) = \varphi_7(p_s^{k_s}) = \dfrac{p_s^{k_s-1}(p_s-1) - 5}{7}$ 如果有 $Z(n) = \varphi_7(SL(n))$ 成立，则根据 $Z(n)$ 的定义及整除的性质，有 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)-5)$ 或者 $p_s^{k_s} \mid (p_s^{k_s-1}(p_s-1)+2)$ 成立。而上述两式均不可能成立，故此时方程无解。

(ii) 若 $k_s \equiv 2,4,6(mod6)$，这种情形的讨论和(i)是相似的。

由此便完成了定理 4 的证明。

4. 结语

本文主要研究数论函数方程 $Z(n) = \varphi_7(SL(n))$ 的可解性。为此，先给出广义欧拉函数 $\varphi_7(n)$ 的表达式。由此，给出 $\varphi_7(p^\beta)$ 的表达式，其中 p 是素数，且 $\beta \in \mathbb{Z}^+$。最后，讨论该方程的可解性，我们证明了其无正整数解。在此基础上，可进一步讨论数论函数方程 $Z(n) = \varphi_p(SL(n))$ 的可解性，其中 p 是任意

的奇素数。

参考文献

[1] Lehmer, E. (1938) On Congruences Involving Bernoulli Numbers and the Quotients of Fermat and Wilson. *The Annals of Mathematics*, **39**, 350-360. https://doi.org/10.2307/1968791

[2] Ribenboim, P. (1979) 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. Springer-Verlag.

[3] Cai, T. (2002) A Congruence Involving the Quotients of Euler and Its Applications (I). *Acta Arithmetica*, **103**, 313-320.

[4] Cai, T.X., Fu, X.D. and Zhou, X. (2007) A Congruence Involving the Quotients of Euler and Its Applications (II). *Acta Arithmetica*, **130**, 203-214.

[5] Cai, T.X., Shen, Z.Y. and Hu, M.J. (2013) On the Parity of the Generalized Euler Function. *Advances in Mathematics* (*China*), **42**, 505-510.

[6] Shen, Z.Y., Cai, T.X. and Hu, M.J. (2016) On the Parity of the Generalized Euler function (II). *Advances in Mathematics* (*China*), **45**, 509-519.

[7] Zhu, C. and Liao, Q.Y. (2022) A Recursion Formula for the Generalized Euler Function $\varphi_e(n)$. https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.10870

[8] 贺艳峰，李超，韩帆，薛媛媛. 数论函数方程 $Z(n^2)=\varphi_e(SL(n^2))$ 的可解性研究[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2023: 1-8. http://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1212.N.20231018.1016.004.html, 2024-03-31.

[9] 王慧莉，廖群英，任磊. 方程 $S(SL(n))=\varphi_e(n)(e=3,4,6)$ 的可解性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2022, 45(5): 595-604.

[10] 姜莲霞，张四保. 有关广义欧拉函数 $\varphi_3(n)$ 的一方程的解[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2020, 41(6): 1-5.

[11] 张四保. 数论函数方程 $\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$ 的可解性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(4): 65-69.

[12] 朱杰，廖群英. 方程 $Z(n)=\varphi_e(SL(n))$ 的可解性[J]. 数学进展, 2019, 48(5): 541-554.