Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(6), 2822-2832**
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.136271

Hans汉斯

存零约束优化问题的目标罚函数法

吴　越

长沙理工大学数学与统计学院，湖南　长沙

收稿日期：2024年5月26日；录用日期：2024年6月21日；发布日期：2024年6月26日

摘　要

存零约束优化问题是一类特殊的约束优化问题。若 $\bar{x}$ 是该问题的最优解，由于存零约束，导致通常的约束规范在 $\bar{x}$ 处不成立，因此有些算法不能直接应用于求解存零约束优化问题。本文在求解传统非线性规划的目标罚函数方法的基础上，提出了一种求解存零约束优化问题的目标罚函数方法，在一定的条件下证明了目标罚函数的局部最优解是原问题的局部最优解，以及目标罚函数算法产生的迭代点列的极限点是原问题的弱稳定点。数值算例表明，本文所提出的目标罚函数方法是有效的。

关键词

存零约束，目标罚函数方法，非线性规划

Objective Penalty Function Method for Mathematical Program with Switching Constraints

Yue Wu

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science & Technology, Changsha Hunan

Received: May 26th, 2024; accepted: Jun. 21st, 2024; published: Jun. 26th, 2024

Abstract

The mathematical program with switching constraints is a special type of constrained optimization problem. If $\bar{x}$ is the optimal solution of the problem, due to the switching constraints, the usual constraint specification does not hold at $\bar{x}$, so some algorithms cannot be directly applied to solve the mathematical program with switching constraints. On the basis of solving the objective penalty function method for traditional nonlinear programming, this article proposes an objective penalty function method for solving mathematical program with switching constraints.

文章引用: 吴越. 存零约束优化问题的目标罚函数法[J]. 应用数学进展, 2024, 13(6): 2822-2832.
DOI: 10.12677/aam.2024.136271

Under certain conditions, it is proved that the local optimal solution of the objective penalty function is the local optimal solution of the original problem, and the limit point of the iterative point sequence generated by the objective penalty function algorithm is the weakly stationary point of the original problem. Numerical examples show that the objective penalty function method proposed in this paper is effective.

Keywords

Switching Constraint, Objective Penalty Function Method, Nonlinear Programming

1. 引言

考虑如下存零约束优化问题

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{s.t.}\ & g_i(x) \le 0,\quad i=1,\cdots,m, \\ & h_j(x) = 0,\quad j=1,\cdots,p, \\ & G_s(x)H_s(x) = 0,\quad s=1,\cdots,l, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $f,h_1,\cdots,h_p,g_1,\cdots,g_m,G_1,\cdots,G_l,H_1,\cdots,H_l:R^n\to R$ 都是连续可微的。$f(x)$ 为目标函数，

$$g_i(x)\le 0,\ \ i=1,\cdots,m,\ \ h_j(x)=0,\ \ j=1,\cdots,p,$$

称为一般约束条件，

$$G_s(x)H_s(x)=0,\ \ s=1,\cdots,l, \tag{1.2}$$

称为存零约束条件。记问题(1.1)的可行域为

$$X:=\left\{x\in R^n \mid g_i(x)\le 0, i=1,\cdots,m; h_j(x)=0, j=1,\cdots,p; G_sH_s(x)=0, s=1,\cdots,l\right\},$$

我们称这样的问题(1.1)为存零约束优化问题(Mathematical Program with Switching Constraints)，简称 MPSC。

2019 年，Mehlitz [1]首次引入 MPSC，该问题与互补约束优化问题[2] [3] (简称 MPCC)、消失约束优化问题[4] [5] (简称 MPVC)、析取约束优化问题(简称 MPDC) [6] [7]等密切相关。MPSC 具有特殊结构，它不满足一些常见的约束规范，故需要建立适用于 MPSC 的稳定点概念和约束规范。因此，Mehlitz [1]引入一些适用于 MPSC 的稳定点概念(例如弱稳定点、Mordukhovich-稳定点(简称 M-稳定点)和强稳定点等)，并给出一些 MPSC 的约束规范(例如 MPSC Mangasarian-Fromovitz 约束规范(简称 MPSC-MFCQ)、MPSC 线性独立约束规范(简称 MPSC-LICQ)等)。

Liang 等人[6]将 MPSC 表述为 MPDC，结合近年来 MPDC 的约束规范和最优性条件，将其应用于 MPSC，并且推导出 MPSC 的局部误差界和精确惩罚结果的充分条件。Mehlitz [7]在 MPDC 的线性无关约束规范成立的情况下，推导 MPDC 的一阶、二阶最优性条件，并且将其应用于 MPSC，得到 MPSC 的二阶最优性条件。Li 等人[8]证明了在 MPSC Guignard 约束规范(简称 MPSC-GCQ)成立时，MPSC 的局部

极小点是 Bouligand-稳定点(简称 B-稳定点)。并且 Li 等人[8]扩展非线性规划中的一些约束规范应用于 MPSC。这些约束规范都严格弱于 MPSC-MFCQ 和 MPSC-LICQ，当约束规范成立时，MPSC 的局部极小点是 M-稳定点。

存零约束条件的存在使得非线性规划的算法不能直接应用于求解 MPSC. Kanzow 等人[9]引入松弛因子，将几种常用的 MPCC 松弛方法应用于求解 MPSC。Kanzow 等人[9]指出，虽然 Scholtes 的方法、Steffensen 和 Ulbrich 的松弛方法在一定条件下产生的迭代点列收敛到 MPSC 的弱稳定点，但在合理的假设条件下，Kanzow 和 Schwartz 的松弛方法产生的迭代点列能够收敛到 MPSC 的 M-稳定点。张婷婷等人[10]将存零约束作为罚项加入到目标函数中，提出部分罚函数方法，证明了在 MPSC-LICQ 成立的情况下，部分罚函数问题的迭代点列的聚点是 MPSC 的弱稳定点。罗美玲等人[11]针对 MPSC，提出 Wolfe 型对偶模型，在凸性和严格凸性假设下，给出 MPSC 的 Wolfe 对偶问题的弱、强、逆、限制逆和严格逆对偶结果。Jinman 等人[12]研究含非 Lipschitz 项的存零约束优化问题，给出了求解非 Lipschitz 项 MPSC 的一种近似方法，利用局部 Lipschitz 函数来近似非 Lipschitz 项，并证明了该近似方法生成的迭代点列的聚点在 MPSC-MFCQ 约束规范成立时是 MPSC 的弱稳定点，在二阶必要条件和 MPSC-MFCQ 约束规范成立时是 MPSC 的强稳定点。

本文，我们将罚参数与目标函数、约束函数结合，基于互补约束优化目标罚函数方法，提出存零约束优化问题的目标罚函数方法。本文将在第 2 节介绍基本概念。第 3 节讨论原问题与罚函数问题在最优解方面的关系，同时给出目标罚函数算法，分析算法迭代点列的收敛性。第 4 节给出算法的数值实验结果。最后，第 5 节对全文进行总结。

2. 基本概念及目标罚函数方法

首先，为了便于符号标注，我们定义了在 MPSC 任意一个可行点 $\bar{x}\in R^n$ 处的指标集：

$$
\begin{aligned}
&I^h(\bar{x}) := \{1,2,\cdots,p\},\\
&I^g(\bar{x}) := \{i\in\{1,2,\cdots,m\} \mid g_i(\bar{x})=0\},\\
&I^G(\bar{x}) := \{s\in\{1,2,\cdots,l\} \mid G_s(\bar{x})=0 \wedge H_s(\bar{x})\neq 0\},\\
&I^H(\bar{x}) := \{s\in\{1,2,\cdots,l\} \mid G_s(\bar{x})\neq 0 \wedge H_s(\bar{x})=0\},\\
&I^{GH}(\bar{x}) := \{s\in\{1,2,\cdots,l\} \mid G_s(\bar{x})=0 \wedge H_s(\bar{x})=0\},
\end{aligned}
$$

其中，$I^G(\bar{x})$，$I^H(\bar{x})$，$I^{GH}(\bar{x})$ 是 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的互不相交的分区。

接下来，我们给出关于 MPSC 的弱稳定点概念。

定义 2.1 [1]设 $\bar{x}\in R^n$ 是问题(1.1)的一个可行点，如果存在乘子 $(\lambda,\rho,\mu,\nu)\in R^m\times R^p\times R^l\times R^l$ 使得

$$
\begin{gathered}
0=\nabla f(\bar{x})+\sum_{i\in I^g(\bar{x})}\lambda_i\nabla g_i(\bar{x})+\sum_{j\in I^h(\bar{x})}\rho_j\nabla h_j(\bar{x})+\sum_{s=1}^{l}\left(\mu_s\nabla G_s(\bar{x})+\nu_s\nabla H_s(\bar{x})\right),\\
\forall i\in I^g(\bar{x}):\ \lambda_i\geq 0,\quad \forall s\in I^H(\bar{x}):\ \mu_s=0,\quad \forall s\in I^G(\bar{x}):\ \nu_s=0,
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

成立，则 $\bar{x}$ 是弱稳定点。

由于 MPSC 问题中的存零约束，使得通常的约束规范不满足。本文考虑将罚参数放入目标函数，先定义函数

$$
P(x)=\sum_{j=1}^{p}h_j^2(x)+\sum_{i=1}^{m}\max\{g_i(x),0\}^2+\sum_{s=1}^{l}\left(G_s(x)H_s(x)\right)^2,
\tag{2.2}
$$

$\forall x\in R^n$，有 $P(x)\geq 0$。当 $\forall\bar{x}\in X$，有 $P(\bar{x})=0$。

同时构造目标罚函数

$$F(x,M)=\max\{f(x)-M,0\}^2+M^2P(x),$$

其中 M 是罚参数，并且 $M<0$。$\forall x\in R^n$，有 $F(x,M)\geq 0$。

由此构造如下无约束优化罚问题

$$\begin{aligned}&\min \quad F(x,M)\\&\text{s.t.} \quad x\in R^n.\end{aligned} \tag{2.3}$$

本文接下来讨论存零约束优化问题与无约束优化罚问题在最优解方面的关系，同时给出该问题的算法框架，分析目标罚函数方法最优解点列的收敛性。

3. 算法及主要理论结果

我们先考虑问题(1.1)与问题(2.3)之间最优解方面的关系。

定理 3.1 $\hat{x}_M$ 是问题(2.3)的局部最优解，M 是一个常数，$M<f(\hat{x}_M)$。如果点 $\hat{x}_M$ 是问题(1.1)的可行点，则 $\hat{x}_M$ 是问题(1.1)的局部最优解。

证明：如果 $\hat{x}_M$ 是问题(1.1)的可行点，我们有 $\hat{x}_M\in X$，$P(\hat{x}_M)=0$，

$$F(\hat{x}_M,M)=\max\{f(\hat{x}_M)-M,0\}^2, \tag{3.1}$$

由 $\hat{x}_M$ 是问题(2.3)的局部最优解，则对任意的 $x\in R^n$，

$$F(\hat{x}_M,M)\leq F(x,M), \tag{3.2}$$

此外，存在某常数 $\delta>0$，$x'\in B(\hat{x}_M,\delta)=\{x\in R^n \mid \|x-\hat{x}_M\|_2\leq\delta\}$，由(3.1)，(3.2)及 $M<f(\hat{x}_M)$，可得 $\forall x'\in B(\hat{x}_M)\cap X$，

$$0<\max\{f(\hat{x}_M)-M,0\}^2=F(\hat{x}_M,M)\leq F(x',M)=\max\{f(x')-M,0\}^2,$$

因此，我们有 $f(\hat{x}_M)-M\leq f(x')-M$。

由此可得 $\forall x'\in B(\hat{x}_M)\cap X$，$f(\hat{x}_M)\leq f(x')$。$\hat{x}_M$ 是问题(1.1)的局部最优解。

基于上面的讨论，我们给出一种求解问题(1.1)的局部最优解的算法，我们称之为MPSC的目标罚函数算法，其步骤如下：

算法 3.1

步 1 任选 $x_0\in R^n$ 和 $M_1<0$，$N>1$，$k=1$。

步 2 以 x_{k-1} 为初始点，求解

$$x_k\in\arg\min_{x\in R^n}\{F(x,M_k)\}。$$

步 3 如果 x_k 是问题(1.1)的可行点，且 $M_k<f(x_k)$，则停止。

步 4 令 $M_{k+1}:=NM_k$，$k:=k+1$，转步 2。

注 1 本算法中步 2 出现的最优解是指局部最优解。

注 2 为了使算法可行，假设罚函数 $F(x,M_k)$ 有局部最优解。

关于算法 3.1 的收敛性，我们有如下结果。

定理 3.2 假设 f，$g_i(i\in\{1,2,\cdots,m\})$，$h_j(j\in\{1,2,\cdots,p\})$，$G_s,H_s(s\in\{1,2,\cdots\})$ 在 R^n 上连续，且 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}f(x)=+\infty$。$\{x_k\}$ 是算法 3.1 得到的点列。

1) 如果 $\{x_k\}(k=1,2,\cdots,\bar{k})$ 是有限点列。即算法 3.1 在第 $\bar{k}$ 次迭代终止，则 $x_{\bar{k}}$ 是问题(1.1)的最优解。

2) 如果$\{x_k\}$是无限点列，$\{f(x_k)\}$是有界的，并且满足

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{F(x_k,M_k)}{M_k^2}=0,$$

则$\{x_k\}$是有界的，$\{x_k\}$的任意极限点$\bar{x}$是问题(1.1)的可行点且是问题(1.1)的弱稳定点。

证 1) 如果算法 3.1 在第$\bar{k}$次迭代终止，则有$x_{\bar{k}}$是问题(1.1)的可行点，且$M_{\bar{k}}<f(x_{\bar{k}})$。由定理 3.1，可得$x_{\bar{k}}$是问题(1.1)的最优解。

2) 首先，我们注意到$\{f(x_k)\}$是有界的，又因为$\lim_{\|x\|\to\infty}f(x)=+\infty$，有$\{x_k\}$是有界的。不失一般性，假设当$k\to+\infty$，$x_k\to\bar{x}$，我们有

$$\begin{aligned}\nabla F(x_k,M_k)&=2\max\{f(x_k)-M_k,0\}\nabla f(x_k)+M_k^2\sum_{i=1}^{m}2\max\{g_i(x_k),0\}\nabla g_i(x_k)\\&+M_k^2\sum_{s=1}^{l}2G_s(x_k)H_s(x_k)\big(G_s(x_k)\nabla H_s(x_k)+H_s(x_k)\nabla G_s(x_k)\big)\\&+M_k^2\sum_{j=1}^{q}2h_j(x_k)\nabla h_j(x_k),\end{aligned}\tag{3.3}$$

展开，

$$\begin{aligned}\nabla F(x_k,M_k)&=2\max\{f(x_k)-M_k,0\}\nabla f(x_k)+M_k^2\sum_{i=1}^{m}2\max\{g_i(x_k),0\}\nabla g_i(x_k)\\&+M_k^2\sum_{j=1}^{q}2\max\{h_j(x_k),0\}\nabla h_j(x_k)-M_k^2\sum_{j=1}^{q}2\max\{-h_j(x_k),0\}\nabla h_j(x_k)\\&+M_k^2\sum_{s=1}^{l}2H_s^2(x_k)\max\{G_s(x_k),0\}\nabla G_s(x_k)\\&-M_k^2\sum_{s=1}^{l}2H_s^2(x_k)\max\{-G_s(x_k),0\}\nabla G_s(x_k)\\&+M_k^2\sum_{s=1}^{l}2G_s^2(x_k)\max\{H_s(x_k),0\}\nabla H_s(x_k)\\&-M_k^2\sum_{s=1}^{l}2G_s^2(x_k)\max\{-H_s(x_k),0\}\nabla H_s(x_k),\end{aligned}$$

其中$k=1,2,\cdots$。

$\{x_k\}$是无限点列，因为$M_{k+1}=NM_k$，且$N>1$，$M_k<0$，可得$M_k\to-\infty$。由于$\{f(x_k)\}$是有界的，这意味着存在一个常数$k'>0$，$\forall k>k'$，我们有$M_k<f(x_k)$，从而

$$\begin{aligned}\omega_k&=2\max\{f(x_k)-M_k,0\}+M_k^2\sum_{i=1}^{m}2\max\{g_i(x_k),0\}\\&+M_k^2\sum_{j=1}^{q}2\max\{h_j(x_k),0\}+M_k^2\sum_{j=1}^{q}2\max\{-h_j(x_k),0\}\\&+M_k^2\sum_{s=1}^{l}2H_s^2(x_k)\max\{G_s(x_k),0\}+M_k^2\sum_{s=1}^{l}2H_s^2(x_k)\max\{-G_s(x_k),0\}\\&+M_k^2\sum_{s=1}^{l}2G_s^2(x_k)\max\{H_s(x_k),0\}+M_k^2\sum_{s=1}^{l}2G_s^2(x_k)\max\{-H_s(x_k),0\},\end{aligned}$$

因此，$\forall k>k'$，$\omega_k>0$。

特别，$\forall k>k'$，令

$$\alpha^k=\frac{2\max\left\{f\left(x_k\right)-M_k,0\right\}}{\omega_k},$$

$$\lambda_i^k=\frac{2M_k^2}{\omega_k}\max\left\{g_i\left(x_k\right),0\right\},\ \ i=1,2,\cdots,m,$$

$$\rho_j^{k_1}=\frac{2M_k^2}{\omega_k}\max\left\{h_j\left(x_k\right),0\right\},\ \ j=1,2,\cdots,p,$$

$$\rho_j^{k_2}=\frac{2M_k^2}{\omega_k}\max\left\{-h_j\left(x_k\right),0\right\},\ \ j=1,2,\cdots,p,$$

$$\mu_s^{k_1}=\frac{2M_k^2}{\omega_k}H_s^2\left(x_k\right)\max\left\{G_s\left(x_k\right),0\right\},\ \ s=1,2,\cdots,l,$$

$$\mu_s^{k_2}=\frac{2M_k^2}{\omega_k}H_s^2\left(x_k\right)\max\left\{-G_s\left(x_k\right),0\right\},\ \ s=1,2,\cdots,l,$$

$$\nu_s^{k_1}=\frac{2M_k^2}{\omega_k}G_s^2\left(x_k\right)\max\left\{H_s\left(x_k\right),0\right\},\ \ s=1,2,\cdots,l,$$

$$\nu_s^{k_2}=\frac{2M_k^2}{\omega_k}G_s^2\left(x_k\right)\max\left\{-H_s\left(x_k\right),0\right\},\ \ s=1,2,\cdots,l,$$

我们有

$$\alpha^k+\sum_{i=1}^m\lambda_i^k+\sum_{j=1}^p\rho_j^{k_1}+\sum_{j=1}^p\rho_j^{k_2}+\sum_{s=1}^l\mu_s^{k_1}+\sum_{s=1}^l\mu_s^{k_2}+\sum_{s=1}^l\nu_s^{k_1}+\sum_{s=1}^l\nu_s^{k_2}=1,\forall k>k', \tag{3.4}$$

$$\alpha^k>0,\ \ \lambda_i^k,\rho_j^{k_1},\rho_j^{k_2},\mu_s^{k_1},\mu_s^{k_2},\nu_s^{k_1},\nu_s^{k_2}\geq 0,\ \ \forall k>k',$$

显然，当$k\to+\infty$，序列$\left\{\alpha^k,\lambda_i^k,\rho_j^{k_1},\rho_j^{k_2},\mu_s^{k_1},\mu_s^{k_2},\nu_s^{k_1},\nu_s^{k_2}\right\}$是收敛的。则当$k\to+\infty$，有

$$\alpha^k\to\alpha>0,\ \ \ \lambda_i^k\to\lambda_i\geq 0,\ \ \ i=1,2,\cdots,m,$$
$$\rho_j^{k_1}\to\rho_j^1\geq 0,\ \ \rho_j^{k_2}\to\rho_j^2\geq 0,\ \ j=1,2,\cdots,p,$$
$$\mu_s^{k_1}\to\mu_s^1\geq 0,\ \ \mu_s^{k_2}\to\mu_s^2\geq 0,\ \ s=1,2,\cdots,l,$$
$$\nu_s^{k_1}\to\nu_s^1\geq 0,\ \ \nu_s^{k_2}\to\nu_s^2\geq 0,\ \ \ s=1,2,\cdots,l,$$

根据$\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{F\left(x_k,M_k\right)}{M_k^2}=0$，且$F\left(x_k,M_k\right)=\max\left\{f\left(x_k\right)-M_k,0\right\}^2+M_k^2P\left(x_k\right)\geq 0$，则当$k\to+\infty$，$x_k\to\overline{x}$，有$P\left(\overline{x}\right)=0$。因此，点$\overline{x}$是问题(1.1)的可行点。

考虑$\forall i\notin I^g\left(\overline{x}\right)$，有$g_i\left(\overline{x}\right)<0$。由于

$$\lambda_i^k=\frac{2M_k^2}{\omega_k}\max\left\{g_i\left(x_k\right),0\right\},\ \ i=1,2,\cdots,m,$$

则当 k 充分大时，$\forall i\notin I^g\left(\overline{x}\right)$，$\lambda_i^k=0$。因此，我们有$\forall i\notin I^g\left(\overline{x}\right)$，$\lambda_i=0$。又因为$\lambda_i^k\to\lambda_i\geq 0$，$i=1,2,\cdots,m$，则$\forall i\in I^g\left(\overline{x}\right)$，$\lambda_i\geq 0$。

当$k\to+\infty$，令

$$\rho_j^k=\rho_j^{k_1}-\rho_j^{k_2}\to\rho_j=\rho_j^1-\rho_j^2,\ \ j=1,2,\cdots,p,$$
$$\mu_s^k=\mu_s^{k_1}-\mu_s^{k_2}\to\mu_s=\mu_s^1-\mu_s^2,\ \ s=1,2,\cdots,l,$$
$$\nu_s^k=\nu_s^{k_1}-\nu_s^{k_2}\to\nu_s=\nu_s^1-\nu_s^2,\ \ \ s=1,2,\cdots,l,$$

现在我们考虑证明 $\forall s\in I^G(\bar{x})$，$\lim\limits_{k\to\infty}\nu_s^k$ 存在，有 $\nu_s=\lim\limits_{k\to\infty}\nu_s^k=0$。同理当 $\forall s\in I^H(\bar{x})$，$\lim\limits_{k\to\infty}\mu_s^k$ 存在，有 $\mu_s=\lim\limits_{k\to\infty}\mu_s^k=0$。

反证法，$\forall s\in I^G(\bar{x})$，假设 $\lim\limits_{k\to\infty}\nu_s^k$ 不存在。即假设存在一个正数 $a>0$ 和 $\{\nu_s^k\}$ 的子序列(不失一般性，用序列本身代替)，当 k 充分大时，使得 $|\nu_s^k|\ge a$。则

$$\begin{aligned}\frac{|\nu_s^k|}{|\mu_s^k|}&=\frac{\left|2M_k^2G_s^2(x_{k+1})\left(\max\{H_s(x_{k+1}),0\}-\max\{-H_s(x_{k+1}),0\}\right)\right|}{\left|2M_k^2H_s^2(x_{k+1})\left(\max\{G_s(x_{k+1}),0\}-\max\{-G_s(x_{k+1}),0\}\right)\right|}\\&=\frac{\left|2M_k^2G_s^2(x_{k+1})H_s(x_{k+1})\right|}{\left|2M_k^2H_s^2(x_{k+1})G_s(x_{k+1})\right|},\end{aligned}$$

$\forall s\in I^G(\bar{x})$，当 $k\to+\infty$，有

$$\frac{|\nu_s^k|}{|\mu_s^k|}=\frac{|G_s(x_{k+1})|}{|H_s(x_{k+1})|}\to 0,\quad |\mu_s^k|\to+\infty, \tag{3.5}$$

同理，$\forall s\in I^H(\bar{x})$，假设 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_s^k$ 不存在。即假设存在一个正数 $b>0$ 和 $\{\mu_s^k\}$ 的子序列(不失一般性，用序列本身代替)，当 k 充分大时，使得 $|\mu_s^k|\ge b$。则

$$\begin{aligned}\frac{|\mu_s^k|}{|\nu_s^k|}&=\frac{\left|2M_k^2H_s^2(x_{k+1})\left(\max\{G_s(x_{k+1}),0\}-\max\{-G_s(x_{k+1}),0\}\right)\right|}{\left|2M_k^2G_s^2(x_{k+1})\left(\max\{H_s(x_{k+1}),0\}-\max\{-H_s(x_{k+1}),0\}\right)\right|}\\&=\frac{\left|2M_k^2H_s^2(x_{k+1})G_s(x_{k+1})\right|}{\left|2M_k^2G_s^2(x_{k+1})H_s(x_{k+1})\right|},\end{aligned}$$

$\forall s\in I^H(\bar{x})$，当 $k\to+\infty$，有

$$\frac{|\mu_s^k|}{|\nu_s^k|}=\frac{|H_s(x_{k+1})|}{|G_s(x_{k+1})|}\to 0,\quad |\nu_s^k|\to+\infty, \tag{3.6}$$

由等式(3.4)，可得当 $k\to+\infty$，序列 $\{\mu_s^{k_1},\mu_s^{k_2},\nu_s^{k_1},\nu_s^{k_2}\}$ 是收敛的，这与上式(3.5)，(3.6)矛盾。

因此，有 $\forall s\in I^G(\bar{x})$，$\lim\limits_{k\to\infty}\nu_s^k$ 存在，且 $\nu_s=\lim\limits_{k\to\infty}\nu_s^k=0$。$\forall s\in I^H(\bar{x})$，$\lim\limits_{k\to\infty}\mu_s^k$ 存在，且 $\mu_s=\lim\limits_{k\to\infty}\mu_s^k=0$ 成立。

此外，由等式(3.3)，当 $k\to+\infty$，存在 $\alpha>0$，$\rho_j\left(j\in I^h(\bar{x})\right)$，$\lambda_i\ge 0\left(i\in I^g(\bar{x})\right)$，$\lambda_i=0\left(i\notin I^g(\bar{x})\right)$，$\mu_s=0\left(s\in I^H(\bar{x})\right)$，$\nu_s=0\left(s\in I^G(\bar{x})\right)$ 有

$$\alpha\nabla f(\bar{x})+\sum_{j\in I^h(\bar{x})}\rho_j\nabla h_j(\bar{x})+\sum_{i\in I^g(\bar{x})}\lambda_i\nabla g_i(\bar{x})+\sum_{s=1}^{l}\left(\mu_s\nabla G_s(\bar{x})+\nu_s\nabla H_s(\bar{x})\right)=0$$

同除以 α，令

$$\frac{\lambda_i}{\alpha}=\tilde{\lambda}_i,\ i=1,2,\cdots,m,\quad \frac{\rho_j}{\alpha}=\tilde{\rho}_j,\ j=1,2,\cdots,p,$$
$$\frac{\mu_s}{\alpha}=\tilde{\mu}_s,\ s=1,2,\cdots,l,\quad \frac{\nu_s}{\alpha}=\tilde{\nu}_s,\ s=1,2,\cdots,l,$$

可得

$$0=\nabla f(\bar{x})+\sum_{i\in I^g(\bar{x})}\tilde{\lambda}_i\nabla g_i(\bar{x})+\sum_{j\in I^h(\bar{x})}\tilde{\rho}_j\nabla h_j(\bar{x})+\sum_{s=1}^{l}\left(\tilde{\mu}_s\nabla G_s(\bar{x})+\tilde{v}_s\nabla H_s(\bar{x})\right),$$
$$\forall i\in I^g(\bar{x}):\ \tilde{\lambda}_i\ge 0,\ \ \forall s\in I^H(\bar{x}):\ \tilde{\mu}_s=0,\ \ \forall s\in I^G(\bar{x}):\ \tilde{v}_s=0,$$

由定义 2.1，则点 $\bar{x}$ 是问题(1.1)的弱稳定点成立。

4. 数值实验

本文对算法 3.1，通过数值计算的角度，检验其数值效果及其可行性。为了使算法可行，在算法 3.1 中的无约束优化问题求解局部极小点时可以采用 BFGS、梯度下降法等无约束算法。我们将用 MATLAB R2022b 来求解 MPSC 相关文献的例子，并将算法 3.1 中的条件 x_k 是问题(1.1)的可行点用 $P(x_k)\le\varepsilon$ 代替，取 $\varepsilon=e^{-10}$，求解存零约束优化问题的近似局部最优解。

例 1 [10]

$$\begin{aligned}\min\ \ & f(x)=(x_1+1)^2+x_2^2\\ \text{s.t.}\ \ & -x_1+x_2\le 0,\\ & x_1^2-x_2\le 0,\\ & x_1x_2=0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

考虑目标罚函数

$$F(x,M)=\max\left\{(x_1+1)^2+x_2^2-M,0\right\}^2+M^2\left[\max\left\{-x_1+x_2,0\right\}^2+\max\left\{x_1^2-x_2,0\right\}^2+(x_1x_2)^2\right],$$

其中约束优化问题(4.1)的最优解为 $(0,0)$，最优值为 1。

选取初始点 $x_0=(2,5)$，$N=2$，由不同的罚参数 M_1 得到的计算结果如表 1 所示。

Table 1. The calculation results of different penalty parameters M_1 in Example 1
表 1. 例 1 不同罚参数 M_1 的计算结果

M_1	x_k	$f(x_k)$	M_k	$P(x_k)$	k
−2	(1.0e−05*−0.7631, 1.0e−05*−0.3814)	1.0000	−524,288	2.9115e−11	18
−5	(1.0e−04*−0.1221, 1.0e−04*−0.0610)	1.0000	−327,680	7.4506e−11	16
−27	(1.0e−05*−0.9045, 1.0e−05*−0.4516)	1.0000	−442,368	4.0909e−11	14
−41	(1.0e−04*−0.1191, 1.0e−04*−0.0596)	1.0000	−335,872	7.0894e−11	13
−79	(1.0e−04*−0.1236, 1.0e−04*−0.0618)	1.0000	−323,584	7.6384e−11	12
−113	(1.0e−05*−0.8640, 1.0e−05*−0.4324)	1.0000	−462,848	3.7327e−11	12

选取初始点 $x_0=(2,5)$，$M_1=-5$，由不同的迭代因子 N 得到的计算结果如表 2 所示。

Table 2. The calculation results of different iteration factors N in Example 1
表 2. 例 1 不同迭代因子 N 的计算结果

N	x_k	$f(x_k)$	M_k	$P(x_k)$	k
2	(1.0e−04*−0.1221, 1.0e−04*−0.0610)	1.0000	−327,680	7.4506e−11	16
3	(1.0e−04*−0.1355, 1.0e−04*−0.0677)	1.0000	−295,245	9.1782e−11	10

续表

4	(1.0e−04*−0.1220, 1.0e−04*−0.0611)	1.0000	−327,680	7.4482e−11	8
7	(1.0e−05*−0.6800, 1.0e−05*−0.3399)	1.0000	−588,245	2.3121e−11	6
11	(1.0e−05*−0.4968, 1.0e−05*−0.2482)	1.0000	−805,255	1.2343e−11	5
13	(1.0e−05*−0.2154, 1.0e−05*−0.1079)	1.0000	−1,856,465	2.3192e−12	5

选取罚参数 $M_1 = -5$， $N = 2$，不同初始点 x_0 得到的计算结果如表 3 所示。

Table 3. The calculation results of different initial points x_0 in Example 1
表 3. 例 1 不同初始点 x_0 的计算结果

x_0	x_k	$f(x_k)$	M_k	$P(x_k)$	k
(42, 11)	(1.0e−04*−0.1221, 1.0e−04*−0.0610)	1.0000	−327,680	7.4506e−11	15
(−35, 29)	(1.0e−04*−0.1221, 1.0e−04*−0.0610)	1.0000	−327,680	7.4506e−11	13
(12, −87)	(1.0e−04*−0.1221, 1.0e−04*−0.0610)	1.0000	−327,680	7.4506e−11	11
(25, 57)	(1.0e−04*−0.1221, 1.0e−04*−0.0610)	1.0000	−327,680	7.4506e−11	11
(61, 123)	(1.0e−04*−0.1221, 1.0e−04*−0.0610)	1.0000	−327,680	7.4506e−11	10

例 2 [9]

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = x_1x_2 - x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ & x_1x_2 = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

考虑目标罚函数

$$F(x,M) = \max\{x_1x_2 - x_1 - x_2 - M, 0\}^2 + M^2\left[\max\{x_1^2 + x_2^2 - 1, 0\}^2 + (x_1x_2)^2\right],$$

其中约束优化问题(4.2)的最优解为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$，最优值为−1。

选取初始点 $x_0 = (3,5)$， $N = 2$，由不同的罚参数 M_1 得到的计算结果如表 4 所示。

Table 4. The calculation results of different penalty parameters M_1 in Example 2
表 4. 例 2 不同罚参数 M_1 的计算结果

M_1	x_k	$f(x_k)$	M_k	$P(x_k)$	k
−2	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−65536	5.83e−11	15
−5	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−81920	3.72e−11	14
−7	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−57344	7.61e−11	13
−13	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−53248	8.80e−11	12
−57	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−58368	7.33e−11	10
−83	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−84992	3.46e−11	10
−117	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−59904	6.97e−11	9

选取初始点 $x_0=(3,5)$， $M_1=-5$， 由不同的迭代因子 N 得到的计算结果如表 5 所示。

Table 5. The calculation results of different iteration factors N in Example 2
表 5. 例 2 不同迭代因子 N 的计算结果

N	x_k	$f(x_k)$	M_k	$P(x_k)$	k
2	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−81920	3.72e−11	14
3	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−98415	2.58e−11	9
4	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−81920	3.72e−11	7
7	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−84035	3.54e−11	5
11	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−73205	4.67e−11	4
13	(0.0000, 1.0000)	−1.0000	−142805	1.22e−11	4
29	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−121945	1.68e−11	3

选取罚参数 $M_1=-5$， $N=2$，不同初始点 x_0 得到的计算结果如表 6 所示。

Table 6. The calculation results of different initial points x_0 in Example 2
表 6. 例 2 不同初始点 x_0 的计算结果

x_0	x_k	$f(x_k)$	M_k	$P(x_k)$	k
(−12, 57)	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−81920	3.72e−11	14
(41, 23)	(1.0000, −0.0000)	−1.0000	−81920	3.72e−11	14
(37, −81)	(1.0000, −0.0000)	−1.0000	−81920	3.72e−11	14
(122, 67)	(1.0000, −0.0000)	−1.0000	−81920	3.72e−11	14
(187, 3)	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−81920	3.72e−11	14
(29, 74)	(−0.0000, 1.0000)	−1.0000	−81920	3.72e−11	14

从以上的数据实验中看出，$|M_k|$越大，x_k越接近原问题的最优解，$P(x_k)$越接近 0，$f(x_k)$越接近原问题的最优值。在选取 M_1时，发现当$|M_1|$越大时，迭代次数越小，但是$|M_k|$并不会随之越大。从表 1、表 4 中可知，当初始点 x_0 和迭代因子 N 固定时，在[−5, −2]范围内选取的罚参数 M_1，更有可能使最后迭代的$|M_k|$越大。从表 2、表 5 中可知，当初始点 x_0 和罚参数 M_1 固定时，在[7, 13]范围选取的迭代因子 N，更有可能使最后迭代的$|M_k|$越大。从表 3、表 6 中看出，当罚参数 M_1 和迭代因子 N 固定时，初始点 x_0 的选取对求解存零约束优化问题影响较小，可以任意选取初始点 x_0。

5. 结论

存零约束优化问题因存零约束的存在，导致现有算法不能直接应用于该优化问题。本文基于互补约束优化目标罚函数方法，构建存零约束优化问题的目标罚函数方法，进一步讨论原问题和目标罚函数问题在最优解方面的关系，以及分析最优解点列的收敛性。最后，本文通过数值结果表明了目标罚函数法的可行性。数据试验表明，目标罚函数算法是求解存零约束优化问题的有效算法，并且初始点的选取对求解存零约束优化问题影响较小。

参考文献

[1] Mehlitz, P. (2019) Stationarity Conditions and Constraint Qualifications for Mathematical Programs with Switching Constraints. *Mathematical Programming*, **181**, 149-186. https://doi.org/10.1007/s10107-019-01380-5

[2] Dempe, S. (2003) Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. *Optimization*, **52**, 333-359. https://doi.org/10.1080/0233193031000149894

[3] Luo, Z., Pang, J., Ralph, D. and Wu, S. (1996) Exact Penalization and Stationarity Conditions of Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. *Mathematical Programming*, **75**, 19-76. https://doi.org/10.1007/bf02592205

[4] Achtziger, W. and Kanzow, C. (2008) Mathematical Programs with Vanishing Constraints: Optimality Conditions and Constraint Qualifications. *Mathematical Programming*, **114**, 69-99. https://doi.org/10.1007/s10107-006-0083-3

[5] Hoheisel, T. and Kanzow, C. (2008) Stationary Conditions for Mathematical Programs with Vanishing Constraints Using Weak Constraint Qualifications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **337**, 292-310. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.087

[6] Liang, Y. and Ye, J.J. (2021) Optimality Conditions and Exact Penalty for Mathematical Programs with Switching Constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **190**, 1-31. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01879-y

[7] Mehlitz, P. (2020) On the Linear Independence Constraint Qualification in Disjunctive Programming. *Optimization*, **69**, 2241-2277. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1679811

[8] Li, G. and Guo, L. (2022) Mordukhovich Stationarity for Mathematical Programs with Switching Constraints under Weak Constraint Qualifications. *Optimization*, **72**, 1817-1838. https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2038151

[9] Kanzow, C., Mehlitz, P. and Steck, D. (2019) Relaxation Schemes for Mathematical Programmes with Switching Constraints. *Optimization Methods and Software*, **36**, 1223-1258. https://doi.org/10.1080/10556788.2019.1663425

[10] 张婷婷，李高西，唐莉萍，黄应全．存零约束优化问题的部分罚函数方法[J]．系统科学与数学，2022，42(5): 1234-1245.

[11] 罗美玲，李高西，吴春．存零约束优化问题的对偶问题[J]．数学杂志, 2023, 43(4): 347-355.

[12] Lv, J., Peng, Z. and Wan, Z. (2021) Optimality Conditions, Qualifications and Approximation Method for a Class of Non-Lipschitz Mathematical Programs with Switching Constraints. *Mathematics*, **9**, 2915. https://doi.org/10.3390/math9222915