

碳排放政策易变质产品时变需求的库存优化策略

孙阔厚¹, 李 凯², 张汝岭², 孙洪春¹

¹临沂大学数学与统计学院, 山东 临沂

²临沂大学费县校区, 山东 临沂

收稿日期: 2024年5月26日; 录用日期: 2024年6月21日; 发布日期: 2024年6月27日

摘 要

本文基于两种不同的碳排放政策, 针对易变质产品的销售需求随时间变化、变质时长以及库存损耗, 以销售商利润最大化为目标, 建立出易变质产品库存优化模型, 并对该模型性质进行分析, 得出销售商最优订货周期和最优订货量的解析解。

关键词

易变质产品, 最优订货方案, 碳排放政策

Carbon Emission Policy Inventory Optimization Strategy for Time-Varying Demand of Perishable Products

Kuohou Sun¹, Kai Li², Ruling Zhang², Hongchun Sun¹

¹School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong

²School of Feixian, Linyi University, Linyi Shandong

Received: May 26th, 2024; accepted: Jun. 21st, 2024; published: Jun. 27th, 2024

Abstract

Based on two different carbon emission policies, aiming at the change of sales demand of perishable products with time, deterioration time and inventory loss, this paper establishes an inventory optimization model of perishable products with the goal of maximizing the seller's profit, and analyzes the nature of the model to obtain the analytical solution of the seller's optimal order

文章引用: 孙阔厚, 李凯, 张汝岭, 孙洪春. 碳排放政策易变质产品时变需求的库存优化策略[J]. 应用数学进展, 2024, 13(6): 2858-2868. DOI: 10.12677/aam.2024.136274

cycle and optimal order quantity.

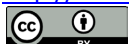
Keywords

Perishable Product, Optimal Ordering Scheme, Carbon Emission Policy

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来,随着工业和经济的快速发展,对物流供应链模型构建等问题的研究已成为许多专家、学者研究的热点问题[1]-[3]。全球能源消耗量不断上升,随之而来的温室气体排放量不断增加,温室气体排放导致的全球气候变暖引起人类社会广泛关注。2023年11月15日,根据世界气象组织(WMO)发布的《温室气体公报》表明,2022年大气中吸热温室气体丰度再次创下新高,而且上升趋势看不到结束的迹象。公报显示,2022年,最重要的温室气体——CO₂的全球平均浓度首次比前工业化时代高出整整一倍。2023年,其浓度在继续上升。CO₂浓度的增长率略低于前一年和十年的平均水平。迄今为止,所有温室气体中,由二氧化碳(CO₂)引起的温室效应占全球总体温室效应的七成以上。在全球范围内。为了有效减少二氧化碳的排放,各个国家采取了相应的政策来减少二氧化碳排放,碳限额与交易政策和碳税政策被众多国家和地区采用。《中华人民共和国国民经济和社会发展第十四个五年规划纲要》中明确指出了将在十四五时期,要将二氧化碳的排放降低18%。低碳环保成为了企业未来发展的方向和目标。一系列的低碳环保政策的实施也必然会影响供应链企业的运营决策,也让在碳排放政策下企业运营成为了目前研究的热点问题之一。

在一系列低碳环保的政策下,一些学者对在碳排放政策下销售商库存优化问题进行研究。例如柏庆国等[4]研究了在碳排放政策下二级易变质产品供应链订购决策。研究了易变质产品销售价格随时间变化与在一定货栈容量下的现状,分别构建了在碳限额与交易政策和碳税政策下的二级供应链优化模型。冉文学等[5]考虑由制造商和零售商组成的二级供应链,利用斯塔克尔格博弈方法构建集中分散决策模型,对有契约和无契约两种情况进行比较,表明集中决策下有契约供应量总利润最优。张玉忠等[6]研究了二级供应链在碳税政策下建立了分散式和集中式决策模型,比较两种模型得出供应商与零售商之间进行合作可以提高供应链的整体利润,但会产生多的碳排放。陈军等[7]建立了生鲜农产品考虑新鲜度的变质库存模型,为了控制其消耗,主要研究在弹性需求下零售商通过多级价格折扣的生鲜产品订货优化策略。邵灵芝等[8]构建Stackelberg博弈模型,在碳限额及碳交易机制下,考虑由单一制造商和零售商组成的两级供应链,通过制造商和供应链成员之间的合作,来探讨减排与促销策略问题。分析了零售商制造商独自承担各自费用、合作促销和合作减排等情形下供应链成员最优决策。对于易变质产品,在实际供应链运营中,产品的存储阶段与运输过程中也会有二氧化碳排出。本文中基于碳税政策和碳限额与交易政策,针对销售商在销售需求随时间变化,库存损耗以及变质时长进行了研究,并得出可实现的订购策略。

2. 模型描述及符号假设

本文考察销售商(零售商)在一个计划周期内的库存优化策略。零售商通过订购商订购产品来满足市场需求,零售商每次的订购周期的时间长度为 T 。由于易变质产品的特殊性,其在存储过程中需要保温或

冷藏, 因此, 易变质产品会有一定的存储成本。对于易变质产品, 当产品新鲜度下降到一定程度时, 零售商将通过对价格进行折扣来促进消费, 并全部售完再次向供应商进行新的一次订购。在一个有限计划期内, 供应商按照按需生产的方式批发给销售商。 c_1 表示零售商出售单位产品的销售价格, c_2 表示供应商将单位产品销售给零售商的价格, z 表示销售商每次订货所需要的固定成本。销售商在存储过程中单位产品的碳排放量用 r 表示, 用 E 与 g 分别表示在碳限额与交易政策下销售商的碳配额和碳排放权的交易价格, 用 k 表示在碳税政策下供应商释放碳排放的单位碳税价格。 $I(t)$ 表示 t 时刻零售商的库存水平, v 表示销售商存储单位产品的价格, Q 表示零售商向供应商订购的产品数量, $W(T)$ 表示销售商单位时间的利润。 λ 表示零售商库存变质率。

在本文中主要研究单一零售商的销售易变质产品。假设产品不缺货, 所有货存均可售出。产品在 $0 \leq t \leq h$ 内不会发生变质, 当 $t > h$ 时, 产品开始发生变质。零售商面对产品发生变质, 将采取价格折扣的方法将产品全部售出。

本文将根据产品是否有变质现象分为两个阶段, 对这两个阶段分别进行讨论, 建立相应的优化模型。

3. 模型建立

3.1 变质前全部售出

3.1.1. 碳税政策下零售商的库存优化

碳税政策是指政府针对碳排放多的企业征收的一种税。近几年, 碳税政策不断得到完善, 其税收力度也不断加强, 一些企业不得不考虑碳税政策对利润的影响。本节对于易变质产品, 其在存储阶段会有一定数量的碳被排放, 每一单位的碳排放会收取一定的税。

若产品在变质前全部售出(如图 1), 建立以下订单批量模型。

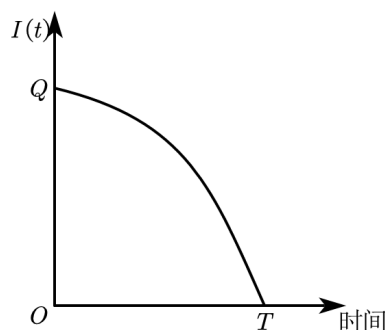


Figure 1. Inventory change situation of retailers

图 1. 零售商库存变化情形一

销售商在一个周期内的总成本 $C(T, Q)$, $C(T, Q)$ 包括了易变质产品的进价 c_2Q (即供应商的售价), 每次进货的固定成本 z 以及在一个周期内的存储成本, 处理碳排放的碳排放成本。销售商的库存水平 $I(t)$ 满足下式

$$\frac{dI(t)}{dt} = -tD \quad (1)$$

由 $I(0) = Q$ 得

$$I(t) = Q - \frac{1}{2}t^2D \quad (2)$$

故该周期的存储成本为

$$v \int_0^T Q - \frac{1}{2} t^2 D dt = v \left(QT - \frac{1}{6} T^3 D \right) \quad (3)$$

又由 $I(T)=0$ 得 $Q = \frac{1}{2} T^2 D$, 故该周期库存成本为 $\frac{2Q\sqrt{2Qv}}{3\sqrt{D}}$, 则该周期内的总成本为

$$C(T, Q) = \frac{2Q\sqrt{2Qv}}{3\sqrt{D}} + z + c_2 Q + rkQ \quad (4)$$

再由 $Q = \frac{1}{2} T^2 D$, 则单位时间内的库存成本为

$$C(Q) = \frac{C(Q, T)}{T} = \frac{z\sqrt{D}}{\sqrt{2Q}} + \frac{(c_2 + rk)\sqrt{QD}}{\sqrt{2}} + \frac{2vQ}{3} \quad (5)$$

因为所有产品在发生变质前全部售出, 则该周期内零售商单位时间的总收入为

$$w = \frac{c_1 Q}{T} = \frac{c_1 \sqrt{QD}}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

在该周期内零售商单位时间的总利润为

$$W(T) = w - C(Q) = \frac{(c_1 - c_2 - rk)\sqrt{QD}}{\sqrt{2}} - \frac{z\sqrt{D}}{\sqrt{2Q}} - \frac{2vQ}{3} \quad (7)$$

因此建立下面得订单批量模型

$$\begin{aligned} \max \quad & W(T) = \frac{(c_1 - c_2 - rk)\sqrt{QD}}{\sqrt{2}} - \frac{z\sqrt{D}}{\sqrt{2Q}} - \frac{2vQ}{3} \\ \text{s.t.} \quad & Q \leq Dh \end{aligned} \quad (8)$$

下面求解最优补货量 Q 。由(8)得

$$W'(T) = \frac{(c_1 - c_2 - rk)Q^{\frac{-1}{2}}\sqrt{D}}{2\sqrt{2}} - \frac{2v}{3} + \frac{zQ^{\frac{-3}{2}}\sqrt{D}}{2\sqrt{2}} \quad (9)$$

不妨令

$$E = \frac{(c_1 - c_2 - rk)\sqrt{D}}{2\sqrt{2}}, \quad H = \frac{z\sqrt{D}}{2\sqrt{2}};$$

显然有 $c_1 - c_2 - rk \geq 0$, 所以 $E \geq 0$, $H \geq 0$ 。

二阶导数 $W''(T) = -\frac{1}{2}EQ^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}HQ^{-\frac{5}{2}}$, 得 $W''(T) \leq 0$, 所以 $W(T)$ 为凸函数, 只要令 $W'(T)=0$ 得到

驻点即可, 不妨令 $a = Q^{\frac{1}{2}}$, $b = -\frac{2v}{3}$, 则(9)式可以改写为 $W'(T) = Ea + Ha^3 - b$, 则 $W'(T)=0$ 为一元三次方程, 其中该一元三次方程中的 Δ 为

$$\Delta = \left(-\frac{b}{2H} \right)^2 + \left(\frac{E}{3H} \right)^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}v}{3z\sqrt{D}} \right)^2 + \left(\frac{c_1 - c_2 - rk}{3z} \right)^3$$

显然 $\Delta > 0$, 所以 $W'(T)=0$ 有一个实根和两个复根。得出最优订货量为

$$Q = \left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3z\sqrt{D}} + \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3z\sqrt{D}} \right)^2 + \left(\frac{c_1 - c_2 - rk}{3z} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3z\sqrt{D}} - \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3z\sqrt{D}} \right)^2 + \left(\frac{c_1 - c_2 - rk}{3z} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-2} \quad (10)$$

所以在碳税政策下最优补货量为 $Q^* = \min(Q, Dh)$ ，最优补货周期为 $T^* = \min\left(\sqrt{\frac{DQ^*}{2}}, h\right)$ ，销售商的最大利润为 $W^* = \frac{c_1\sqrt{Q^*D}}{\sqrt{2}}$ 。

3.1.2. 碳限额与交易政策下零售商库存优化

碳限额与交易政策是指政府机构分配给企业一定的碳排放配额，如果零售商的碳排放量超过了碳排放配额，则需要到碳交易市场购买一定的碳排放权。否则企业可以售出多余的碳排放额。

以销售商利润最大化为目标函数，对于在碳限额与交易政策下周期得成本函数为

$$C(T, Q) = \frac{2Q\sqrt{2Qv}}{3\sqrt{D}} + z + c_2Q + g(rQ - E) \quad (11)$$

碳限额与交易政策下单位时间库存成本为

$$C(Q) = \frac{C(Q, T)}{T} = \frac{(z - gE)\sqrt{D}}{\sqrt{2Q}} + \frac{(c_2 + rg)\sqrt{QD}}{\sqrt{2}} + \frac{2vQ}{3} \quad (12)$$

零售商的在该周期内的单位时间总利润为

$$W(T) = w - C(Q) = \frac{(c_1 - c_2 - rg)\sqrt{QD}}{\sqrt{2}} - \frac{(z - gE)\sqrt{D}}{\sqrt{2Q}} - \frac{2vQ}{3} \quad (13)$$

建立在碳限额与交易政策下订单批量模型

$$\begin{aligned} \max \quad & W(T) = \frac{(c_1 - c_2 - rg)\sqrt{QD}}{\sqrt{2}} - \frac{(z - gE)\sqrt{D}}{\sqrt{2Q}} - \frac{2vQ}{3} \\ \text{s.t.} \quad & Q \leq Dh \end{aligned} \quad (14)$$

类似于上述(8)式求解方法，得到了在碳限额与交易政策下销售商最优订货周期为

$$Q = \left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3(z - gE)\sqrt{D}} + \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3(z - gE)\sqrt{D}} \right)^2 + \left(\frac{c_1 - c_2 - rg}{3(z - gE)} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3(z - gE)\sqrt{D}} - \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3(z - gE)\sqrt{D}} \right)^2 + \left(\frac{c_1 - c_2 - rg}{3(z - gE)} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-2} \quad (15)$$

所以就有了在碳限额与交易政策下最优的补货量为 $Q^* = \min(Q, Dh)$ ，最有补货周期为

$$T^* = \min\left(\sqrt{\frac{DQ^*}{2}}, h\right), \text{ 销售商的最大利润为 } W^* = \frac{c_1\sqrt{Q^*D}}{\sqrt{2}}.$$

3.2. 打折促进销售

3.2.1. 碳税政策下销售商的库存优化

对于易变质产品, 易变质产品容易发生变质, 因此, 销售商会通过对易变质产品进行打折, 来促进销售。建立下面的订单批量模型(如图 2)。

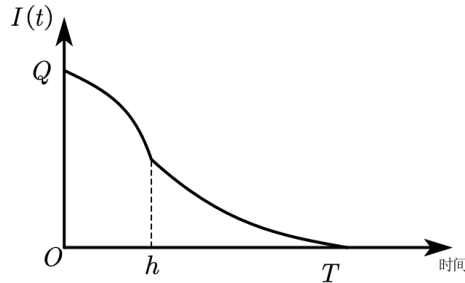


Figure 2. Variation curve of retailer's inventory capacity case 2
图 2. 零售商库存容量变化曲线情形二

在一周期内的总成本包括进价成本, 存储成本以及每次订购需要的固定费用, 在碳税政策下碳排放的税收成本。其中进价成本为 c_2Q , 固定费用为 z 以及零售商存储单位产品费用 v 。接下来求一周期内的总存储成本。假设 $I(t)$ 表示 t 时刻该系统的库存水平, 且满足一下方程

$$\frac{dI(t)}{dt} = \begin{cases} -tD & 0 \leq t \leq h \\ -\lambda I(t) - D & h < t \leq T \end{cases} \quad (16)$$

由初始条件 $I(T) = 0$, $I(0) = Q$ 得

$$I(T) = \begin{cases} Q - \frac{1}{2}t^2D & 0 \leq t \leq h \\ \frac{D}{\lambda} [e^{\lambda(T-t)} - 1] & h < t \leq T \end{cases} \quad (17)$$

因为 $\lim_{t \rightarrow h^-} I(t) = Q - \frac{1}{2}h^2D$, $\lim_{t \rightarrow h^+} I(t) = \frac{D}{\lambda} [e^{\lambda(T-h)} - 1]$, 由左右两端极限相等可知

$$Q = \frac{1}{2}h^2D + \frac{D}{\lambda} [e^{\lambda(T-h)} - 1] \quad (18)$$

从而有

$$I(T) = \begin{cases} \frac{1}{2}(h^2 - t^2)D + \frac{D}{\lambda} [e^{\lambda(T-h)} - 1] & 0 \leq t \leq h \\ \frac{D}{\lambda} [e^{\lambda(T-t)} - 1] & h < t \leq T \end{cases} \quad (19)$$

于是一个周期内的总存储成本为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^T (v + rk) I(t) dt \\ &= (v + rk) \left[\int_0^h \frac{1}{2}(h^2 - t^2)D + \frac{D}{\lambda} [e^{\lambda(T-h)} - 1] dt + \int_h^T \frac{D}{\lambda} [e^{\lambda(T-t)} - 1] dt \right] \\ &= (v + rk) \left[\frac{1}{3}h^3D + \frac{Dh}{\lambda} (e^{\lambda(T-h)} - 1) + \frac{D}{\lambda^2} (e^{\lambda(T-h)} - \lambda T + \lambda h - 1) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

在每个周期中的进价为 c_2 ，所以总进价成本为

$$\frac{1}{2}c_2h^2D + \frac{Dc_2}{\lambda}[e^{\lambda(T-h)} - 1] \quad (21)$$

在整个周期中的总成本为

$$\begin{aligned} z = & (v + rk) \left[\frac{1}{3}h^3D + \frac{Dh}{\lambda}(e^{\lambda(T-h)} - 1) + \frac{D}{\lambda^2}(e^{\lambda(T-h)} - \lambda T + \lambda h - 1) \right] \\ & + z + \frac{1}{2}c_2h^2D + \frac{Dc_2}{\lambda}[e^{\lambda(T-h)} - 1] \end{aligned} \quad (22)$$

在一个在周期内零售商的总成本，现求在一个周期内的总收入，产品售出分为两个阶段，第一段为产品在变质现象出现之前，即 $0 \leq t \leq h$ 时，零售商的销售数量为

$$M_1 = \int_0^h \left(Q - \frac{1}{2}Dt^2 \right) dt = \frac{1}{3}h^3D + \frac{Dh}{\lambda}[e^{\lambda(T-h)} - 1] \quad (23)$$

则在变质之前的零售商的收入

$$W_1 = \frac{1}{3}h^3Dc_1 + \frac{Dhc_1}{\lambda}[e^{\lambda(T-h)} - 1] \quad (24)$$

当变质现象出现之后，即 $h < t \leq T$ ，零售商销售产品量为

$$M_2 = \int_h^T \frac{D}{\lambda}[e^{\lambda(T-t)} - 1] dt = \frac{D}{\lambda^2}(e^{\lambda(T-h)} - \lambda T + \lambda h - 1) \quad (25)$$

对于变质的产品零售商将会通过打折的方式来促进销售，设零售商的销售折扣为 β ，则在这一时间段中零售商的收入为

$$W_2 = \beta c_1 M_2 = \frac{\beta c_1 D}{\lambda^2}(e^{\lambda(T-h)} - \lambda T + \lambda h - 1) \quad (26)$$

得到了在两个不同时段零售商的收入，所以零售商的总收入为

$$W = W_1 + W_2 \quad (27)$$

因此，在一个周期内零售商的总利润为 $W_1 + W_2 - z$ ，所以零售商在单位时间内的总利润为

$$\begin{aligned} W(T) = & \frac{1}{3T}(c_1 - (v + rk))h^3D + \frac{1}{\lambda T}Dh(c_1 - (v + rk))(e^{\lambda(T-h)} - 1) \\ & + \frac{1}{T\lambda^2}D(\beta c_1 - (v + rk))[e^{\lambda(T-h)} - \lambda(T-h) - 1] \\ & - \frac{1}{T} \left(z + \frac{c_2h^2D}{2} + \frac{Dc_2}{\lambda}(e^{\lambda(T-h)} - 1) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

根据上式，为了保证在单位时间内的利润 W 最大，建立以下的订单批量模型

$$\begin{aligned} \max \quad & W(T) \\ \text{s.t.} \quad & T \geq h \end{aligned} \quad (29)$$

接下来，研究 $W(T)$ 函数的下面的性质。

性质 1 若零售商单位产品折扣力度满足下式

$$\begin{aligned} & 4h(c_1 - (v + rk)) + 2c_2(\lambda T - 1) + (\beta c_1 - (v + rk)) \left[\frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} + \lambda T^2 - \frac{2}{\lambda e^{\lambda(T-h)}} \right] \\ & < \lambda^2 T^2 [h(c_1 - (v + rk)) - c_2] \end{aligned}$$

则函数 $W(T)$ 在 $(h, +\infty)$ 为凸函数。

证明： 对于任意的 $T \in (h, +\infty)$ ，通过对 $W(T)$ 函数进行求导为

$$\begin{aligned} W'(T) = & -\frac{1}{3T^2}(c_1 - (v + rk))h^3D + \frac{1}{\lambda T^2}Dh(c_1 - (v + rk))(1 - e^{\lambda(T-h)}) \\ & + \frac{1}{T} \left[D[h(c_1 - (v + rk)) - c_2]e^{\lambda(T-h)} - \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} \right) \right] \\ & + D(\beta c_1 - (v + rk)) \left(\frac{1}{\lambda^2 T^2}(1 - e^{\lambda(T-h)}) + \frac{1}{\lambda T}(e^{\lambda(T-h)} - 1) + \frac{T-h}{\lambda T^2} \right) \\ & + \frac{1}{T^2} \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} + \frac{Dc_2}{\lambda}(e^{\lambda(T-h)} - 1) \right) \end{aligned} \quad (30)$$

在对 $W'(T)$ 进行求导，

$$\begin{aligned} W''(T) = & \frac{2}{T^3} \left[\frac{1}{3}(c_1 - (v + rk))h^3D + \frac{1}{\lambda}Dh(c_1 - (v + rk))(e^{\lambda(T-h)} - 1) - \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} + \frac{Dc_2}{\lambda}(e^{\lambda(T-h)} - 1) \right) \right] \\ & + \frac{1}{T^2}De^{\lambda(T-h)}[2h(c_1 - (v + rk)) - c_2] - \frac{\lambda}{T}De^{\lambda(T-h)}[h(c_1 - (v + rk)) - c_2] \\ & + D(\beta c_1 - (v + rk)) \left[\frac{-2}{\lambda^3 T^3}(1 - e^{\lambda(T-h)}) - \frac{2}{\lambda T^2}e^{\lambda(T-h)} + \frac{1}{T}e^{\lambda(T-h)} - \frac{2}{\lambda T^3}(T-h) \right] + \frac{1}{T^2}Dc_2e^{\lambda(T-h)} \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} f(T) = & \frac{2}{3}(c_1 - (v + rk))h^3D + \frac{2}{\lambda}Dh(c_1 - (v + rk))(e^{\lambda(T-h)} - 1) - 2 \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} + \frac{Dc_2}{\lambda}(e^{\lambda(T-h)} - 1) \right) \\ & + TDe^{\lambda(T-h)}[2h(c_1 - (v + rk)) - c_2] - \lambda DT^2e^{\lambda(T-h)}[h(c_1 - (v + rk)) - c_2] \\ & + D(\beta c_1 - (v + rk)) \left[\frac{-2}{\lambda^3}(1 - e^{\lambda(T-h)}) - \frac{2T}{\lambda}e^{\lambda(T-h)} + T^2e^{\lambda(T-h)} - \frac{2}{\lambda}(T-h) \right] + TDC_2e^{\lambda(T-h)} \end{aligned}$$

则 $W''(T)$ 可改写为 $W''(T) = \frac{f(T)}{T^3}$ ，对 $f(T)$ 进行求导得

$$\begin{aligned} f'(T) = & De^{\lambda(T-h)} \left[4h(c_1 - (v + rk)) + 2c_2(\lambda T - 1) - \lambda^2 T^2[h(c_1 - (v + rk)) - c_2] \right. \\ & \left. + (\beta c_1 - (v + rk)) \left[\frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} + \lambda T^2 - \frac{2}{\lambda e^{\lambda(T-h)}} \right] \right] \end{aligned}$$

由性质一可得下式成立

$$\begin{aligned} & 4hc_1 + (v + rk)(c_2(\lambda T - 2) - 4h) + (\beta c_1 - (v + rk)) \left[\frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} + \lambda T^2 - \frac{2}{\lambda e^{\lambda(T-h)}} \right] \\ & < \lambda^2 T^2[hc_1 - (v + rk)(h + c_2)] \end{aligned}$$

所以 $f'(T) < 0$ 的，有 $f(T)$ 在 $(h, +\infty)$ 是单调递减的，令

$$\begin{aligned} f(h) = & -c_1 h^3 D \left(\lambda - \frac{2}{3} \right) + h^2 D(c_2 + \lambda c_2 + 2(c_1 - v - rk)) - Dh^3 \left(\frac{2}{3} - \lambda \right) (v + rk) \\ & - D \left((v + rk) \left(h^2 - \frac{2h}{\lambda} \right) - \beta c_1 \right) + 2z \\ & < 0 \end{aligned}$$

故 $f(T) < 0$, 从而 $W(T)$ 二阶导数小于 0, 可知 $W(T)$ 在 $(h, +\infty)$ 为凸函数。

由性质 1, 订单批量模型(29)是一个标准凸规划问题, 它的最优解就是 KKT 点, 即存在实数 $\gamma > 0$, 使得

$$\begin{cases} W'(T) = \gamma(T-h) \\ \gamma > 0, T \geq h, \gamma(T-h) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

由于 $T > h$, 令 $\gamma = 0$, 因此只要求出 $W'(T) = 0$ 的解, 即为模型(29)的解, 因而得出最优订货周期 T 。同时, 将得到的最优订货周期 T 代入(18)式, 可以得到最优的订货量。

下面给出求 T 的一种近似求解方法, 由

$$e^{\lambda(T-h)} = e^{-\lambda h} + \lambda T e^{-\lambda h} + \frac{1}{2!} \lambda^2 T^2 e^{-\lambda h} + \cdots + \frac{1}{n!} \lambda^n T^n e^{-\lambda h}$$

若取到一次项, 则 $W'(T)$ 可化为

$$\begin{aligned} W'(T) = & -\frac{1}{3T^2} (c_1 - (v+rk)) h^3 D + \frac{1}{\lambda T^2} Dh (c_1 - (v+rk)) (1 - e^{-\lambda h} - \lambda T e^{-\lambda h}) \\ & + D(\beta c_1 - (v+rk)) \left(\frac{1}{\lambda^2 T^2} [1 - (e^{-\lambda h} + \lambda T e^{-\lambda h})] + \frac{1}{\lambda T} ((e^{-\lambda h} + \lambda T e^{-\lambda h}) - 1) + \frac{T-h}{\lambda T^2} \right) \\ & - \frac{1}{T} \left[D[h(c_1 - (v+rk)) - c_2] (e^{-\lambda h} + \lambda T e^{-\lambda h}) - \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{T^2} \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} + \frac{Dc_2}{\lambda} ((e^{-\lambda h} + \lambda T e^{-\lambda h}) - 1) \right) \end{aligned}$$

不妨令

$$\begin{aligned} A = & D(c_1 - (v+rk)) \left(\frac{1}{\lambda} h (1 - e^{-\lambda h}) - \frac{1}{3} h^3 \right) + D(\beta c_1 - (v+rk)) \left(\frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda h}) + \frac{1}{\lambda} (T-h) \right) \\ & + \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} + \frac{Dc_2}{\lambda} (e^{-\lambda h} - 1) \right) \end{aligned}$$

$$B = -Dh(c_1 - (v+rk)e^{\lambda h}) - \frac{1}{\lambda} D(\beta c_1 - (v+rk)) - D e^{-\lambda h} [h(c_1 - (v+rk)) - c_2] + \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} + \lambda e^{-\lambda h} \right)$$

$$C = e^{-\lambda h} D(\beta c_1 - (v+rk)) - D \lambda e^{-\lambda h} [h(c_1 - (v+rk)) - c_2]$$

则 $W'(T)$ 可以改写为 $W'(T) = \frac{1}{T^2} A + \frac{1}{T} B + C$, 求 $W'(T) = 0$ 的解为 $T^* = \frac{2A}{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}$ 。得最优订货量

为 $Q^* = \frac{1}{2} h^2 D + \frac{D}{\lambda} [e^{\lambda(T^*-h)} - 1]$, 在碳税政策下将满足上式 T^* 代入(28)式。得零售商单位时间内的最大总利润 $W(T^*)$, 即

$$\begin{aligned} W(T^*) = & \frac{1}{3T^*} (c_1 - (v+rk)) h^3 D + \frac{1}{\lambda T^*} Dh (c_1 - (v+rk)) (e^{\lambda(T^*-h)} - 1) \\ & + \frac{1}{T^* \lambda^2} D(\beta c_1 - (v+rk)) [e^{\lambda(T^*-h)} - \lambda(T^*-h) - 1] \\ & - \frac{1}{T^*} \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} + \frac{Dc_2}{\lambda} (e^{\lambda(T^*-h)} - 1) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

3.2.2. 碳限额与交易政策下销售商的库存优化

讨论在碳限额与交易政策下易变质产品发生变质的情况下销售商通过打折来促进消费的库存优化模型。以销售商利润最大化为目标函数，对于在碳限额与交易政策下周期成本函数为

$$z = \left[v + g \left(\frac{1}{2} rh^2 D - \frac{rD}{\lambda} (e^{\lambda(T-h)} - 1) - E \right) \right] \left[\frac{1}{3} h^3 D + \frac{Dh}{\lambda} (e^{\lambda(T-h)} - 1) + \frac{D}{\lambda^2} (e^{\lambda(T-h)} - \lambda T + \lambda h - 1) \right] + z_2 + \frac{1}{2} c_2 h^2 D + \frac{Dc_2}{\lambda} [e^{\lambda(T-h)} - 1] \quad (33)$$

在碳限额与交易政策下销售商的单位时间总利润 $W(T) = W_1 + W_2 - z$ 为

$$\begin{aligned} W(T) = & \frac{1}{3T} \left[c_1 - \left(v + g \left(\frac{1}{2} rh^2 D - \frac{rD}{\lambda} (e^{\lambda(T-h)} - 1) - E \right) \right) \right] h^3 D \\ & + \frac{1}{\lambda T} Dh \left(c_1 - \left(v + g \left(\frac{1}{2} rh^2 D - \frac{rD}{\lambda} (e^{\lambda(T-h)} - 1) - E \right) \right) \right) (e^{\lambda(T-h)} - 1) \\ & + \frac{1}{T\lambda^2} D \left(\beta c_1 - \left(v + g \left(E - \frac{1}{2} rh^2 D - \frac{rD}{\lambda} (e^{\lambda(T-h)} - 1) \right) \right) \right) [e^{\lambda(T-h)} - \lambda(T-h) - 1] \\ & - \frac{1}{T} \left(z + \frac{c_2 h^2 D}{2} + \frac{Dc_2}{\lambda} (e^{\lambda(T-h)} - 1) \right) \end{aligned} \quad (34)$$

在碳限额与交易政策下建立如下订单批量模型

$$\begin{aligned} \max \quad & W(T) \\ \text{s.t.} \quad & T \geq h \end{aligned} \quad (35)$$

该订单批量模型与模型(29)式求解方法类似，得出 $W'(T) = 0$ 解为在碳限额与交易政策下销售商得最优订货周期为 T^* ，最优的订货量为 $Q^* = \frac{1}{2} h^2 D + \frac{D}{\lambda} [e^{\lambda(T^*-h)} - 1]$ ，得出最大利润为 $W(T^*)$ 。

4. 数值算例

本节给出数值算例用以验证所建模型的有效性，可靠性，进一步得出最佳订购周期、最大利润。

例 假设消费者对该易变质产品的需求 $D = 32$ (单位/天)，该商品的进价为 20 元，该商品的单位售价为 35 元，同时该商品在单位时间内的单位库存费用为 0.5 (元/单位/天)，通过对该产品的调查得知每次订货的固定成本费用为 50 元，销售商存储该产品的碳排放为 0.5，每处理单位的碳排放所花费的费用为 0.1 元，若物品在第 20 天开始发生变质。在碳税政策下分别求最佳订货周期与最大利润。

解 第 20 天开始变质， $h = 19$ ，通过计算，得到最佳订货量为 45，最佳订货周期为 20 天，即最好每 20 天进一次货，此时最大利润为 714 元。

5. 结论

本文建立了易变质产品在不同碳排放政策下的需求与时间有关模型，并对模型进行了分析与求解，给出了在不同情况下不同碳排放政策下销售商的最优订货周期和订货量。并通过实例分析，验证了模型的正确性。本文建立的模型符合实际，对企业如何在一系列碳排放政策中获取最大利润及实现碳减排目标具有一定的现实意义。

参考文献

- [1] Sun, H., Chen, H. and Wang, Y. (2021) A Complementarity Model and Algorithm for Multi-Commodity Flow Supply

Chain Network Equilibrium with Random Demands. *Engineering Optimization*, **54**, 1668-1691.

<https://doi.org/10.1080/0305215x.2021.1955872>

- [2] Chen, H., Sun, H. and Wang, Y. (2021) A Complementarity Model and Algorithm for Direct Multi-Commodity Flow Supply Chain Network Equilibrium Problem. *Journal of Industrial & Management Optimization*, **17**, 2217-2242. <https://doi.org/10.3934/jimo.2020066>
- [3] Pan, G., Xue, B. and Sun, H. (2022) An Optimization Model and Method for Supply Chain Equilibrium Management Problem. *Mathematical Foundations of Computing*, **5**, 145-156. <https://doi.org/10.3934/mfc.2022001>
- [4] 柏庆国, 徐贤浩. 碳排放政策下二级易变质产品供应链的联合订购策略[J]. 管理工程学报, 2018, 32(4): 167-177.
- [5] 冉文学, 徐腾, 罗亚恒. 基于绿色碳排放的供应链协调机制研究[J]. 供应链管理, 2022, 3(12): 21-34. <https://doi.org/10.19868/j.cnki.gylgl.2022.12.002>
- [6] 张玉忠, 柏庆国. 碳税政策下时变需求依赖库存与价格的供应链协调模型[J]. 运筹学学报, 2017, 21(2): 1-12.
- [7] 陈军, 但斌, 张旭梅. 多级价格折扣下基于损耗控制的生鲜农产品 EOQ 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(7): 43-54.
- [8] 邵灵芝, 尹丽. 碳限额及碳交易机制下低碳供应链合作促销与减排研究[J]. 物流科技, 2024, 47(7): 1-7.