

一类拟线性浅水波方程的局部适定性

苏仙仙, 董晓芳*, 滕凯民

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2024年5月28日; 录用日期: 2024年6月22日; 发布日期: 2024年6月29日

摘要

本文研究一类新的拟线性浅水波方程, 该方程是在描述不可压缩旋转二维浅水的底层剪切流效应的模型时被正式推导出来的。在本文中, 我们主要研究该方程在Besov空间 $\{B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n) | s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, r \leq +\infty\}$ 中的局部适定性。

关键词

浅水波方程, Besov空间, 局部适定性

Local Well-Posedness of a Class of Quasilinear Shallow Water Wave Equations

Xianxian Su, Xiaofang Dong*, Kaimin Teng

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: May 28th, 2024; accepted: Jun. 22nd, 2024; published: Jun. 29th, 2024

Abstract

In this paper, we study a new class of quasilinear shallow water wave equations, which is formally derived in describing the bottom shear flow effect of incompressible rotating two-dimensional shallow water. In this paper, we obtain the local well-posedness of the equation in Besov space $\{B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n) | s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, r \leq +\infty\}$.

Keywords

Shallow Water Equation, Besov Spaces, Local Well-Posedness

*通讯作者。



1. 引言

本文主要研究以下方程：

$$\begin{aligned} & u_t + cu_x - \mu\delta^2 u_{xxx} - \mu_0\delta^2 u_{xxx} + 3\alpha\epsilon uu_x + \Lambda_1\epsilon^2 u^2 u_x + \Lambda_2\epsilon^3 u^3 u_x \\ & = \theta\mu\alpha\epsilon\delta^2 (2u_x u_{xx} + uu_{xxx}), t > 0, x \in R, \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 $u(t, x)$ 表示的是在特定深度 z_0 处的水平速度场。方程经过伸缩变换以后要求 $0 \leq z_0 \leq 1$, $\theta \neq 3$, 且

$$z_0^2 = \frac{3c^8 + 21c^6 + 36c^4 + 9c^2 - (c^8 + 7c^6 + 13c^4 + 9c^2 + 3)\theta}{3(3-\theta)(c^2 + c + 1)(c^2 - c + 1)(c^2 + 1)^2},$$

其中 θ 是平衡流体对流中由于拉伸导致的非线性陡化和放大的参数, $c = \frac{1}{2}(\sqrt{A^2 + 4} + A)$, 参数 A 表示的是线性剪切流, 参数 c 和 A 满足 $c = \frac{1}{2}(\sqrt{A^2 + 4} + A)$, 此外

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{c^5(c^2 - 1)(c^2 + 2)}{2(c^2 + 1)^3}, \Lambda_2 = \frac{c^6(c - 1)^2(c + 1)^2(c^4 + 4c^2 + 6)}{6(c^2 + 1)^5}, \alpha = \frac{c^4 + c^2 + 1}{3(c^2 + 1)}, \\ \mu &= \begin{cases} \frac{c^4 + 6c^2 + 3}{(3 - \theta)(c^2 - c + 1)(c^2 + c + 1)(c^2 + 1)^2}, & \theta \neq 3, \\ 0, & \theta = 3, \end{cases} \\ \mu_0 &= \begin{cases} \frac{12c^4 + 3c^2 - 3 + (c^6 + 2c^4 + 2c^2 + 1)\theta}{3c(3 - \theta)(c^3 + c + 1)(c^2 - c + 1)(c^2 + 1)^2}, & \theta \neq 3, \\ -\frac{1}{3c(c^2 + 1)}, & \theta = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

该方程是描述了一个具有中等非线性状态下来自不可压缩旋转二维浅水的底层剪切流影响的模型方程, 在文献[1]通过使用双渐近展开的方法提出来的。方程(1.1)中的高阶非线性项 $u^2 u_x$ 和 $u^3 u_x$ 在推断底层剪切流的存在是不可忽视的。

在最近几年, 一些拟线性浅水波方程已经被广泛研究。例如, Johnson 在文献[2]建立了在浅水上方水波运动的 Camassa-Holm 方程。Quirchmayr 在文献[3]使用缩放 $\mu \ll 1$, $\epsilon = O(\sqrt[4]{\mu})$ 得到了一个高阶非线性水波方程。Li 和 Liu 在文献[4]通过使用双渐近展开的方法推导出一个高阶非线性浅水模型。

事实上, 在 $A \rightarrow 0$, $\theta \neq 3$ 时, 有 $c \rightarrow 1$, $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$, $\mu \rightarrow \frac{5}{6(3-\theta)}$, $\mu_0 \rightarrow \frac{\theta+2}{6(3-\theta)}$, $\Lambda_1 \rightarrow 0$,

$\Lambda_2 \rightarrow 0$ 和 $z_0^2 \rightarrow \frac{23-11\theta}{12(3-\theta)}$ 。方程(1.1)通过使用伸缩变换 $u(t, x) \rightarrow \alpha\epsilon u(\sqrt{\mu}\delta^2 t, \sqrt{\mu}\delta^2 x)$ 和伽利略变换公式

$u(t, x) \rightarrow u\left(t, x - \frac{3}{4}t\right) + \frac{3}{4}$ 可以简化为以下方程[5] [6]

$$u_t - u_{xxx} + 3uu_x = \theta(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}), t > 0, x \in R, \quad (1.2)$$

其中 $u(t, x)$ 描述了相对于预应力状态的径向拉伸, 这个方程是在可压缩超弹性棒的背景下正式推导出来的。当 $\theta=1$ 时, 方程(1.2)简化为经典的浅水波 Camassa-Holm 方程

$$u_t - u_{xxx} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, t > 0, x \in R, \quad (1.3)$$

其中 $u(t, x)$ 表示在深度 $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, x 方向上的水平速度场。该方程是描述浅水波单向传播的一个重要数学模型。

Camassa-Holm 方程最初是由 Fuchssteiner 和 Fokas 在没有物理动机的形式下推导出来的, 然而从物理学的角度来看, 这个模型是 Camassa 和 Holm 在 1993 年从物理方面推导出来的[7], 该模型是用于描述浅水波在平底上方自由表面高度的单向传播模型。众所周知, Camassa-Holm 方程具有双哈密顿结构[8], 也是完全可积的[7] [9], 它的孤波是尖的[7] [9]-[12], 它们在轨道上是稳定的并像孤子一样相互作用[13] [14]。其次, Camassa-Holm 方程也具有多峰解[7] [15]和波的破裂线性的存在[16] [17] (即解 $u(t, x)$ 保持有界, 而它的斜率变的无界)。最后, Camassa-Holm 方程具有无穷的守恒量并可以通过相应的逆散射变换来求解[18]。

与此同时, 在过去几十年里, 方程(1.3)的柯西问题已经被广泛研究并且也得到了它的许多重要性质。例如, 一些学者在文献[17] [19]-[24]得到了 Camassa-Holm 方程的局部适定性。文献[19] [23]学者们研究了 Camassa-Holm 方程强解的存在性。也有一些学者在文献[17] [19] [21] [24]-[29]得到了它的爆破现象。Linares 和 Ponce 在文献[30]研究了在周期和非周期条件下 Camassa-Holm 方程的刘维尔型性质。在文献[17] [24], 学者们证明了对于初始数据 $u_0 \in H^s$, $s > \frac{3}{2}$ 的局部适定性, 在文献[26] [28] [29]学者们通过建立 Riccati 型微分不等式研究了方程(1.3)的爆破准则, 由于 Camassa-Holm 方程的特殊结构, 在文献[25], Brandolese 研究了 Camassa-Holm 方程局部空间的爆破准则。

在文献[31]中, 使用 Kato 原理[32]获得了关于问题(1.1)在 Sobolev 空间的局部适定性, 并且研究了该问题波的破裂现象。然而, 关于问题(1.1)在 Besov 空间的局部适定性还未被研究。在本文中, 我们主要研究问题(1.1)在 Besov 空间 $\{B_{p,r}^s(R^n) | s \in R, 1 \leq p, r \leq +\infty\}$ 中的局部适定性。

本篇论文的结构如下, 在第二部分, 给出证明主要定理所需要的一些预备知识。在第三部分给出具体的局部适定性的证明。

2. 预备知识

在这一部分, 给出证明局部适定性需要的一些预备知识。为了计算的方便, 将方程(1.1)经过伸缩变换 $u(t, x) \rightarrow \alpha \varepsilon u(\sqrt{\mu} \delta^2 t, \sqrt{\mu} \delta^2 x)$ 简化为以下非局部形式

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u \right) u_x = P(D) \left(\left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) u + \frac{3-\theta}{2} u^2 + \frac{\theta}{2} u_x^2 + \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} u^3 + \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} u^4 \right), t > 0, x \in R, \\ u(0, x) = u_0(x), x \in R. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $P(D) = -\partial x(1 - \partial^2 x)^{-1}$, $G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ 和 $G(x) * f = (1 - \partial^2 x)^{-1} f$ 对所有的 $f \in L^2(R)$ 。为了介绍主要的结果, 定义

$$E_{p,r}^s(T) = C([0, T]; B_{p,r}^s) \cap C^1([0, T]; B_{p,r}^{s-1}), r < \infty,$$

$$E_{p,\infty}^s(T) = L^\infty(0, T; B_{p,\infty}^s) \cap Lip([0, T]; B_{p,r}^{s-1}).$$

在文献[22] [33]-[36]给出 Littlewood-paley 分解的性质, 非齐次 Besov 空间和传输方程理论的一些结论。

引理 2.1 (Littlewood-paley 分解) [37] 在 $[0, 1]$ 上存在一对光滑径向函数 (χ, ϕ) , 使得 χ 在球 $B = \left\{ \xi \in R^n, |\xi| \leq \frac{4}{3} \right\}$ 上是支撑的和 ϕ 在环 $C = \left\{ \xi \in R^n, \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3} \right\}$ 上是支撑的。此外

$$\forall \xi \in R^n, \quad \chi(\xi) + \sum_{q \in N} \phi(2^{-q} \xi) = 1$$

和

$$\text{如果 } |q - q'| \geq 2, \quad \text{Supp} \phi(2^{-q} \cdot) \cap \text{Supp} \phi(2^{-q'} \cdot) = \emptyset.$$

$$\text{如果 } |q| \geq 1, \quad \text{Supp} \chi(\cdot) \cap \text{Supp} \phi(2^{-q} \cdot) = \emptyset.$$

则对于 $u \in \varphi'(R)$ 非齐次二元区块定义如下:

$$\text{如果 } q \leq -2, \quad \Delta_q u = 0,$$

$$\Delta_{-1} u = \chi(D) u = \mathcal{F}_x^{-1} \chi \mathcal{F}_x u,$$

$$\text{如果 } q \geq 0, \quad \Delta_q u = \phi(2^{-q} D) u = \mathcal{F}_x^{-1} \phi(2^{-q} \xi) \mathcal{F}_x u.$$

因此

$$\text{在 } \varphi'(R), \quad u = \sum_{q \in Z} \Delta_q u.$$

低频截断函数 S_q 定义为:

$$S_q u = \sum_{p=-1}^{q-1} \Delta_p u = \chi(2^{-q} D) u = \mathcal{F}_x^{-1} \chi(2^{-q} \xi) \mathcal{F}_x u, \quad \forall q \in N.$$

容易得到

$$\text{如果 } |p - q| \geq 2, \quad \Delta_p \Delta_q u \equiv 0,$$

$$\text{如果 } |p - q| \geq 5, \quad \Delta_q (S_{p-1} u \Delta_p v) \equiv 0, \quad \forall u, v \in \varphi'(R)$$

和

$$\|\Delta_q u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}, \quad \|S_q u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^p}, \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty.$$

运用 Young 不等式, 可以知道这里 C 是独立于 q 的一个正常数。

定义 2.1 (Besov 空间) [37] 让 $s \in R, 1 \leq p \leq +\infty$ 。非齐次 Besov 空间 $B_{p,r}^s(R^n)$ 定义为

$$B_{p,r}^s(R^n) = \left\{ f \in \varphi'(R^n) : \|f\|_{B_{p,r}^s} = \|2^{qs} \Delta_q f\|_{l^r(L^p)} = \left\| \left(2^{qs} \|\Delta_q f\|_{L^p} \right)_{q \geq -1} \right\|_{l^r} < \infty \right\}.$$

如果 $s = \infty, B_{p,r}^\infty = \bigcap_{s \in R} B_{p,r}^s$ 。

定义 2.2 [37] 让 $T > 0, s \in R$ 和 $1 \leq p \leq \infty$ 。定义

$$E_{p,r}^s = \bigcap_{T > 0} E_{p,r}^s(T).$$

引理 2.2 [37] 让 $s \in R, 1 \leq p, r, p_j, r_j \leq \infty, j = 1, 2$, 则

- 1) 拓扑性质: $B_{p,r}^s$ 是 Banach 空间其连续嵌入到 $\varphi'(R^n)$ 。
- 2) 稠密性: C_c^∞ 在 $B_{p,r}^s$ 上是稠密的 $\Leftrightarrow 1 \leq p, r < \infty$ 。
- 3) 嵌入: 如果 $p_1 \leq p_2$ 和 $r_1 \leq r_2, B_{p_1, r_1}^s \subset B_{p_2, r_2}^s$ 。如果 $s_1 < s_2, B_{p, r_2}^{s_2} \subset B_{p, r_1}^{s_1}$ 局部紧的。

4) 代数性质: $\forall s > 0$, $B_{p,r}^s \cap L^\infty$ 是一个代数。 $B_{p,r}^s$ 是一个代数 $\Leftrightarrow B_{p,r}^s \subset L^\infty \Leftrightarrow s > \frac{n}{p}$ 或 $(s \geq \frac{n}{p}$ 和 $r=1)$ 。

5) 一维 Moser 型估计

(i) 当 $s > 0$,

$$\|fg\|_{B_{p,r}^s} \leq C \left(\|f\|_{B_{p,r}^s} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{B_{p,r}^s} \right).$$

(ii) $\forall s_1 \leq \frac{1}{p} < s_2$ (如果 $r=1$, $s_2 \geq \frac{1}{p}$) 和 $s_1 + s_2 > 0$, 有

$$\|fg\|_{B_{p,r}^{s_1}} \leq C \|f\|_{B_{p,r}^{s_1}} \|g\|_{B_{p,r}^{s_2}}.$$

6) 复杂插值: $\|f\|_{B_{p,r}^{\theta s_1 + (1-\theta)s_2}} \leq \|f\|_{B_{p,r}^{s_1}}^\theta \|f\|_{B_{p,r}^{s_2}}^{1-\theta}$, $\forall f \in B_{p,r}^{s_1} \cap B_{p,r}^{s_2}$, $\forall \theta \in [0,1]$ 。

7) Fatou 引理: 如果 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 在 $B_{p,r}^s$ 是有界的, 在 $\phi'(R^n)$, $u_n \rightarrow u$ 则

$$u \in B_{p,r}^s \text{ 和 } \|u\|_{B_{p,r}^s} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{B_{p,r}^s}.$$

8) 让 $m \in \mathbb{R}$ 和 f 是一个 S^m 的乘法器(即 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的并且满足 $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, 存在一个常数 C_α , 使得 $|\partial_\alpha f(\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$ 对所有的 $\xi \in \mathbb{R}^n$) 则算子 $f(D)$ 在 $B_{p,r}^s \rightarrow B_{p,r}^{s-m}$ 是连续的。

引理 2.3 (在 Besov 空间上的先验估计) [37] 让 $1 \leq p, r \leq \infty$ 和 $s > -\min\left(\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\right)$ 。假设 $f_0 \in B_{p,r}^s$,

$F \in L^1(0, T; B_{p,r}^s)$ 。如果 $s > 1 + \frac{1}{p}$, $\partial_x v \in L^1(0, T; B_{p,r}^{s-1})$, 否则 $\partial_x v \in L^1\left(0, T; B_{p,r}^{\frac{1}{p}} \cap L^\infty\right)$ 。如果

$f \in L^\infty(0, T; B_{p,r}^s) \cap C([0, T]; \phi'(R))$ 是以下一维线性传输方程的解:

$$\begin{cases} f_t + v f_x = F, \\ f(x, 0) = f_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

则存在一个常数 C 仅依赖于 s, p, r 使得以下陈述成立:

1) 如果 $r=1$ 或者 $s \neq 1 + \frac{1}{p}$ 则

$$\|f\|_{B_{p,r}^s} \leq \|f_0\|_{B_{p,r}^s} + \int_0^t \|F(\tau)\|_{B_{p,r}^s} d\tau + C \int_0^t V'(\tau) \|f\|_{B_{p,r}^s} d\tau,$$

或

$$\|f\|_{B_{p,r}^s} \leq e^{CV(t)} \left(\|f_0\|_{B_{p,r}^s} + \int_0^t e^{-CV(\tau)} \|F(\tau)\|_{B_{p,r}^s} d\tau \right). \quad (2.3)$$

如果 $s < 1 + \frac{1}{p}$, $V(t) = \int_0^t \|v_x\|_{\frac{1}{B_{p,r}^{\frac{1}{p}} \cap L^\infty}} d\tau$ 。否则, $V(t) = \int_0^t \|v_x\|_{B_{p,r}^{s-1}} d\tau$ 。

2) 如果 $s \leq 1 + \frac{1}{p}$, $f'_0 \in L^\infty$ 和 $f_x \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ 和 $F_x \in L^1(0, T; L^\infty)$, 则

$$\|f(t)\|_{B_{p,r}^s} + \|f_x\|_{L^\infty} \leq e^{CV(t)} \left(\|f_0\|_{B_{p,r}^s} + \|f_{0x}\|_{L^\infty} + \int_0^t e^{-CV(\tau)} \left[\|F(\tau)\|_{B_{p,r}^s} + \|F_x(\tau)\|_{L^\infty} \right] d\tau \right),$$

其中

$$V(t) = \int_0^t \|\partial_x v(\tau)\|_{\frac{1}{B_{p,r}^s \cap L^\infty}} d\tau.$$

3) 如果 $f = v$, 则对于所有的 $s > 0$, 当 $V(t) = \int_0^t \|v_x\|_{L^\infty} d\tau$, 陈述(1)成立。

4) 如果 $r < \infty$, 则 $f \in C([0, T]; B_{p,r}^s)$ 。如果 $r = \infty$, 对所有的 $s' < s$ 则 $f \in C([0, T]; B_{p,\infty}^{s'})$ 。

引理 2.4 (存在性和唯一性) [37] 让 p, r, s, f_0 和 F 就像在引理 2.3 所陈述的那样。假设 $v \in L^\rho(0, T; B_{\infty,\infty}^{-M})$ 对于一些 $\rho > 1$ 和 $M > 0$; 如果 $s > 1 + \frac{1}{p}$ 或 $s = 1 + \frac{1}{p}$, $r = 1$, $v_x \in L^1(0, T; B_{p,r}^{s-1})$; 如果 $s < 1 + \frac{1}{p}$,

$v_x \in L^1(0, T; B_{p,r}^{\frac{1}{p}} \cap L^\infty)$ 。则问题(2.1)有唯一解 $f \in L^\infty(0, T; B_{p,r}^s) \cap (\cap_{s' < s} C([0, T]; B_{p,1}^{s'}))$ 和引理 2.3 的不等式成立。此外, 如果 $r < \infty$, 则 $f \in C([0, T]; B_{p,r}^s)$ 。

3. 局部适定性结果

定理 令 $1 \leq p, r \leq \infty$ 和 $s > \max\left(1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right)$, $u_0 \in B_{p,r}^s$, 则存在一个时间 $T > 0$, 使得问题(1.1)在

$E_{p,r}^s(T)$ 中存在唯一解 u 。映射 $u_0 \rightarrow u$ 是在 $B_{p,r}^s$ 上 u_0 的一个邻域到 $C([0, T]; B_{p,r}^{s'}) \cap C^1([0, T]; B_{p,r}^{s'-1})$ 对每一个 $s' < s$ 都是连续的。当 $r < \infty$ 时, 问题(1.1)的解在 $E_{p,r}^s(T)$ 上是连续的。

证明 第一步: 近似解的建立

利用标准迭代过程, 建立一个解。从 $u^0 := 0$ 开始, 定义一个光滑函数序列 $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ 通过计算来解决以下线性传输方程:

$$\begin{cases} \left(\partial_t + \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u^n \right) \partial_x \right) u^{n+1} = P(D) \left[\left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) u^n + \frac{3-\theta}{2} (u^n)^2 + \frac{\theta}{2} (u_x^n)^2 + \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} (u^n)^3 + \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} (u^n)^4 \right], \\ u^{n+1}(x, 0) = u_0^{n+1} = S_{n+1} u_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

因为所有的数据都属于 $B_{p,r}^\infty$, 通过使用引理 2.4 和计算, 证明了对所有 $n \in \mathbb{N}$, 上述方程在 $C(\mathbb{R}^+, B_{p,r}^\infty)$ 上有一个全局解[37]。

第二步: 一致有界估计

将引理 2.3 的(2.3)式和(3.1)相结合, 有

$$\|u^{n+1}\|_{B_{p,r}^s} \leq e^{CU^n(t)} \|u_0\|_{B_{p,r}^s} + \frac{C}{2} \int_0^t e^{CU^n(t)-CU^n(\tau)} \|P(D)F(u^n, u_x^n)\|_{B_{p,r}^s} d\tau. \quad (3.2)$$

其中 $U^n(t) = \int_0^t \left\| \frac{\mu_0}{\mu} + \theta u^n \right\|_{B_{p,r}^s} d\tau = \int_0^t \left(\left\| \frac{\mu_0}{\mu} \right\|_{B_{p,r}^s} + \|\theta u^n\|_{B_{p,r}^s} \right) d\tau = \theta \int_0^t \|u^n\|_{B_{p,r}^s} d\tau$ 。

$$F(u^n, u_x^n) = \left[\left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) u^n + \frac{3-\theta}{2} (u^n)^2 + \frac{\theta}{2} (u_x^n)^2 + \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} (u^n)^3 + \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} (u^n)^4 \right]. \quad (3.3)$$

所以

$$\|u^{n+1}\|_{B_{p,r}^s} \leq e^{C\theta \int_0^t \|u^n\|_{B_{p,r}^s} d\tau} \|u_0\|_{B_{p,r}^s} + \frac{C}{2} \int_0^t e^{C\theta \int_\tau^t \|u^n\|_{B_{p,r}^s} d\tau} \|P(D)F(u^n, u_x^n)\|_{B_{p,r}^s} d\tau. \quad (3.4)$$

因为 $B_{p,r}^s$ 是一个代数在 $s > \max\left\{1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right\}$, 通过使用 $P(D)$ 的 S^{-1} 乘数性质, $B_{p,r}^s$ 空间的定义, 引理 2.2

的 5) 的(ii) 式和 $B_{p,r}^{s-1}$ 在 $s > \max\left\{1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right\}$ 是一个代数, 可以得到

$$\begin{aligned} \|P(D)F(u^n, u_x^n)\|_{B_{p,r}^s} &\leq C \left\| \left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) u^n + \frac{3-\theta}{2} (u^n)^2 + \frac{\theta}{2} (u_x^n)^2 + \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} (u^n)^3 + \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} (u^n)^4 \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \\ &\leq C \left(\|u^n\|_{B_{p,r}^s} + \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^2 + \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^3 + \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^4 \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

综上所述, 所以得出

$$\|u^{n+1}\|_{B_{p,r}^s} \leq e^{CU^n(t)} \|u_0\|_{B_{p,r}^s} + \frac{C}{2} \int_0^t e^{CU^n(t)-CU^n(\tau)} \left(\|u^n\|_{B_{p,r}^s} + \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^2 + \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^3 + \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^4 \right) d\tau. \quad (3.6)$$

其中 C 是从线到线的变化并且依赖于 μ , μ_0 , θ , α , Λ_1 和 Λ_2 。

现在固定一个时间 $T > 0$ 使得 $T < \min \left\{ \frac{1}{2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s}}, \frac{1}{C} \right\}$, 并且假设

$$\|u^n\|_{B_{p,r}^s} \leq \frac{2\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t}. \quad (3.7)$$

因为 $U^n(t) = \theta \int_0^t \|u^n\|_{B_{p,r}^s} d\tau$, 从(3.7)有

$$\begin{aligned} e^{CU^n(t)-CU^n(\tau)} &= e^{C\theta \int_\tau^t \|u^n\|_{B_{p,r}^s}(t') dt'} \leq e^{C\theta \int_\tau^t \frac{2\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t'} dt'} = e^{-\theta \left[\ln(1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t') \right]_\tau^t} \\ &= e^{\ln \left(\frac{1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau}{1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} \right)^\theta} = \left(\frac{1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau}{1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} \right)^\theta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

从(3.8)可知, 当 $\tau=0$ 时, 有

$$e^{CU^n(t)} \leq \frac{1}{\left(1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t \right)^\theta}. \quad (3.9)$$

通过利用(3.7)和(3.8), 得到

$$\begin{aligned} &\frac{C}{2} \int_0^t e^{CU^n(t)-CU^n(\tau)} \|u^n\|_{B_{p,r}^s}(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{C}{2} \int_0^t \left(\frac{1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau}{1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} \right)^\theta \times \frac{2\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau} d\tau \\ &= \frac{C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{\left(1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t \right)^\theta} \int_0^t \left(1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau \right)^{\theta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{2\theta} \left(\left(1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t \right)^{-\theta} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

通过使用平均值定理, 可以得到

$$\left(1-2C\theta\|u_0\|_{B_{p,r}^s} t \right)^{-\theta} - 1 = 2C\theta^2 \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t \xi_1^{-(\theta+1)}. \quad (3.11)$$

其中

$$\xi_1 = \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \xi\right), \quad 0 < \xi < t.$$

将(3.11)代入到(3.10), 得到

$$\frac{C}{2} \int_0^t e^{CU^n(t)-CU^n(\tau)} \|u^n\|_{B_{p,r}^s}(\tau) d\tau \leq \frac{C_1 \theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{\theta+1}}. \quad (3.12)$$

类似地可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} \int_0^t e^{CU^n(t)-CU^n(\tau)} \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^2(\tau) d\tau \\ & \leq \frac{C}{2} \int_0^t \left(\frac{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau}{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} \right)^\theta \times \frac{4\theta^2 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^2}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau\right)^2} d\tau \\ & = \frac{-\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^\theta} \left[\frac{1}{\theta-1} \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau\right)^{\theta-1} \right]_0^t \\ & \leq C_2 \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-\theta} - \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} \int_0^t e^{CU^n(t)-CU^n(\tau)} \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^3(\tau) d\tau \\ & \leq \frac{C}{2} \int_0^t \left(\frac{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau}{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} \right)^\theta \times \frac{8\theta^3 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^3}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau\right)^3} d\tau \\ & = \frac{-2\theta^2 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^2}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^\theta} \left[\frac{1}{\theta-2} \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau\right)^{\theta-2} \right]_0^t \\ & \leq C_3 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^2 \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-\theta} - \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-2} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} \int_0^t e^{CU^n(t)-CU^n(\tau)} \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^4(\tau) d\tau \\ & \leq \frac{C}{2} \int_0^t \left(\frac{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau}{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} \right)^\theta \times \frac{16\theta^4 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^4}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau\right)^4} d\tau \\ & = \frac{-4\theta^3 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^3}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^\theta} \left[\frac{1}{\theta-3} \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \tau\right)^{\theta-3} \right]_0^t \\ & \leq C_4 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^3 \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-\theta} - \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-3} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中, C_1, C_2, C_3, C_4 都是常数且依赖于 θ , 将(3.9)~(3.15)代入到(3.6), 可以得到

$$\begin{aligned}
 \|u^{n+1}\|_{B_{p,r}^s} &\leq \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-\theta} + C_1 \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-(\theta+1)} \\
 &\quad + C_2 \|u_0\|_{B_{p,r}^s} \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-\theta} - \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-1}\right] \\
 &\quad + C_3 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^2 \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-\theta} - \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-2}\right] \\
 &\quad + C_4 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^3 \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-\theta} - \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-3}\right] \\
 &\leq C \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^3 \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-\theta} + \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-1}\right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-2} + \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-3}\right].
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

因此, $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ 在 $C([0, T]; B_{p,r}^s)$ 上是一致有界的. 利用 $B_{p,r}^{s-1}$ 在 $s > \max\left\{1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right\}$ 是一个代数, 以及

$B_{p,r}^s \subset B_{p,r}^{s-1}$ 和 Besov 空间的定义, 可以推导出

$$\begin{aligned}
 \left\| \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u^n \right) u_x^{n+1} \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq C \left\| \frac{\mu_0}{\mu} + \theta u^n \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|u_x^{n+1}\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \theta \|u^n\|_{B_{p,r}^s} \|u^{n+1}\|_{B_{p,r}^s} \\
 &\leq C \theta \frac{2\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} \times C \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^3 \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-\theta} + \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-1} \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-2} + \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-3} \right] \\
 &\leq C \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^4 \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-(\theta+1)} + \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-2} \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-3} + \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^{-4} \right].
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

因为 $B_{p,r}^{s-1}$ 是一个代数, 利用 $P(D)$ 的 S^{-1} 乘数性质和(3.6), 有

$$\begin{aligned}
 &\|P(D)F(u^n, u_x^n)\|_{B_{p,r}^{s-1}} \\
 &\leq \|P(D)F(u^n, u_x^n)\|_{B_{p,r}^s} \\
 &\leq C \left(\|u^n\|_{B_{p,r}^s} + \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^2 + \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^3 + \|u^n\|_{B_{p,r}^s}^4 \right) \\
 &\leq C \left(\frac{2\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} + \frac{4\theta^2 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^2}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^2} + \frac{8\theta^3 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^3}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^3} + \frac{16\theta^4 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^4}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t\right)^4} \right) \\
 &= C \sum_{Q=1}^4 \left(\frac{2\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} \right)^Q.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

因此, (3.1)结合(3.17)和(3.18), 有

$$\begin{aligned} \|u_t^{n+1}\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq \left\| \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u^n \right) u_x^{n+1} \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} + \|P(D)F(u^n, u_x^n)\|_{B_{p,r}^{s-1}} \\ &\leq C \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^4 \left[\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t \right)^{-(\theta+1)} + \sum_{Q=2}^4 \left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t \right)^{-Q} \right] + C \sum_{Q=1}^4 \left(\frac{2\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t} \right)^Q. \end{aligned} \quad (3.19)$$

所以, $(u^n)_n \in C([0, T]; B_{p,r}^s) \cap C^1([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 。

现在证明 $(u^n)_n$ 是一个柯西列, 且 $(u^n)_n \in C([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 。

对于 $m, n \in \mathbb{N}$, 从(3.1)可知

$$u_t^{n+1} + \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u^n \right) u_x^{n+1} = P(D) \left[\left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) u^n + \frac{3-\theta}{2} (u^n)^2 + \frac{\theta}{2} (u_x^n)^2 + \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} (u^n)^3 + \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} (u^n)^4 \right]. \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} u_t^{n+m+1} + \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u^{n+m} \right) u_x^{n+m+1} \\ = P(D) \left[\left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) u^{n+m} + \frac{3-\theta}{2} (u^{n+m})^2 + \frac{\theta}{2} (u_x^{n+m})^2 + \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} (u^{n+m})^3 + \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} (u^{n+m})^4 \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

利用(3.21)减去(3.20), 有

$$(u^{n+m+1} - u^{n+1})_t + \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u^{n+m} \right) (u^{n+m+1} - u^{n+1})_x = \sum_{k=1}^6 T_k. \quad (3.22)$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= P(D) \left[\left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) (u^{n+m} - u^n) \right], \\ T_2 &= P(D) \left[\frac{3-\theta}{2} (u^{n+m} - u^n) (u^{n+m} + u^n) \right], \\ T_3 &= P(D) \left[\frac{\theta}{2} (u^{n+m} - u^n)_x (u^{n+m} + u^n)_x \right], \\ T_4 &= P(D) \left[\frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} (u^{n+m} - u^n) \left(\sum_{k=0}^2 (u^{n+m})^{2-k} (u^n)^k \right) \right], \\ T_5 &= P(D) \left[\frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} (u^{n+m} - u^n) \left(\sum_{k=0}^3 (u^{n+m})^{3-k} (u^n)^k \right) \right], \\ T_6 &= -\theta (u^{n+m} - u^n) u_x^{n+1}. \end{aligned}$$

当 $s > \max \left\{ 1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2} \right\}$, 利用 $P(D)$ 的 S^{-1} 乘数性质, $B_{p,r}^{s-1} \subset B_{p,r}^{s-2}$, 有

$$\|T_1\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \left\| \left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) (u^{n+m} - u^n) \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}}. \quad (3.23)$$

因为 $s > \max \left\{ 1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2} \right\}$, 利用 $P(D)$ 的 S^{-1} 乘数性质, $B_{p,r}^{s-1}$ 是一个代数, 引理 2.2 的 5) 的(ii)式和

$B_{p,r}^s \subset B_{p,r}^{s-1} \subset B_{p,r}^{s-2}$, 有

$$\begin{aligned} \|T_2\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq C \left\| \frac{3-\theta}{2} (u^{n+m} - u^n) (u^{n+m} + u^n) \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \\ &\leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-2}} \|u^{n+m} + u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} &\leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left(\|u^{n+m}\|_{B_{p,r}^s} + \|u^n\|_{B_{p,r}^s} \right), \\ \|T_3\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq C \left\| \frac{\theta}{2} (u^{n+m} - u^n)_x (u^{n+m} + u^n)_x \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \\ &\leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|u^{n+m} + u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left(\|u^{n+m}\|_{B_{p,r}^s} + \|u^n\|_{B_{p,r}^s} \right),$$

类似的可以得到

$$\begin{aligned} \|T_4\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq C \left\| \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} (u^{n+m} - u^n) \left(\sum_{k=0}^2 (u^{n+m})^{2-k} (u^n)^k \right) \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \\ &\leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-2}} \left(\sum_{k=0}^2 \left\| (u^{n+m})^{2-k} \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left\| (u^n)^k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \right) \\ &\leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left(\sum_{k=0}^2 \left\| (u^{n+m})^{2-k} \right\|_{B_{p,r}^s} \left\| (u^n)^k \right\|_{B_{p,r}^s} \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \|T_5\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq C \left\| \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} (u^{n+m} - u^n) \left(\sum_{k=0}^3 (u^{n+m})^{3-k} (u^n)^k \right) \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \\ &\leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-2}} \left(\sum_{k=0}^3 \left\| (u^{n+m})^{3-k} \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left\| (u^n)^k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \right) \\ &\leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left(\sum_{k=0}^3 \left\| (u^{n+m})^{3-k} \right\|_{B_{p,r}^s} \left\| (u^n)^k \right\|_{B_{p,r}^s} \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\|T_6\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \left\| -\theta (u^{n+m} - u^n) u_x^{n+1} \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|u^{n+1}\|_{B_{p,r}^{s-1}}. \quad (3.28)$$

所以, 综上所述

$$\|T_j\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left(\|u^{n+m}\|_{B_{p,r}^s} + \|u^n\|_{B_{p,r}^s} \right)^3. \quad (3.29)$$

又因为, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$\|u^n\|_{B_{p,r}^s} \leq \frac{2\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s}}{1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t},$$

将(3.23)~(3.29)结合在一起, 可以得到

$$\left\| \sum_{j=1}^6 T_j \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq \sum_{j=1}^6 \|T_j\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \|u^{n+m} - u^n\|_{B_{p,r}^{s-1}} \frac{8\theta^3 \|u_0\|_{B_{p,r}^s}^3}{\left(1 - 2C\theta \|u_0\|_{B_{p,r}^s} t \right)^3}. \quad (3.30)$$

下面进行分类讨论

(i) 当 $s \neq 2 + \frac{1}{p}$ 时, 将引理 2.4 与(3.22)和(3.30)相结合, 有

$$\begin{aligned} \|u^{n+m+1} - u^{n+1}(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq e^{CW^{n+m}(t)} \left\| (u^{n+m+1} - u^{n+1})(\cdot, 0) \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \\ &\quad + C \int_0^t e^{CW^{n+m}(t) - CW^{n+m}(\tau)} \sum_{j=1}^6 \|T_j\|_{B_{p,r}^{s-1}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.31)$$

当 $s-1 < 1 + \frac{1}{p}$ 时:

$$W^{n+m}(t) = \theta \int_0^t \left\| \partial_x u^{n+m}(\tau) \right\|_{\frac{1}{B_{p,r}^s} \cap L^\infty} d\tau. \quad (3.32)$$

当 $s-1 > 1 + \frac{1}{p}$ 时:

$$W^{n+m}(t) = \theta \int_0^t \left\| \partial_x u^{n+m}(\tau) \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} d\tau. \quad (3.33)$$

从(3.32)可知, 如果 $s-1 < 1 + \frac{1}{p}$, 利用 $B_{p,r}^{s-1} \subset L^\infty$ 和 $s > 1 + \frac{1}{p}$, 有

$$W^{n+m}(t) \leq C \int_0^t \|u^{n+m}(\tau)\|_{B_{p,r}^s} d\tau. \quad (3.34)$$

从(3.33)可知, 如果 $s-1 > 1 + \frac{1}{p}$, 有

$$W^{n+m}(t) \leq C \int_0^t \|u^{n+m}(\tau)\|_{B_{p,r}^s} d\tau. \quad (3.35)$$

因为

$$\left\| \sum_{q=n+1}^{n+m} \Delta_q u_0 \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C 2^{-n} \|u_0\|_{B_{p,r}^s}. \quad [37] \quad (3.36)$$

利用(3.30)~(3.36), 可以得到

$$\|u^{n+m+1} - u^{n+1}(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C_T \left(2^{-n} + \int_0^t \|u^{n+m} - u^n(\tau)\|_{B_{p,r}^{s-1}} d\tau \right). \quad (3.37)$$

通过对指数 n 的归纳论证, 可以很容易的证明

$$\|u^{n+m+1} - u^{n+1}(t)\|_{L_T^\infty B_{p,r}^{s-1}} \leq \frac{(TC_T)^{n+1}}{(n+1)!} \|u^m\|_{B_{p,r}^{s-1}} + 2^{-n} C_T \sum_{k=0}^n 2^k \frac{(TC_T)^k}{k!}. \quad (3.38)$$

因为 $\|u^m\|_{L_T^\infty(B_{p,r}^{s-1})}$ 独立于 m 是有界的, 可以找到一个新的常数 C'_T 使得

$$\|u^{n+m+1} - u^{n+1}(t)\|_{L_T^\infty B_{p,r}^{s-1}} \leq C'_T 2^{-n}, \quad (3.39)$$

因此, $(u^n)_n$ 在 $C([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 上是一个柯西列。此外, $(u^n)_n$ 在 $C([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 收敛于极限函数 u 。

(ii) 当 $s = 2 + \frac{1}{p}$ 时, 通过使用引理 2.2 的(6)式, 可以得到

$$\begin{aligned}
 \|u^{n+m+1} - u^{n+1}(t)\|_{L_T^\infty B_{p,r}^{s-1}} &= \|u^{n+m+1} - u^{n+1}(t)\|_{L_T^\infty B_{p,r}^{s-1}}^{1+\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|u^{n+m+1} - u^{n+1}\|_{L_T^\infty B_{p,r}^{s-1}}^\theta \|u^{n+m+1} - u^{n+1}(t)\|_{L_T^\infty B_{p,r}^{s-1}}^{1-\theta} \\
 &\leq \|u^{n+m+1} - u^{n+1}\|_{L_T^\infty B_{p,r}^{s-1}}^\theta \left[\|u^{n+m+1}(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{1+\frac{1}{p}} + \|u^{n+1}(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{1+\frac{1}{p}} \right]^{1-\theta} \\
 &\leq (C')^\theta 2^{-\theta n} \left[\|u^{n+m+1}(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{1+\frac{1}{p}} + \|u^{n+1}(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{1+\frac{1}{p}} \right]^{1-\theta}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

其中 $S_1 \in \left(\max\left(1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right) - 1, 1 + \frac{1}{p} \right)$, $S_2 \in \left(1 + \frac{1}{p}, 2 + \frac{1}{p}\right)$ 。所以, $(u^n)_n$ 是 $C([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 上的一个柯西列。此外, $(u^n)_n$ 在 $C([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 收敛于极限函数 u 。

第三步: (解在 $E_{p,r}^s(T)$ 存在且唯一), 证明 u 属于 $E_{p,r}^s(T)$ 并且满足方程(1.1)。

因为 $(u^n)_n$ 在 $L^\infty(0, T; B_{p,r}^s)$ 上一致有界, 在 Besov 空间上 Fatou 性质保证了 u 属于 $L^\infty(0, T; B_{p,r}^s)$ 。

如果 $s' \leq s-1$, 则

$$\|u^n - u\|_{B_{p,r}^{s'}} \leq \|u^n - u\|_{B_{p,r}^{s-1}}. \tag{3.41}$$

如果 $s-1 < s' < s$, 利用引理 2.2 的(6)式, 有

$$\|u^n - u\|_{B_{p,r}^{s'}} \leq \|u^n - u\|_{B_{p,r}^{s-1}}^\theta \|u^n - u\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{1-\theta} \leq \|u^n - u\|_{B_{p,r}^{s-1}}^\theta \left(\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|u^n\|_{B_{p,r}^s} \right)^{1-\theta}. \tag{3.42}$$

其中 $\theta = s - s'$ 。

结合(3.41)和(3.42), 对所有的 $s' < s$, 有 $(u^n)_n$ 在 $C([0, T]; B_{p,r}^{s'})$ 收敛于 u 。对(3.1)和(3.2)取极限, 可以得出 u 是方程(1.1)的解。现在 $u \in L^\infty(0, T; B_{p,r}^s)$, 以下方程的右边

$$u_t + \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u \right) u_x = P(D) \left(\left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) u + \frac{3-\theta}{2} u^2 + \frac{\theta}{2} u_x^2 + \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} u^3 + \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} u^4 \right). \tag{3.43}$$

也属于 $L^\infty(0, T; B_{p,r}^s)$, 利用 $P(D)$ 的 S^{-1} 乘数性质, $B_{p,r}^{s-1}$ 在 $s > \max\left\{1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right\}$ 是一个代数。可以得到

$$\begin{aligned}
 &\left\| P(D) \left(\left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) u + \frac{3-\theta}{2} u^2 + \frac{\theta}{2} u_x^2 + \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} u^3 + \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} u^4 \right) \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \\
 &\leq C \left(\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|u\|_{B_{p,r}^s}^2 + \|u\|_{B_{p,r}^s}^3 + \|u\|_{B_{p,r}^s}^4 \right).
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

当 $r < \infty$ 时, 从引理 2.4 和(3.43), 知道 $u \in C([0, T]; B_{p,r}^s)$, 很容易可以得到

$$\left\| \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u \right) u_x \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \left(\|u\|_{B_{p,r}^s} + \theta \|u\|_{B_{p,r}^s}^2 \right) \leq C \|u\|_{B_{p,r}^s}^2. \tag{3.45}$$

将(3.44)与(3.45)相结合, 有 $u_t \in C([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 和 $L^\infty([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$, 因此 $u \in E_{p,r}^s(T)$ 。

考虑 $s \neq 2 + \frac{1}{p}$ 的情况。假设 $u, v \in L^\infty(0, T; B_{p,r}^s) \cap C([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 分别是带有初始数据 $u_0, v_0 \in B_{p,r}^s$ 的一

般拟线性浅水波动方程的解。将要证明

$$\|u(t) - v(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq \|u_0 - v_0\|_{B_{p,r}^{s-1}} e^{C \int_0^t (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s})^3(\tau) d\tau}. \quad (3.46)$$

显然 $w = u - v$ 满足以下传输方程

$$w_t + \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \theta u \right) w_x = \sum_{k=1}^5 t_k - \theta w v_x. \quad (3.47)$$

其中

$$\begin{aligned} t_1 &= P(D) \left[\left(c - \frac{\mu_0}{\mu} \right) (u - v) \right], \\ t_2 &= P(D) \left[\frac{3 - \theta}{2} (u - v)(u + v) \right], \\ t_3 &= P(D) \left(\frac{\theta}{2} (u_x + v_x)(u_x - v_x) \right), \\ t_4 &= P(D) \left(\frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} (u - v) \left(\sum_{k=0}^2 u^{2-k} v^k \right) \right), \\ t_5 &= P(D) \left[\frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} (u - v) \left(\sum_{k=0}^3 u^{3-k} v^k \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

当 $s-1 > 1 + \frac{1}{p}$ 时, 利用引理 2.3 和 (3.47), 使用 ∂_x 的 S^{-1} 乘数性质, $B_{p,r}^{s-1}$ 在 $s > 1 + \frac{1}{p}$ 是一个代数和 $B_{p,r}^s \subset B_{p,r}^{s-1}$, 有

$$\begin{aligned} \|w_t\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq \|w_0\|_{B_{p,r}^{s-1}} + \int_0^t \left(\left\| \sum_{k=1}^5 t_k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} + \|\theta w v_x\|_{B_{p,r}^{s-1}} \right) d\tau + C \int_0^t \|\theta u_x\|_{B_{p,r}^{s-2}} \|w(\tau)\|_{B_{p,r}^{s-1}} d\tau \\ &\leq \|w_0\|_{B_{p,r}^{s-1}} + C \int_0^t \left(\left\| \sum_{k=1}^5 t_k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} + \theta \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|v\|_{B_{p,r}^s} \right) d\tau + C \int_0^t \theta \|u\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|w(\tau)\|_{B_{p,r}^{s-1}} d\tau \\ &\leq \|w_0\|_{B_{p,r}^{s-1}} + C \int_0^t \left(\left\| \sum_{k=1}^5 t_k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} + (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s}) \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \right) d\tau + C \int_0^t \|u\|_{B_{p,r}^s} \|w(\tau)\|_{B_{p,r}^{s-1}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.49)$$

当 $s-1 < 1 + \frac{1}{p}$ 时, 使用引理 2.3 的 1) 和 (3.47), $B_{p,r}^{s-1}$ 是一个代数, $s-1 > \frac{1}{p}$, $B_{p,r}^{s-1} \subset L^\infty$, 有

$$\begin{aligned} \|w_t\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq \|w_0\|_{B_{p,r}^{s-1}} + \int_0^t \left(\left\| \sum_{k=1}^5 t_k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} + \|\theta w v_x\|_{B_{p,r}^{s-1}} \right) d\tau + C \int_0^t \|\theta u_x\|_{\frac{1}{B_{p,r}^p \cap L^\infty}} \|w(\tau)\|_{B_{p,r}^{s-1}} d\tau \\ &\leq \|w_0\|_{B_{p,r}^{s-1}} + C \int_0^t \left(\left\| \sum_{k=1}^5 t_k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} + \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|v\|_{B_{p,r}^s} \right) d\tau + C \int_0^t \|u_x\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|w(\tau)\|_{B_{p,r}^{s-1}} d\tau \\ &\leq \|w_0\|_{B_{p,r}^{s-1}} + C \int_0^t \left(\left\| \sum_{k=1}^5 t_k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} + (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s}) \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \right) d\tau + C \int_0^t \|u\|_{B_{p,r}^s} \|w(\tau)\|_{B_{p,r}^{s-1}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.50)$$

因为 $s > \max \left\{ 1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2} \right\}$, 通过使用 $P(D)$ 的 S^{-1} 乘数性质, $B_{p,r}^{s-1} \subset B_{p,r}^{s-2}$, 有

$$\|t_1\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \|u-v\|_{B_{p,r}^{s-2}} \leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \quad (3.51)$$

因为 $s > \max\left\{1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right\}$, 通过使用 $P(D)$ 的 S^{-1} 乘数性质, $B_{p,r}^{s-1} \subset B_{p,r}^{s-2}$, $B_{p,r}^{s-1}\left(s-1 > \frac{1}{p}\right)$ 是一个代数, 有

$$\begin{aligned} \|t_2\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq C \|(u-v)(u+v)\|_{B_{p,r}^{s-2}} \leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|u+v\|_{B_{p,r}^{s-1}} \\ &\leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} (\|u\|_{B_{p,r}^{s-1}} + \|v\|_{B_{p,r}^{s-1}}) \leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \|t_3\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq C \left\| \frac{\theta}{2} (u_x + v_x)(u_x - v_x) \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \leq C \|u-v\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|u_x + v_x\|_{B_{p,r}^{s-2}} \\ &\leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \|u+v\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

因为 $s > \max\left\{1 + \frac{1}{p}, \frac{3}{2}\right\}$, 通过使用 $P(D)$ 的 S^{-1} 乘数性质, $B_{p,r}^{s-1} \subset B_{p,r}^{s-2}$, $B_{p,r}^{s-1}\left(s-1 > \frac{1}{p}\right)$ 是一个代数, 引理 2.2 的 5) 的(ii)式, $B_{p,r}^s$ 的定义, 可以得到

$$\begin{aligned} \|t_4\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq \left\| \frac{\Lambda_1}{3\alpha^2} (u-v) \left(\sum_{k=0}^2 u^{2-k} v^k \right) \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left\| \sum_{k=0}^2 u^{2-k} v^k \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \\ &\leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left\| \sum_{k=0}^2 u^{2-k} v^k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left(\sum_{k=0}^2 \|u\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{2-k} \|v\|_{B_{p,r}^{s-1}}^k \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \|t_5\|_{B_{p,r}^{s-1}} &\leq \left\| \frac{\Lambda_2}{4\alpha^3} (u-v) \left(\sum_{k=0}^3 u^{3-k} v^k \right) \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left\| \sum_{k=0}^3 u^{3-k} v^k \right\|_{B_{p,r}^{s-2}} \\ &\leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left\| \sum_{k=0}^3 u^{3-k} v^k \right\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left(\sum_{k=0}^3 \|u\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{3-k} \|v\|_{B_{p,r}^{s-1}}^k \right) \\ &\leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} \left(\sum_{k=0}^3 \|u\|_{B_{p,r}^s}^{3-k} \|v\|_{B_{p,r}^s}^k \right) \leq C \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s})^3 \end{aligned} \quad (3.55)$$

当 $s \neq 2 + \frac{1}{p}$ 时, 将(3.51)~(3.55)代入(3.49)和(3.50), 有

$$\|w(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq \|w_0\|_{B_{p,r}^{s-1}} + C \int_0^t \|w\|_{B_{p,r}^{s-1}} (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s})^3 d\tau \quad (3.56)$$

利用一般的 Gronwall 不等式, 有

$$\|w(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}} \leq \|w_0\|_{B_{p,r}^{s-1}} e^{C \int_0^t (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s})^3 d\tau}.$$

当 $u_0 = v_0$ 时, 可以得到 $u(t) = v(t)$ 。

对于 $s = 2 + \frac{1}{p}$ 时, 将 $s \neq 2 + \frac{1}{p}$ 的情况与插值相结合, 很容易得到唯一的结果。

第四步: 对初始数据连续依赖

如果 $s' = s - 1$, 结论是成立的, 如果 $s' < s - 1$, 通过使用引理 2.2 的 6) 式和(3.46), 有

$$\begin{aligned}
 & \|u(t) - v(t)\|_{B_{p,r}^{s'}} \\
 & \leq C \|u(t) - v(t)\|_{B_{p,r}^{s_1}}^{\theta_1} \|u(t) - v(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{1-\theta_1} \\
 & \leq C \|u(t) - v(t)\|_{B_{p,r}^{s_1}}^{\theta_1} e^{C(1-\theta_1) \int_0^t (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s})^3 d\tau} \|u_0 - v_0\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{1-\theta_1} \\
 & \leq C \|u(t) - v(t)\|_{B_{p,r}^{s_1}}^{\theta_1} e^{C(1-\theta_1) \int_0^t (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s})^3 d\tau} \|u_0 - v_0\|_{B_{p,r}^{s'}}^{\theta_2(1-\theta_1)} \|u_0 - v_0\|_{B_{p,r}^s}^{(1-\theta_2)(1-\theta_1)} \\
 & \leq C \left[\|u(t)\|_{B_{p,r}^s} + \|v(t)\|_{B_{p,r}^s} \right]^{\theta_1} e^{C(1-\theta_1) \int_0^t (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s})^3 d\tau} \|u_0 - v_0\|_{B_{p,r}^{s'}}^{\theta_2(1-\theta_1)} \|u_0 - v_0\|_{B_{p,r}^s}^{(1-\theta_2)(1-\theta_1)}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

其中

$$\begin{aligned}
 s' &= \theta_1 s_1 + (1 - \theta_1)(s - 1), \quad s_1 < s - 1, \\
 s - 1 &= \theta_2 s' + s(1 - \theta_2).
 \end{aligned}$$

如果 $s - 1 < s' < s$ ，通过使用引理 2.2 的(6)式和(3.46)，推导出

$$\begin{aligned}
 \|u(t) - v(t)\|_{B_{p,r}^{s'}} & \leq C \|u(t) - v(t)\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{\theta_3} \|u(t) - v(t)\|_{B_{p,r}^s}^{1-\theta_3} \\
 & \leq C \|u(0) - v(0)\|_{B_{p,r}^{s-1}}^{\theta_3} e^{C\theta_3 \int_0^t (\|u\|_{B_{p,r}^s} + \|v\|_{B_{p,r}^s})^3 d\tau} \left(\|u(t)\|_{B_{p,r}^s} + \|v(t)\|_{B_{p,r}^s} \right)^{1-\theta_3} \\
 & \leq C \|u(0) - v(0)\|_{B_{p,r}^{s'}}^{\theta_3} e^{C\theta_3 \int_0^t (\|u(t)\|_{B_{p,r}^s} + \|v(t)\|_{B_{p,r}^s})^3 d\tau} \left(\|u(t)\|_{B_{p,r}^s} + \|v(t)\|_{B_{p,r}^s} \right)^{1-\theta_3}
 \end{aligned}$$

其中

$$s' = \theta_3(s - 1) + (1 - \theta_3)s.$$

当 $r < \infty$ 时，可以证明在 $C([0, T]; B_{p,r}^s) \cap C^1([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 上的连续性是正确的，它在粘性近似解序列的帮助下 $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 对于拟线性浅水波动方程在 $C([0, T]; B_{p,r}^s) \cap C^1([0, T]; B_{p,r}^{s-1})$ 上是收敛的。因此完成了定理 1 的证明。

4. 总结

本文主要研究了一类新的拟线性浅水波方程在 Besov 空间 $\{B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n) | s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, r \leq +\infty\}$ 中的局部适定性问题。然而，关于方程(1.1)在 Besov 空间中的爆破现象，解的全局存在性等其他问题还有待被研究。

基金项目

山西省基础研究计划项目(202203021212286)。

参考文献

- [1] Wang, H., Kang, J. and Liu, X. (2022) On the Modeling of Shallow-Water Waves Moving over a Shear Flow. *Applied Mathematics Letters*, **124**, Article ID: 107607. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107607>
- [2] Johnson, R.S. (2003) The Camassa-Holm Equation for Water Waves Moving over a Shear Flow. *Fluid Dynamics Research*, **33**, 97-111. [https://doi.org/10.1016/s0169-5983\(03\)00036-4](https://doi.org/10.1016/s0169-5983(03)00036-4)
- [3] Quirchmayr, R. (2016) A New Highly Nonlinear Shallow Water Wave Equation. *Journal of Evolution Equations*, **16**, 539-567. <https://doi.org/10.1007/s00028-015-0312-4>

- [4] Li, M., Liu, X. and Liu, Y. (2023) A Highly Nonlinear Shallow-Water Model Arising from the Full Water Waves with the Coriolis Effect. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **25**, Article No. 39. <https://doi.org/10.1007/s00021-023-00785-9>
- [5] Dai, H. (1998) Model Equations for Nonlinear Dispersive Waves in a Compressible Mooney-Rivlin Rod. *Acta Mechanica*, **127**, 193-207. <https://doi.org/10.1007/bf01170373>
- [6] Dai, H. and Huo, Y. (2000) Solitary Shock Waves and Other Travelling Waves in a General Compressible Hyperelastic Rod. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **456**, 331-363. <https://doi.org/10.1098/rspa.2000.0520>
- [7] Fokas, A.S. and Fuchssteiner, B. (1981) Bäcklund Transformations for Hereditary Symmetries. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, **4**, 47-66.
- [8] Fuchssteiner, B. and Fokas, A.S. (1981) Symplectic Structures, Their Bäcklund Transformations and Hereditary Symmetries. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **4**, 47-66. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(81\)90004-x](https://doi.org/10.1016/0167-2789(81)90004-x)
- [9] Constantin, A. (2001) On the Scattering Problem for the Camassa-Holm Equation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **457**, 953-970. <https://doi.org/10.1098/rspa.2000.0701>
- [10] Camassa, R., Holm, D.D. and Hyman, J.M. (1994) A New Integrable Shallow Water Equation. *Advances in Applied Mechanics*, **31**, 1-3.
- [11] Constantin, A. (2006) The Trajectories of Particles in Stokes Waves. *Inventiones Mathematicae*, **166**, 523-535. <https://doi.org/10.1007/s00222-006-0002-5>
- [12] Constantin, A. and Escher, J. (2011) Analyticity of Periodic Traveling Free Surface Water Waves with Vorticity. *Annals of Mathematics*, **173**, 559-568. <https://doi.org/10.4007/annals.2011.173.1.12>
- [13] Beals, R., Sattinger, D.H. and Szmigielski, J. (1999) Multi-Peakons and a Theorem of Stieltjes. *Inverse Problems*, **15**, L1-L4. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/1/001>
- [14] Constantin, A. and Strauss, W.A. (2000) Stability of Peakons. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **53**, 603-610. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0312\(200005\)53:5<603::aid-cpa3>3.3.co;2-c](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0312(200005)53:5<603::aid-cpa3>3.3.co;2-c)
- [15] Cao, C., Holm, D.D. and Titi, E.S. (2004) Traveling Wave Solutions for a Class of One-Dimensional Nonlinear Shallow Water Wave Models. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **16**, 167-178. <https://doi.org/10.1023/b:jody.0000041284.26400.d0>
- [16] Constantin, A. (2000) Existence of Permanent and Breaking Waves for a Shallow Water Equation: A Geometric Approach. *Annales de l'institut Fourier*, **50**, 321-362. <https://doi.org/10.5802/aif.1757>
- [17] Constantin, A. and Escher, J. (1998) Wave Breaking for Nonlinear Nonlocal Shallow Water Equations. *Acta Mathematica*, **181**, 229-243. <https://doi.org/10.1007/bf02392586>
- [18] Constantin, A. (2001) On the Scattering Problem for the Camassa-Holm Equation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **457**, 953-970. <https://doi.org/10.1098/rspa.2000.0701>
- [19] Constantin Adrian, E.J. (1998) Global Existence and Blow-Up for a Shallow Water Equation. *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, **26**, 303-328.
- [20] Constantin, A. and Escher, J. (1998) On the Cauchy Problem for a Family of Quasilinear Hyperbolic Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **23**, 1449-1458. <https://doi.org/10.1080/03605309808821389>
- [21] Constantin, A. and Escher, J. (1998) Well-Posedness, Global Existence, and Blowup Phenomena for a Periodic Quasi-Linear Hyperbolic Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **51**, 475-504. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0312\(199805\)51:5<475::aid-cpa2>3.0.co;2-5](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0312(199805)51:5<475::aid-cpa2>3.0.co;2-5)
- [22] Danchin, R. (2001) A Few Remarks on the Camassa-Holm Equation. *Differential and Integral Equations*, **14**, 953-988. <https://doi.org/10.57262/die/1356123175>
- [23] Lai, S. and Wu, Y. (2010) Global Solutions and Blow-Up Phenomena to a Shallow Water Equation. *Journal of Differential Equations*, **249**, 693-706. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.03.008>
- [24] Li, Y.A. and Olver, P.J. (2000) Well-Posedness and Blow-Up Solutions for an Integrable Nonlinearly Dispersive Model Wave Equation. *Journal of Differential Equations*, **162**, 27-63. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3683>
- [25] Brandolese, L. (2014) Local-in-Space Criteria for Blowup in Shallow Water and Dispersive Rod Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **330**, 401-414. <https://doi.org/10.1007/s00220-014-1958-4>
- [26] Chen, R.M., Guo, F., Liu, Y. and Qu, C. (2016) Analysis on the Blow-Up of Solutions to a Class of Integrable Peakon Equations. *Journal of Functional Analysis*, **270**, 2343-2374. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.01.017>
- [27] Constantin, A. and Lannes, D. (2008) The Hydrodynamical Relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi

-
- Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **192**, 165-186. <https://doi.org/10.1007/s00205-008-0128-2>
- [28] Wei, L., Wang, Y. and Zhang, H. (2017) Breaking Waves and Persistence Property for a Two-Component Camassa-Holm System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **445**, 1084-1096. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.08.035>
 - [29] Zhou, Y. (2005) Blow-Up of Solutions to a Nonlinear Dispersive Rod Equation. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **25**, 63-77. <https://doi.org/10.1007/s00526-005-0358-1>
 - [30] Linares, F. and Ponce, G. (2020) Unique Continuation Properties for Solutions to the Camassa-Holm Equation and Related Models. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **148**, 3871-3879. <https://doi.org/10.1090/proc/15059>
 - [31] Dong, X., Su, X. and Wang, K. (2024) Wave-Breaking Phenomena for a New Weakly Dissipative Quasilinear Shallow-Water Waves Equation. *Monatshefte für Mathematik*. <https://doi.org/10.1007/s00605-024-01958-y>
 - [32] Kato, T. (2006) Quasi-Linear Equations of Evolution, with Applications to Partial Differential Equations. *Spectral Theory and Differential Equations: Proceedings of the Symposium*, Dundee, 1-19 July 1974, 25-70.
 - [33] Danchin, R. (2005) Fourier Analysis Methods for PDEs. Lecture Notes 14.1.
 - [34] Danchin, R. (2003) A Note on Well-Posedness for Camassa-Holm Equation. *Journal of Differential Equations*, **192**, 429-444. [https://doi.org/10.1016/s0022-0396\(03\)00096-2](https://doi.org/10.1016/s0022-0396(03)00096-2)
 - [35] Vishik, M. (1998) Hydrodynamics in Besov Spaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **145**, 197-214. <https://doi.org/10.1007/s002050050128>
 - [36] Chemin, J.Y. (2004) Localization in Fourier Space and Navier-Stokes. *Phase Space Analysis of Partial Differential Equations*, **1**, 53-136.
 - [37] Yan, W., Li, Y. and Zhang, Y. (2013) The Cauchy Problem for the Generalized Camassa-Holm Equation. *Applicable Analysis*, **93**, 1358-1381. <https://doi.org/10.1080/00036811.2013.833325>