Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(6), 2943-2951**
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.136281

整数群约化交叉积C^*-代数上半范数的下半连续性

沈文涛

南京航空航天大学数学学院，江苏 南京

收稿日期：2024年5月28日；录用日期：2024年6月22日；发布日期：2024年6月29日

摘 要

紧量子度量空间结构是算子代数领域非常重要的研究内容，既有重要的理论意义，又有广泛的应用前景. 本文利用一般的长度函数构造出一类*-半范数。同时，利用约化交叉积C^*-代数的共变表示可以构造出另一类*-半范数。通过讨论它们下半连续性，发现其中一类*-半范数是下半连续的，另一类*-半范数与C^*-代数的半范数L的下半连续性是等价的。进一步构造出一类与对应的紧量子度量空间紧密相关的*-半范数。

关键词

长度函数，*-半范数，下半连续性

The Lower Semicontinuity of Seminorms on Crossed Product C^*-Algebras of Integer Group

Wentao Shen

College of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

Received: May 28th, 2024; accepted: Jun. 22nd, 2024; published: Jun. 29th, 2024

Abstract

Compact quantum metric space structure is a very important research topic in the field of operator algebras. It has great theoretical significance and a wide range of application prospects. In this paper, a class of *-seminorms is constructed by using the general length function. At the same time, another kind of *-seminorms can be constructed by using the covariant representation of reduced cross product algebras. By discussing their lower semicontinuity, we can find that one type of

文章引用: 沈文涛. 整数群约化交叉积 C^*-代数上半范数的下半连续性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(6): 2943-2951.
DOI: 10.12677/aam.2024.136281

*-seminorms is lower semicontinuous, while the other type of *-seminorms is equivalent to the lower semicontinuity of the seminorm of C^*-algebra. Furthermore, we can a class of *-seminorms that is closely related to the corresponding compact quantum metric space.

Keywords

Length Function, *-Seminorms, Lower Semi-Continuity

1. 引言

在二十世纪八十年代，Connes 利用算子代数理论构建了非交换微分几何理论。他的研究主要集中在谱三元组上[1]。在此之后，Connes 又相继得到了谱三元组的一系列结果[2]-[4]。当 X 是一个紧的黎曼自旋流形时，他利用 $C(X)$ 的一个谱三元组构造了一个半范数来刻画 X 上的测地距离，即由一个 Dirac 算子可以诱导出 C^*-代数上的黎曼度量。Connes 还发现了在 C^*-代数态空间构造上一般度量的方法，其中这个度量是对概率测度空间上的 Monge-Kantorovich 度量的推广[5]。

受 Connes 研究的启发，Rieffel 讨论了态空间上的度量拓扑与弱*-拓扑之间的关系[6]。从九十年代末开始，他发表了多篇讨论态空间上的度量拓扑与弱*-拓扑的一致性问题的文章。并在 2004 年，Rieffel 由态空间上的度量拓扑与弱*-拓扑的一致性问题，定义了紧量子度量空间的概念[7]。对于一个序单位空间 (A,e) 上的一个半范数 L，如果满足以下条件：

1) 对 $\forall a\in A$， $L(a)=0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}e$ 。

2) A 的态空间 $S(A)$ 上由 $\rho_L(\mu,\nu)=\sup\{|\mu(f)-\nu(f)|:L(f)\le 1\},\forall\mu,\nu\in S(A)$ 定义的度量 ρ_L 对应的拓扑与弱*-拓扑一致。

那么就称它是 A 的一个 Lip-范数。Rieffel 把由一个序单位空间 A 和一个 Lip-范数 L 组成的二元组 (A,L) 称为是一个紧量子度量空间。

在这之后，Antonescu 和 Christensen 利用一类具有速降性质的群研究了相应的约化群 C^*-代数的紧量子度量空间结构[8]。2013 年，Hawkins 等人利用谱三元组来研究整数群交叉积 C^*-代数的紧量子度量空间结构[9]。他们在度量等度连续条件下，利用 C^*-代数 A 上的一个奇谱三元组构造出了对应的交叉积 C^*-代数的一个偶谱三元组。在 2017 年，Christ 和 Rieffel 研究了多项式增长群 C^*-代数的紧量子度量空间结构，并证明了强多项式增长的长度函数 ℓ 是有界双重的[10]。在[9] [11]中，Bellissaed，Hawkins 等人都是在等度连续的情况下，研究了交叉积 C^*-代数的紧量子度量空间结构。Kaad 和 Kyed 受到他们的启发，在拟等距的情况下对交叉积 C^*-代数的紧量子度量结构进行了研究[12]。在 (A,L) 是一个紧量子度量空间的情况下，Kaad 和 Kyed 定义了一个由整数群 $\mathbb{Z}$ 诱导的半范数 L_1 和一个由 L 诱导的半范数 L_2。Kaad 和 Kyed 证明了半范数 L_1 是下半连续的，而半范数 L_2 的下半连续性与 L 的下半连续性是等价的。他们由此定义了半范数 $L_B=\max\{L_1,L_2\}$。

在 Kaad 和 Kyed 研究的基础上，本文将考虑借助整数群 $\mathbb{Z}$ 上的一般的长度函数构造了相应的半范数，并且证明了它们是*-半范数。对于由一般的长度函数诱导的两类*-半范数，我们也探讨了它们的下半连续性。最后得到一类与对应的紧量子度量空间紧密相关的*-半范数。

2. 预备知识

设 A 是一个有单位元的 C^*-代数，G 是一个离散群，$\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$ 是 G 在 A 上的一个群作用。我们用 $C_c(G, A)$ 表示由 G 上的有限支撑 A-值函数构成的空间。对 $\forall f = \sum_{s\in G} a_s s$，$g = \sum_{t\in G} b_t t \in C_c(G, A)$，定义如下的运算：

$$
\begin{aligned}
&(f+g)(k) = f(k) + g(k),\\
&(cf)(k) = cf(k),\\
&f *_\alpha g = \sum_{s,t\in G} a_s \alpha_s(b_t) st,\\
&f^* = \sum_{t\in G} \alpha_t\left(a_{t^{-1}}^*\right) t.
\end{aligned}
$$

易知 $C_c(G, A)$ 是一个*-代数。

设 H 是一个 Hilbert 空间。如果它上面有一个*-忠实表示，使得 $A \subseteq \mathbb{B}(H)$，那么可以定义一个 A 在 $\ell^2(G) \otimes H$ 上的一个表示 π，即

$$
\pi(a)(\delta_t \otimes \xi) = \delta_t \otimes \left(\alpha_{t^{-1}}(a)(\xi)\right), \forall t \in G, a \in A, \xi \in H,
$$

其中 $\{\delta_t\}_{t\in G}$ 是 $\ell^2(G)$ 上的标准规范正交基。同时，我们令 G 的一个酉表示为 $\left(\Lambda, \ell^2(G) \otimes H\right)$，定义如下：

$$
\Lambda_s(\delta_t \otimes \xi) = \delta_{st} \otimes \xi, \forall s, t \in G, \xi \in H.
$$

那么对 $\forall s, t \in G, a \in A, \xi \in H$，我们有

$$
\begin{aligned}
\Lambda_s \pi(a) \Lambda_s^*(\delta_t \otimes \xi) &= \Lambda_s \pi(a)\left(\delta_{s^{-1}t} \otimes \xi\right)\\
&= \Lambda_s\left(\delta_{s^{-1}t} \otimes \alpha_{t^{-1}s}(a)(\xi)\right)\\
&= \delta_t \otimes \alpha_{t^{-1}}(\alpha_s(a))(\xi)\\
&= \pi(\alpha_s(a))(\delta_t \otimes \xi)
\end{aligned}
$$

由文献[13] [14]可知，$C_c(G, A)$ 在 $\ell^2(G) \otimes H$ 上有一个*-表示 λ 与这样得到的 π 和 λ 一一对应，并且对 $f \in C_c(G, A)$，有

$$
\lambda(f) = \sum_{s\in G} \pi(a_s) \Lambda_s.
$$

于是

$$
\|\lambda(f)\| = \left\|\sum_{s\in G} \pi(a_s)\Lambda_s\right\| \le \sum_{s\in G} \|\pi(a_s)\| \le \sum_{s\in G} \|a_s\| = \|f\|_1.
$$

因此，对 $\forall f \in C_c(G, A)$，可得 $\lambda(f) \in \mathbb{B}\left(\ell^2(G) \otimes H\right)$。从而可以定义 $C_c(G, A)$ 的一个范数 $\|\cdot\|$ 为

$$
\|f\| = \|\lambda(f)\|, \forall f \in C_c(G, A). \tag{1}
$$

由以上内容，我们可以验证 $\|\cdot\|$ 是 $C_c(G, A)$ 上的一个 C^*-范数。

定义 2.1 [13] $C_c(G, A)$ 在(1)中定义的范数下的完备空间 $A \rtimes_{\alpha, r} G$ 称为是它的约化交叉积 C^*-代数。

3. 由长度函数诱导的半范数

在这一节里，我们将利用整数群 $\mathbb{Z}$ 上一般的长度函数诱导一类在整数群交叉积 C^*-代数上的半范数。同时，我们将借助整数约化交叉积 C^*-代数的共变表示诱导另一类半范数。我们也将证明这两类半范数都

是*-半范数，并由此讨它们的下半连续性。最后由它们的最大值可以得到一个新的*-半范数。

设 A 是一个有单位元的 C^*-代数，$\mathcal{A}\subseteq A$ 是包含 A 的单位元的稠子空间。令 $\sigma: A\to A$ 是 A 上的一个*-自同构，且是一个 σ-不变子空间，即

$$\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{A}=\sigma^{-1}(\mathcal{A}).$$

由*-自同构 σ 我们可以诱导出整数群 $\mathbb{Z}$ 在 A 上的一个作用，并进一步得到单位元为 $1=1_A U^0$ 的约化交叉积 C^*-代数 $B=A\rtimes_{\sigma,r}\mathbb{Z}$。

假设 $\mathcal{A}$ 是*-不变的 $L:\mathcal{A}\to[0,\infty)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个半范数，并且对 $\forall a\in\mathcal{A}$，满足 $L(a)=L(a^*)$，$L(1_A)=0$. 设 H 是一个 Hilbert 空间。如果 $\pi: A\to\mathbb{B}(H)$ 是一个保单位元的*-忠实表示，则可以得到 B 在 $\ell^2(\mathbb{Z})\otimes H$ 上的*-表示 $\lambda_\pi: B\to\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{Z})\otimes H)$，其中 $\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{Z})\otimes H)$ 为在 $\ell^2(\mathbb{Z})\otimes H$ 上的有界可伴随算子构成的有单位元的 C^*-代数。$\{e_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 表示在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的标准规范正交基，U 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的酉算子。对 $\forall a\in A$，$\xi\in H$，$m\in\mathbb{Z}$，*-表示 λ_π 具体定义如下：

$$\lambda_\pi(a)(e_m\otimes\xi)=e_m\otimes\pi\left(\sigma^{-m}(a)\right)(\xi),\quad \lambda_\pi(U)(e_m\otimes\xi)=e_{m+1}\otimes\xi.$$

易证 λ_π 是一个单的*-同态，从而可以把 B 看成是 $\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{Z})\otimes H)$ 的一个子空间。

为了后面书写的方便，我们省略符号 λ_π。对 $\forall a\in A$，$\xi\in H$，$m\in\mathbb{Z}$，有

$$UaU^*(e_m\otimes\xi)=e_m\otimes\pi\left(\sigma^{-m+1}(a)\right)(\xi)=\sigma(a)(e_m\otimes\xi).$$

因此，$UaU^*=\sigma(a)$。进一步，对 $\forall n\in\mathbb{Z}$，有 $U^n a\left(U^*\right)^n=\sigma^n(a)$。

设 V_B 表示由整数群 $\mathbb{Z}$ 上的有限支撑 $\mathcal{A}$-值函数构成的线性空间 $C_c(\mathbb{Z},\mathcal{A})$。由 V_B 的定义，可知它是包含 B 的单位元的稠子空间。对 $\forall a\in\mathcal{A}, n\in\mathbb{Z}$，有

$$\left(aU^n\right)^*=U^{-n}a^*U^nU^{-n}=\sigma^{-n}\left(a^*\right)U^{-n}\in V_A.$$

因此，V_B 是一个*-不变子空间。于是可以定义一个*-同态 $l: A\to B$，使得 A 等距同构于 B 的一个子空间，具体定义如下：

$$l(a)=\lambda_\pi(a),\quad l(1_A)=\lambda_\pi(1_A),\quad a\in A.$$

定义 3.1 设 $|||\cdot|||: C_c(\mathbb{Z})\to[0,\infty)$ 是 $C_c(\mathbb{Z})$ 上的一个范数。对 $\forall f,g\in C_c(\mathbb{Z})$，如果对 $\forall n\in\mathbb{Z}$，有 $0\le f(n)\le g(n)$，$|||f|||\le|||g|||$，那么称范数 $|||\cdot|||$ 是保序的。

定义 3.2 群 G 上的一个非负实值函数 $\ell: G\to[0,+\infty)$，如果满足下列条件：

1) $\ell(x)=0$ 当且仅当 $x=e$，其中 e 是 G 的单位元。
2) $\ell(x)=\ell\left(x^{-1}\right), \forall x\in G$。
3) $\ell(xy)\le\ell(x)+\ell(y), \forall x,y\in G$。

那么称它是 G 上的一个长度函数。

为了方便理解，下面给出一个长度函数的例子。

例 3.1 [15]对于整数群 $\mathbb{Z}$，我们可以定义它关于生成元集 $\{2,3\}$ 的词长函数 $\ell:\mathbb{Z}\to[0,\infty)$。由词长函数的定义，可知

$$\ell(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ 1 & n=-3,-2,2,3\\ 2 & n=-1,1\\ m & 3m-2\le|n|\le 3m, m\ge 2\end{cases}$$

易证 ℓ 是一个长度函数。

设 $|||\cdot|||: C_c(\mathbb{Z}) \to [0,\infty)$ 是 $C_c(\mathbb{Z})$ 上的一个保序范数，$\ell: \mathbb{Z} \to [0,\infty)$ 是整数群 $\mathbb{Z}$ 的一个长度函数。为了方便，我们假设 $|||\cdot|||$ 是正规的，即 $|||e_0||| = 1$。

定义 3.3 在 V_B 上，我们定义两个半范数 L_1 和 $L_2: V_B \to [0,\infty)$。对 $\forall f \in V_A$，它们分别定义为

$$L_1(f) = \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell(n) f(n) U^n \right\| \tag{2}$$

和

$$L_2(f) = \max\left\{ |||L\circ f|||, |||L\circ f^*||| \right\}. \tag{3}$$

我们可以定义 V_B 上的映射 $E: V_B \to A$，即

$$E(f) = f(0), \forall f \in V_B.$$

很明显 E 是一个保单位元的正线性映射，于是可以把 E 延拓成 V_B 上的一个忠实的条件期望(仍然用 E 表示)。进一步，如果定义 $E_n: B \to A$ 为 $E_n(f) = E(fU^n)$。根据 E_n 的定义，对 $\forall f \in V_B, n \in \mathbb{Z}$，有

$$f(n) = E_{-n}(f), \quad f^*(n) = \sigma^n\left(f(-n)^*\right) = E_{-n}(f^*).$$

因此，(3)式可以表示为：

$$\begin{aligned} L_2(f) &= \max\left\{ |||\sum_{n=-\infty}^{\infty} L(E_{-n}(f)) e_n|||, |||\sum_{n=-\infty}^{\infty} L(E_{-n}(f^*)) e_n||| \right\} \\ &= \max\left\{ \sup_{N\in\mathbb{N}} |||\sum_{n=-N}^{N} L(E_{-n}(f)) e_n|||, \sup_{N\in\mathbb{N}} |||\sum_{n=-N}^{N} L(E_{-n}(f^*)) e_n||| \right\}, \end{aligned}$$

其中第二个等号可由范数的保序性得到。

命题 3.1 令 ℓ 是整数群 $\mathbb{Z}$ 上的一个长度函数，A 是一个有单位元的 C^*-代数由等式(2)，(3)定义的 $L_i: V_B \to [0,\infty)(i=1,2)$ 是核空间为 $\ker(L_i) = \{f \in V_B : f(n) \in \mathbb{C}1_A, n \in \mathbb{Z}\}(i=1,2)$ 的 *-半范数。

证明：根据 L_1, L_2 的定义，显然它们都是 V_B 上的半范数。同时，对 $\forall f \in V_B$，有 $L_2(f) = L_2(f^*)$。则 L_2 是 V_B 上的一个*-半范数。又因为 $L\circ 1(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$。从而，$L\circ 1(k) \le 0(k), \forall k \in \mathbb{Z}$。由于 $|||\cdot|||$ 是保序范数，所以 $\|L\circ 1\| \le \|0\| = 0$。这说明 L_2 的核空间 $\ker(L_2)$ 是 $\{f \in V_B : f(n) \in \mathbb{C}1_A, n \in \mathbb{Z}\}$。

下面证明 L_1 的结果。由于整数群 $\mathbb{Z}$ 是离散空间，所以 L_1 的求和项只有有限个 $f(n) \ne 0$。从而 L_1 的求和是有限的。对 $\forall f \in V_B, k \in \mathbb{Z}$，有

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell(n) f^*(n) U^n \right\| &= \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell(n) \sigma^n\left(f^*(-n)\right) U^n \right\| \\ &= \left\| \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell(n) \sigma^{-n}\left(\sigma^n\left(f(-n)\right)\right) U^{-n} \right)^* \right\| \\ &= \left\| \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell(n) f(n) U^n \right)^* \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell(n) f(n) U^n \right\|, \end{aligned}$$

因此，$L_1(f) = L_1(f^*)$。另一方面，我们又有

$$L_1(1)=\left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ell(n)1_A U^0(n)U^n\right\|=\left\|\ell(0)1_A\right\|=0.$$

从而，L_1 是一个核空间为 $\ker(L_1)=\{f\in V_B: f(n)\in\mathbb{C}1_A, n\in\mathbb{Z}\}$ 的*-半范数。

下面考虑定义的两个*-半范数 L_1 和 L_2 的下半连续性。

定理 3.1 *-半范数 $L_1: V_B\to[0,\infty)$ 是下半连续的。

证明：令 $\{f_k\}\subseteq V_B$，并且满足 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k=f\in V_B$。现在假设对 $\forall k\in\mathbb{Z}$，有 $L_1(f_k)\le 1$。对 $\forall g\in V_B$，令

$$\|g\|_2=\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|g(n)\|_A^2\right)^{\frac{1}{2}};$$
$$\|g\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|g(n)\|_A.$$

根据定义，就有不等式

$$\|g\|_\infty\le\|g\|_2\le\|g\|.$$

因此，$\|f_k-f\|_\infty\le\|f_k-f\|\to 0(k\to\infty)$，即 f_k 一致收敛到 f。我们用 Q 来表示 f 的支撑集，并且 χ_Q 是对应的特征函数。那么根据定义就有

$$\left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ell(n)(\chi_Q f_k)(n)U^n-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ell(n)f(n)U^n\right\|_\infty\to 0(k\to\infty).$$

由于 $\mathbb{Z}$ 为离散空间，且 $f\in V_B$，那么只有有限个 $f(n)\ne 0$。即

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ell(n)(\chi_Q f_k)(n)U^n-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ell(n)f(n)U^n\right\|\\&\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|\ell(n)(\chi_Q f_k)(n)U^n-\ell(n)f(n)U^n\right\|\\&\le T\sum_{f(n)\ne 0}\left\|(\chi_Q f_k)(n)U^n-f(n)U^n\right\|\\&\le T\sum_{f(n)\ne 0}\|f_k(n)-f(n)\|_A\\&\le T\sum_{f(n)\ne 0}\|f_k(n)-f(n)\|_\infty\to 0(k\to\infty).\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{k\to\infty}L_1(\chi_Q f_k)=L_1(f)$。又由于

$$L_1(\chi_Q f_k)=\left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ell(n)(\chi_Q f_k)(n)U^n\right\|\le\left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ell(n)f_k(n)U^n\right\|=L_1(f_k)\le 1.$$

因此，$L_1(f)\le 1$，即 L_1 是下半连续的。

根据 L_2 的定义，它与半范数 L 密切相关。我们将在下个定理中证明 L_2 的下半连续性与 L 的下半连续性是等价的。

定理 3.2 $L_2: V_B\to[0,\infty)$ 是下半连续的当且仅当 $L:\mathcal{A}\to[0,\infty)$ 是下半连续的。

证明：当 $L_2: V_B\to[0,\infty)$ 是下半连续的，由于 $|||e_0|||=1$，对 $\forall a\in\mathcal{A}$，可得

$$\begin{aligned}L_2\circ l(a)&=L_2(\lambda(a))=L_2(aU^0)\\&=\max\left\{|||\sum_{n=-\infty}^{\infty}L(aU^0(n))e_n|||,|||\sum_{n=-\infty}^{\infty}L\left((aU^0)^*(n)\right)e_n|||\right\}\\&=\max\left\{L(a)|||e_0|||,L(a^*)|||e_0|||\right\}=L(a)\end{aligned}$$

因此，$L = L_2 \circ l : \mathcal{A} \to [0,\infty)$。由于 $l : A \to B$ 是等距的，那么 $L : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ 是下半连续的。

反之，当 $L : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ 是下半连续的，由于下半连续函数的集族的上确界仍是下半连续的[16]，因此只要证明对于每个固定的 $N \in \mathbb{N}$，$|||\sum_{n=-N}^{N} L(E_n(\cdot))e_n|||$ 下半连续的。令 $f_k \to f \in \mathcal{A}$，由于

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \left\| f_k(n) - f(n) \right\|_A \le \| f_k - f \|,$$

所以 $\left\| f_k(n) - f(n) \right\|_A \to 0$。根据 L 的下半连续性，

$$L(f(n)) \le \varliminf_{k\to\infty} L(f_k(n)).$$

对于每个固定的 $N \in \mathbb{N}$，我们由 $|||\cdot|||$ 的保序性得

$$|||\sum_{n=-N}^{N} L(f(n))e_n||| \le |||\varliminf_{k\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} L(f_k(n))e_n|||. \tag{4}$$

令 $g_m(n) = \inf\{L(f_k(n)), k \ge m\}$。对 $\forall n \in \mathbb{Z}$，函数列 $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ 满足如下的不等式：

$$0 \le g_m(n) \le g_{m+1}(n) \le L(f_{m+1}(n)). \tag{5}$$

因此，对每个固定的 $n \in \mathbb{Z}$，数列 $\{g_m(n)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 都是单调递增的。由于 L 是下半连续的，$L(f_m(n))$ 下极限一定存在。令 $\lim_{m\to\infty} g_m(n) = \varliminf_{m\to\infty} L(f_m(n)) = g(n)$。从而，对 $\forall k \in \mathbb{N}_0$，由范数的保序性得到

$$|||\sum_{n=-N}^{N} g_k(n)e_n||| \le |||\sum_{n=-N}^{N} g_{k+1}(n)e_n||| \le |||\sum_{n=-N}^{N} g(n)e_n|||. \tag{6}$$

由(6)可以得到 $\left\{|||\sum_{n=-N}^{N} g_k(n)e_n|||\right\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ 是单调递增且有界的。因此，我们有如下的不等式：

$$\lim_{k\to\infty} |||\sum_{n=-N}^{N} g_k(n)e_n||| = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} |||\sum_{n=-N}^{N} g_k(n)e_n||| \le |||\sum_{n=-N}^{N} g(n)e_n|||. \tag{7}$$

另一方面，对 $\forall \varepsilon > 0$，由于 $\lim_{m\to\infty} g_m(n) = g(n)$，则对于每个固定的 n，$\exists M_n > 0$ 使得当 $m \ge M_n$ 时，有

$$g_m(n) > g(n) - \varepsilon.$$

取 $M = \max\{M_{-N}, \cdots, M_N\}$，当 $m \ge M$ 时，由范数的保序可得

$$|||\sum_{n=-N}^{N} g_k(n)e_n||| \ge |||\sum_{n=-N}^{N} (g(n) - \varepsilon)e_n||| \ge |||\sum_{n=-N}^{N} g(n)e_n||| - \varepsilon |||\sum_{n=-N}^{N} e_n|||.$$

所以 $\lim_{k\to\infty} |||\sum_{n=-N}^{N} g_k(n)e_n||| = |||\sum_{n=-N}^{N} g(n)e_n|||$。结合(4) (5) (7)，就有

$$\begin{aligned}
|||\sum_{n=-N}^{N} L(f(n))e_n||| &\le |||\varliminf_{k\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} L(f_k(n)e_n)||| \\
&= |||\sum_{n=-N}^{N} g(n)e_n||| \\
&= \lim_{k\to\infty} |||\sum_{n=-N}^{N} g_k(n)e_n||| \\
&\le \varliminf_{k\to\infty} |||\sum_{n=-N}^{N} L(f_k(n)e_n)|||.
\end{aligned}$$

因此，$\left\|\sum_{n=-N}^{N} L\left(E_n(\cdot)\right)e_n\right\|$ 是下半连续的。从而，L_1 是下半连续的。

由*-半范数 $L_1, L_2 : V_B \to [0,\infty)$ 可以定义一个新的半范数：

$$L_B = \max\{L_1, L_2\} : V_B \to [0,\infty). \tag{8}$$

定理 3.3 由(8)定义的半范数 $L_B : V_B \to [0,\infty)$ 是一个核空间为 $\ker(L_B) = \{f \in V_B : f(n) \in \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}, n \in \mathbb{Z}\}$ 的*-半范数。特别地，如果 $L : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ 是下半连续的，那么 L_B 也是下半连续的。

证明： 由命题 3.1 可知 L_B 都是核空间为 $\{f \in V_B : f(n) \in \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}, n \in \mathbb{Z}\}$ 的*-半范数。即对 $\forall f \in V_B$，有

$$L_1(f) = L_1(f^*), L_2(f) = L_2(f^*).$$

从而，$L_B(f) = \max\{L_1(f), L_2(f)\} = \max\{L_1(f^*), L_2(f^*)\} = L_B(f^*)$。

当 $L_B(f) = 0$ 时，$L_1(f) = L_2(f) = 0$。故 $f \in \ker(L_i)(i = 1,2)$，这就说明 $f(n) \in \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$。从而，$f \in \{f \in V_B : f(n) \in \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}, n \in \mathbb{Z}\}$。

另一方面，对 $\forall f \in \{f \in V_B : f(n) \in \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}, n \in \mathbb{Z}\}$，有 $f \in \ker(L_i)(i = 1,2)$。故 $L_1(f) = L_2(f) = 0$。因此，$L_B(f) = \max\{L_1(f), L_2(f)\} = 0$。则 L_B 是一个核空间为 $\ker(L_B) = \{f \in V_B : f(n) \in \mathbb{C}1_{\mathcal{A}}, n \in \mathbb{Z}\}$ 的*-半范数。

如果 L 是下半连续的，由定理 3.2 可知 L_2 也是下半连续的。又由定理 3.1 可知 L_1 也是下半连续的。因此，两个下半连续函数的取大函数也是下半连续的[16]。

4. 总结

本文考虑了在一般的长度函数下两类*-半范数的下半连续，利用范数不等式，可以证明得到 L_1 是下半连续的，而 L_2 的下半连续性与 L 的下半连续性是等价的，并由此可以定义一类在整数群约化交叉积 C^*-代数上的*-半范数，这类半范数为后续进行相应的紧量子度量空间结构的研究做好了铺垫。

参考文献

[1] Connes, A. (1985) Non-Commutative Differential Geometry. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifique*, **62**, 257-360.

[2] Connes, A. (1989) Compact Metric Spaces, Fredholm Modules, and Hyperfiniteness. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **9**, 207-220. https://doi.org/10.1017/s0143385700004934

[3] Connes, A. (1994) Noncommutative Geometry. Academic Press.

[4] Connes, A. (1996) Gravity Coupled with Matter and the Foundation of Non-Commutative Geometry. *Communications in Mathematical Physics*, **182**, 155-176. https://doi.org/10.1007/bf02506388

[5] Kantorovich, L.V. (1945) On an Effective Method of Solving Extremal Problems for Quadratic Funcional. *Soviet Mathematics*, **7**, 455-460.

[6] Rieffel, M.A. (1999) Metrics on State Spaces. *Documenta Mathematica*, **4**, 559-600. https://doi.org/10.4171/dm/68

[7] Rieffel, M.A. (2004) Gromov-Hausdorff Distance for Quantum Metric Spaces. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **168**, Article No. 796. https://doi.org/10.1090/memo/0796

[8] Antonescu, C. and Christensen, E. (2004) Metrics on Group *C**-Algebras and a Non-Commutative Arzelà-Ascoli Theorem. *Journal of Functional Analysis*, **214**, 247-259. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.04.015

[9] Hawkins, A., Skalski, A., White, S. and Zacharias, J. (2013) On Spectral Triples on Crossed Products Arising from Equicontinuous Actions. *Mathematica Scandinavica*, **113**, 262-291. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-15572

[10] Christ, M. and Rieòel, M.A. (2017) Nilpotent Group *C**-Algebras as Compact Quantum Metric Spaces. *Canadian Mathematical Bulletin*, **60**, 77-94. https://doi.org/10.4153/cmb-2016-040-6

[11] Bellissard, J., Marcolli, M. and Reihani,K. (2010) Dynamical Systems on Spectralmetric Spaces. arXiv: 1008.4617.

[12] Kaad, J. and Kyed, D. (2020) Dynamics of Compact Quantum Metric Spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **41**, 2069-2109. https://doi.org/10.1017/etds.2020.34

[13] Brown, N. and Ozawa, N. (2008) *C**-Algebras and Finite-Dimensional Approximations. *None American Mathematical*

Society, **88**. https://doi.org/10.1090/gsm/088

[14] Davidson, K. (1996) C^*-Algebras by Example. *None American Mathematical Society*, **6**. https://doi.org/10.1090/fim/006

[15] Oh, C.L. (2017) Geometric Group Theory: An Introduction. Springer.

[16] Rudin, W. (1987) Real and Complex Analysis. Third Edition, McGraw-Hill Book.