

基于 (G'/G) 展开法求解 $(1 + 1)$ 维积分微分Ito方程的新精确解

邵廷朗, 翁琨锋

广东财经大学统计与数学学院, 广东 广州

收稿日期: 2024年6月11日; 录用日期: 2024年7月4日; 发布日期: 2024年7月12日

摘要

(G'/G) 展开法可以有效的求解出非线性偏微分方程的精确解。本文利用 (G'/G) 展开法及齐次平衡原则, 对 $(1 + 1)$ 维积分微分Ito方程进行求解, 得到该方程新的精确解, 这些解包括双曲函数解、三角函数解以及有理函数解。根据待定参数之间的关系对参数进行取值, 运用数学软件Maple画出精确解的图像。

关键词

(G'/G) 展开法, $(1 + 1)$ 维积分微分Ito方程, 齐次平衡原则, 精确解

New Exact Solution for $(1 + 1)$ -Dimensional Integro-Differential Ito Equation Based on Expansion (G'/G) Method

Tinglang Shao, Kunfeng Weng

School of Statistics and Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong

Received: Jun. 11th, 2024; accepted: Jul. 4th, 2024; published: Jul. 12th, 2024

Abstract

The (G'/G) expansion method can effectively solve the exact solution of nonlinear partial differential equations. In this paper, we use the (G'/G) expansion method and the homogeneous balance rule to solve the $(1 + 1)$ -dimensional integro-differential Ito equation, and obtain its new exact solutions, which include hyperbolic, trigonometric and rational solutions. According to the relationship between the undetermined parameters, the parameters are valued. The image of the exact solution is obtained by Maple software.

文章引用: 邵廷朗, 翁琨锋. 基于 (G'/G) 展开法求解 $(1 + 1)$ 维积分微分 Ito 方程的新精确解[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3140-3146. DOI: 10.12677/aam.2024.137299

Keywords

(G'/G) Expansion Method, (1 + 1) -Dimensional Integro-Differential Ito Equation, Homogeneous Balance Rule, Exact Solution

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非线性偏微分方程常用于描述物理、生物、化学等领域中的非线性现象，而精确解的表达形式能够很好地解释这些现象。因此求解非线性偏微分方程变得越来越重要。到目前为止，已经有许多有效的方法可以求解非线性偏微分方程的精确解，比如 Hirota 双线性法、F 展开法、齐次平衡法、(G'/G)展开法、Darboux 变换法、Jacobi 椭圆函数展开法等[1]-[8]。其中(G'/G)展开法是基于齐次平衡原则的方法，由王明亮等人首次提出[9]，可以有效的求解非线性偏微分方程。

在 1980 年，物理学家 Ito 提出了(1 + 1)维积分微分 Ito 方程，其是 KdV 方程的推广，可以扩展成 KdV 方程的双线性形式。Ito 是一类重要的非线性偏微分方程，可以描述客观世界中许多的非线性现象。(1 + 1)维积分微分 Ito 方程为：

$$u_{tt} + u_{xxx} + 3(2u_x u_t + uu_{xt}) + 3u_{xx} \partial^{-1}(u_t) = 0 \quad (1)$$

其中 $u = u(x, t)$, $\partial^{-1}(\cdot) = \int_{-\infty}^x (\cdot) dx$ 。

TahiraBatoool 等人通过各种变换得到积分微分 Ito 方程的周期交叉有理解、扭结交叉有理解等精确解[10]，Khaled A. Gepreel 等人利用扩展的 Kudryashov 方法得到方程(1)的指数型行波解[11]。而本文将运用 (G'/G)展开法得到(1 + 1)维积分微分 Ito 方程新的双曲函数解、三角函数角和有理函数解。

2. (G'/G)展开法简述

对于含独立变量 x, t 的非线性偏微分方程：

$$F(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2)$$

其中 $u = u(x, t)$ 是未知函数， F 是含 u 以及 u 关于 x, t 的各阶偏导数的多项式。(G'/G)展开法的主要步骤如下：

首先引入行波变换：

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = x - ct \quad (3)$$

将独立变量 x, t 转化为行波变量 ξ 。因此可将方程(2)转变成只含行波变量 ξ 的常微分方程(ODE)：

$$W(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (4)$$

其中 $u' = \frac{du}{d\xi}$, $u'' = \frac{d^2u}{d\xi^2}$, $\dots$, W 是含 u 以及 u 关于 ξ 的各阶导数的多项式。

假设方程(4)的解可表示成(G'/G)的多项式形式：

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i \quad (5)$$

其中 $G(\xi)$ 满足二阶线性 ODE:

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \quad (6)$$

而式(5)和方程(6)中的 $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$, λ 和 μ 为待定常数, 且 $a_m \neq 0$, m 由齐次平衡法确定。由方程(6)可知:

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = -\mu - \lambda \left(\frac{G'}{G}\right) - \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (7)$$

其次, 将式(5)代入方程(4), 再运用式(6)和式(7)来进行化简, 将方程(4)的左端变成关于 (G'/G) 的多项式, 令 (G'/G) 各次幂前的系数为零, 得到关于 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots), c, \lambda, \mu$ 的一组方程组。

最后, 借助相关数学软件(如 Maple)求解上述方程组, 并由式(6)的通解可得 (G'/G) 对应的三种形式:

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \frac{C_1 \sinh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \xi + C_2 \cosh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \xi}{C_1 \cosh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \xi + C_2 \sinh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \xi}, & \varphi > 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2 \xi}, & \varphi = 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \frac{-C_1 \sin \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \xi + C_2 \cos \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \xi}{C_1 \cos \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \xi + C_2 \sin \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \xi}, & \varphi < 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\varphi = \lambda^2 - 4\mu$, C_1, C_2 为待定常数。

将 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots), c$ 和 (G'/G) 的三种情形代入式(5), 即可得到方程(2)的精确解列。

3. (1 + 1)维积分微分 Ito 方程的精确解

本部分主要讲述(1 + 1)维积分微分 Ito 方程(1)的求解。假设 $u(x, t) = U_x(x, t)$, 方程(1)可化简成:

$$U_{xtt} + U_{xxxxt} + 3(2U_{xx}U_{xt} + U_xU_{xxt}) + 3U_tU_{xxx} = 0 \quad (9)$$

再对方程(9)进行行波变换, 令 $U(x, t) = U(\xi); \xi = x - ct$, 可得到方程:

$$c^2U'' - cU^{(5)} - 6c(U'')^2 - 6cU'U'' = 0 \quad (10)$$

接着对方程(10)关于 ξ 积分两次, 可得到方程:

$$cU' - U''' - 3(U')^2 + k_1 = 0 \quad (11)$$

其中 k_1 为积分常数。由方程(11)中最高阶导数项 U''' 与非线性项 $(U')^2$ 的齐次平衡, 可得到式(5)中的 $m = 1$, 因此可设方程(11)的解为如下形式:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) \quad (12)$$

其中 $a_1 \neq 0, a_0, a_1$ 为待定常数。由式(7)可得:

$$U' = -a_1\mu - a_1\lambda \left(\frac{G'}{G}\right) - a_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (13)$$

由方程(6)和式(7)可得:

$$\begin{aligned}
 U''' = & -6a_1 \left(\frac{G'}{G} \right)^4 - 12\lambda a_1 \left(\frac{G'}{G} \right)^3 + (-7\lambda^2 a_1 - 8\mu a_1) \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \\
 & + (-\lambda^3 a_1 - 8\lambda\mu a_1) \left(\frac{G'}{G} \right) - \lambda^2 \mu a_1 - 2\mu^2 a_1
 \end{aligned} \quad (14)$$

将式(13)和式(14)代入方程(11), 合并 $\left(\frac{G'}{G} \right)^i$ ($i=0,1,2,3,4$) 前的系数, 并令其为零, 可得如下方程组:

$$\begin{cases}
 -3a_1^2 + 6a_1 = 0 \\
 -6\lambda a_1^2 + 12\lambda a_1 = 0 \\
 \lambda^3 a_1 - 6\lambda\mu a_1^2 - c\lambda a_1 + 8\lambda\mu a_1 = 0 \\
 -3\lambda^2 a_1^2 + 7\lambda^2 a_1 - 6\mu a_1^2 - ca_1 + 8\mu a_1 = 0 \\
 a_1 \lambda^2 \mu - 3a_1^2 \mu^2 - ca_1 \mu + 2a_1 \mu^2 + k_1 = 0
 \end{cases} \quad (15)$$

解方程组(15)可得:

$$\begin{cases}
 c = \lambda^2 - 4\mu \\
 a_0 = a_0 \\
 a_1 = 2 \\
 k_1 = 0
 \end{cases} \quad (16)$$

下面根据 $\varphi = \lambda^2 - 4\mu$ 的取值情况进行分类讨论。

情形 1 当 $\varphi > 0$ 时, 由式(8)、(12)和(16)可知:

$$U(\xi) = a_0 + 2 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \frac{C_1 \sinh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \xi + C_2 \cosh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \xi}{C_1 \cosh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \xi + C_2 \sinh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \xi} \right) \quad (17)$$

由 $\xi = x - ct$ 可得:

$$U(x, t) = a_0 + 2 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2} \frac{C_1 \sinh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} (x - ct) + C_2 \cosh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} (x - ct)}{C_1 \cosh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} (x - ct) + C_2 \sinh \frac{\sqrt{\varphi}}{2} (x - ct)} \right) \quad (18)$$

对式(18)两边关于 x 求导可得:

$$U_x(x, t) = \frac{c(C_1^2 - C_2^2)}{2 \left(C_2 \sinh \left(\frac{(ct - x)\sqrt{\varphi}}{2} \right) - C_1 \cosh \left(\frac{(ct - x)\sqrt{\varphi}}{2} \right) \right)^2} \quad (19)$$

再由 $u(x, t) = U_x(x, t)$ 可得(1+1)维积分微分 Ito 方程(1)的一个精确解:

$$u_1(x, t) = \frac{c(C_1^2 - C_2^2)}{2 \left(C_2 \sinh \left(\frac{(ct - x)\sqrt{\varphi}}{2} \right) - C_1 \cosh \left(\frac{(ct - x)\sqrt{\varphi}}{2} \right) \right)^2} \quad (20)$$

其中 $c = \lambda^2 - 4\mu$ 。

情形 2 当 $\varphi < 0$ 时, 由式(8)、(12)和(16)可知方程(11)的解为:

$$U(\xi) = a_0 + 2 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \frac{-C_1 \sin \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \xi + C_2 \cos \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \xi}{C_1 \cos \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \xi + C_2 \sin \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \xi} \right) \quad (21)$$

将 $\xi = x - ct$ 代入式(21)可得:

$$U(x, t) = a_0 + 2 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} \frac{-C_1 \sin \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} (x - ct) + C_2 \cos \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} (x - ct)}{C_1 \cos \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} (x - ct) + C_2 \sin \frac{\sqrt{-\varphi}}{2} (x - ct)} \right) \quad (22)$$

对式(22)关于 x 求导, 并由 $u(x, t) = U_x(x, t)$ 可得(1+1)维积分微分 Ito 方程(1)的精确解:

$$u_2(x, t) = \frac{c(C_1^2 + C_2^2)}{2 \left(C_1 \cos \left(\frac{(ct - x)\sqrt{-\varphi}}{2} \right) - C_2 \sin \left(\frac{(ct - x)\sqrt{-\varphi}}{2} \right) \right)^2} \quad (23)$$

其中 $c = \lambda^2 - 4\mu$

情形 3 当 $\varphi = 0$ 时, 由式(8)、(12)、(16)、行波先换 $\xi = x - ct$ 、关系式 $u(x, t) = U_x(x, t)$ 可得方程(1)的精确解:

$$u_3(x, t) = -\frac{2C_2^2}{(C_2x + C_1)^2} \quad (24)$$

通过数学软件 Maple, 可得到 $u_1(x, t) - u_3(x, t)$ 的波形图(图 1~3):

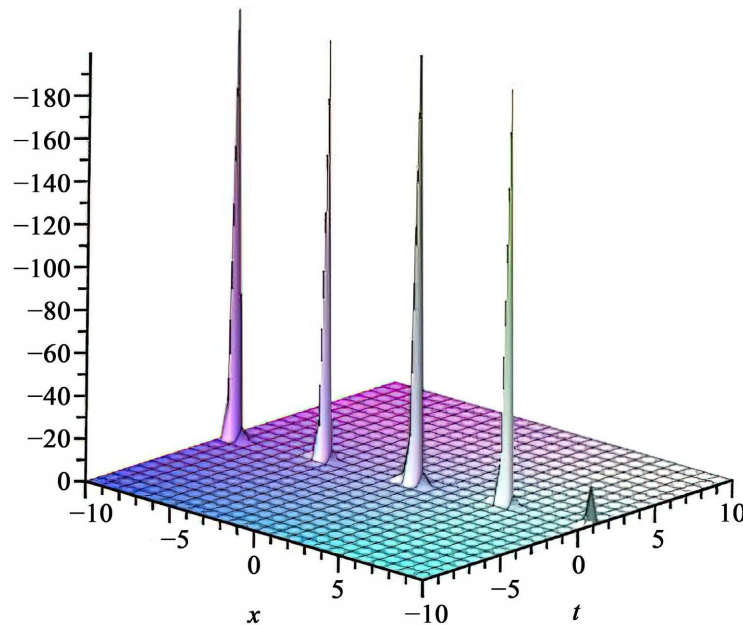


Figure 1. The waveform of $u_1(x, t)$ with the values $\lambda = 4, \mu = 1, C_1 = 1, C_2 = -2$

图 1. $u_1(x, t)$ 的波形图 ($\lambda = 4, \mu = 1, C_1 = 1, C_2 = -2$)

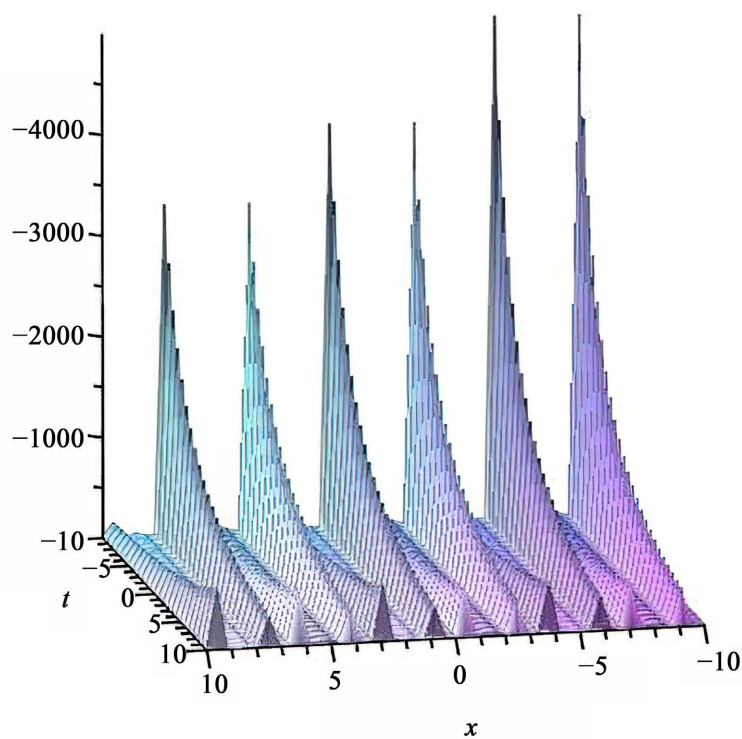


Figure 2. The waveform of $u_2(x, t)$ with the values $\lambda = 2, \mu = 3, C_1 = 2, C_2 = -1$

图 2. $u_2(x, t)$ 的波形图 ($\lambda = 2, \mu = 3, C_1 = 2, C_2 = -1$)

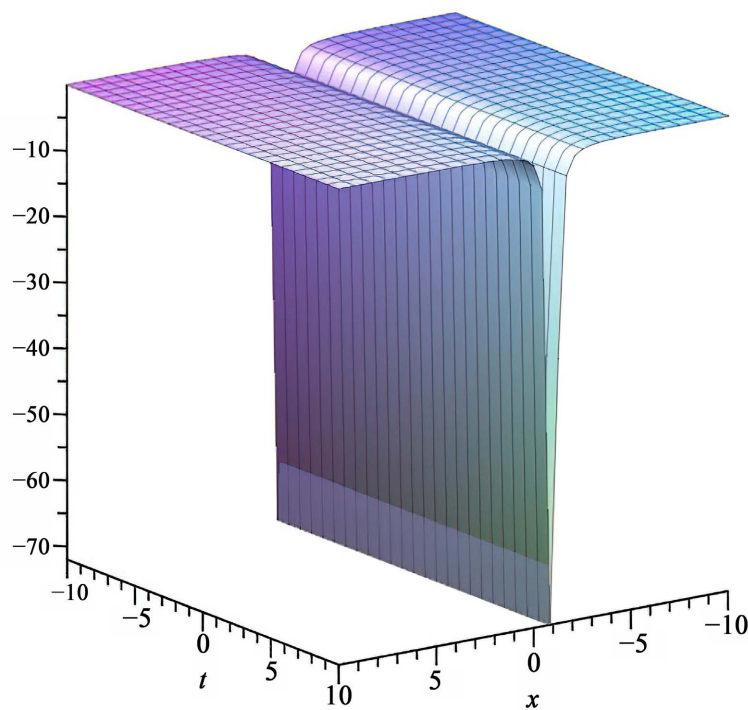


Figure 3. The waveform of $u_3(x, t)$ with the values $\lambda = 4, \mu = 4, C_1 = 1, C_2 = 1$

图 3. $u_3(x, t)$ 的波形图 ($\lambda = 4, \mu = 4, C_1 = 1, C_2 = 1$)

4. 结论

本文运用了 (G'/G) 展开法求解 $(1 + 1)$ 维积分微分 Ito 方程, 得到双曲函数解、三角函数解和有理函数解, 再取定待定参数的值, 借助 Maple 得到这些解的波形图。从 (G'/G) 展开法求解方程的过程可以看出, 该方法在求解非线性偏微分方程上具有简洁、直接的特点。

参考文献

- [1] Nkenfack, C.E., Lekeufack, O.T., Yamapi, R. and Kengne, E. (2024) Bright Solitons and Interaction in the Higher-Order Gross-Pitaevskii Equation Investigated with Hirota's Bilinear Method. *Physics Letters A*, **511**, Article ID: 129563. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2024.129563>
- [2] Rabie, W.B. and Ahmed, H.M. (2022) Cubic-Quartic Optical Solitons and Other Solutions for Twin-Core Couplers with Polynomial Law of Nonlinearity Using the Extended F-Expansion Method. *Optik*, **253**, 168575. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.168575>
- [3] Wang, M., Zhou, Y. and Li, Z. (1996) Application of a Homogeneous Balance Method to Exact Solutions of Nonlinear Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **216**, 67-75. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(96\)00283-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00283-6)
- [4] Mohanty, S.K., Kumar, S., Dev, A.N., Deka, M.K., Churikov, D.V. and Kravchenko, O.V. (2022) An Efficient Technique of (G'/G) -Expansion Method for Modified KDV and Burgers Equations with Variable Coefficients. *Results in Physics*, **37**, Article ID: 105504. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105504>
- [5] Yang, Y., Xia, T. and Liu, T. (2023) Darboux Transformation and Exact Solution to the Nonlocal Kundu-Eckhaus Equation. *Applied Mathematics Letters*, **141**, Article ID: 108602. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108602>
- [6] Khalil, T.A., Badra, N., Ahmed, H.M. and Rabie, W.B. (2022) Bright Solitons for Twin-Core Couplers and Multiple-Core Couplers Having Polynomial Law of Nonlinearity Using Jacobi Elliptic Function Expansion Method. *Alexandria Engineering Journal*, **61**, 11925-11934. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.05.042>
- [7] Zahran, E.H.M., Ahmad, H., Saeed, T. and Botmart, T. (2022) New Diverse Variety for the Exact Solutions to Keller-Segel-Fisher System. *Results in Physics*, **35**, Article ID: 105320. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105320>
- [8] Aniq, A. and Ahmad, J. (2022) Soliton Solution of Fractional Sharma-Tasso-Oleever Equation via an Efficient (G'/G) -Expansion Method. *Ain Shams Engineering Journal*, **13**, Article ID: 101528. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2021.06.014>
- [9] Wang, M., Li, X. and Zhang, J. (2008) The (G'/G) -Expansion Method and Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **372**, 417-423. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.07.051>
- [10] Batool, T., Rizvi, S.T.R. and Seadawy, A.R. (2022) Multiple Breathers and Rational Solutions to Ito Integro-Differential Equation Arising in Shallow Water Waves. *Journal of Geometry and Physics*, **178**, Article ID: 104540. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104540>
- [11] Gepreel, K.A., Nofal, T.A. and Alasmari, A.A. (2017) Exact Solutions for Nonlinear Integro-Partial Differential Equations Using the Generalized Kudryashov Method. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **25**, 438-444. <https://doi.org/10.1016/j.joems.2017.09.001>