

分数阶多智能体系统一致性问题

宋昱飞

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2024年6月5日; 录用日期: 2024年6月29日; 发布日期: 2024年7月10日

摘要

本文研究了非线性分数阶多智能体系统中的一致性问题, 考虑了间歇采样的情况。首先, 通过设计具有间歇采样的控制协议, 建立分数阶多智能体的动力学模型。随后, 运用图论、李亚普诺夫函数、拉普拉斯变换和逆拉普拉斯变换, 解决了具有一个领导者和多个跟随者的一致性问题。最后, 我们通过仿真实验, 实现了多智能体一致性控制, 验证了该方法在实际应用中的有效性和可行性。

关键词

分数阶多智能体系统, 一致性, 间歇采样, 李亚普诺夫函数

Consensus Problem in Fractional-Order Multi-Agent Systems

Yufei Song

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jun. 5th, 2024; accepted: Jun. 29th, 2024; published: Jul. 10th, 2024

Abstract

In this paper, we investigate the consensus problem in nonlinear fractional-order multi-agent systems considering intermittent sampling. Firstly, by designing control protocols with intermittent sampling, the dynamic model of fractional-order multi-agent systems is established. Then, utilizing graph theory, Lyapunov functions, Laplace transform, and inverse Laplace transform, the consensus problem with one leader and multiple followers is addressed. Finally, through simulation examples, multi-agent consensus control is achieved, validating the effectiveness and feasibility of this approach in practical applications.

文章引用: 宋昱飞. 分数阶多智能体系统一致性问题[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3031-3038.

DOI: 10.12677/aam.2024.137288

Keywords

Fractional-Order Multi-Agent Systems, Consensus, Intermittent Sampling, Lyapunov Function

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多智能体系统是由多个智能体之间互相交互组成的, 这些智能体可以通过共享信息去完成复杂的任务, 尤其是在军事、力学、交通等[1]-[3]方面有着重要的作用。因此, 多智能体领域受到了越来越多研究者的关注。

随着网络和科技的迅速发展, 多智能体系统正不断进行更加深入和复杂的研究。传统多智能体系统的研究, 主要以整数阶多智能体系统为主, 文献[4]研究了在有向通信拓扑结构下, 具有双积分器动力学的多智能体系统的一致性问题, 文献[5]中考虑了二阶非线性系统的领导跟随者一致性问题。不过整数阶方程不能很好地描述一些复杂的非局部或非线性现象, 而分数阶方程具有很好的局部性和适应性, 使其在复杂环境中表现出更大的优势, 因此研究者将注意力逐渐转向了分数阶多智能体系统的研究。文献[6]研究了一类受状态时滞影响的不确定分数阶多智能体系统的保成本领导跟随一致性, 针对于时滞不仅仅有关于状态时滞的研究, 还有关于通信时滞的研究, 文献[7]研究了在通信时滞下, 分数阶多智能体系统的一致性问题。文献[8]提出了在有限的时间内, 领导者跟随实现一致性, 文献[9]中考虑具有固定结构的分数阶非线性多智能体系统。

本文应用了一个比较通用的分数阶多智能体模型, 研究出一种新的一致性问题解决方法, 使用了图论、李亚普诺夫函数、拉普拉斯变换和逆拉普拉斯变换来证明分数阶多智能体的一致性问题。

2. 预备知识

2.1. 图论

在多智能体系统中, 单个的智能体看作一个点, 两个智能体之间的信息传递看作一条边, $G=(V, E, \mathfrak{R})$ 是一个加权图, $V=(1, 2, \dots, n)$ 表示 n 个点的集合; $E \subseteq V \times V$ 表示边的集合; $\mathfrak{R}=[a_{i \times j}] \subseteq R^{n \times n}$ 表示所有元素的邻接矩阵; $b_{ij}=(i, j) \subseteq E$ 表示边, 其中节点 i, j 分别表示子节点和父节点。如果任意两个节点存在一条路径, 那么 G 是连通的, 即图 G 是结构平衡的。当 $b_{ij} \subseteq E$ 时, 邻接矩阵元素 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。

2.2. 一些定义引理

定义 2.1 连续可微函数 f 的 μ 阶 Caputo 导数定义为:

$$D^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\mu-n+1}} ds, n \in Z^+, n-1 < \mu < n$$

其中, Gamma 函数为 $\Gamma(\mu) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\mu-1} dt$ 。

定义 2.2 对于矩阵 $C=[c_{i \times j}] \subseteq R^{m \times n}$, $D=[d_{i \times j}] \subseteq R^{p \times q}$, $C \otimes D$ 表示矩阵的 Kronecker 积, 其定义为:

$$C \otimes D = \begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1n}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}D & \cdots & c_{mn}D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

引理 2.1 若 $y(t) \in \mathbb{R}^n$ 是连续可微函数, P 是一个正定矩阵且 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则下列关系式成立:

$$D^\mu y^T(t) P y(t) \leq 2y^T(t) P D^\mu y(t), \mu \in (0, 1).$$

定义 2.3 设 $\alpha, \chi > 0$, 且 $z \in \mathbb{C}$, 双参数的 Mittag-Leffler 函数定义为:

$$E_{\alpha, \chi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \chi)},$$

当 $\chi = 1$ 且 $\alpha > 0$ 时, Mittag-Leffler 函数可以写成:

$$E_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)},$$

特别地, 当 $z \leq 0$ 且 $0 < \alpha < 1$ 时, $0 < E_\alpha < 1$.

3. 模型建立

考虑了一个由 F 个跟随者和 1 个领导者组成的分数阶多智能体系统(以下简称 FMAS), 其中 $F > 1$, 记跟随者的集合为 $\mathfrak{F} = \{1, 2, \dots, F\}$.

建立领导者动力学模型如下:

$$D^\mu x_0(t) = Ax_0(t) + g(t, x_0(t)), \quad (1)$$

建立跟随者的动力学模型如下:

$$D^\mu x_i(t) = Ax_i(t) + g(t, x_i(t)) + u_i(t), i \in \mathfrak{F}, \quad (2)$$

其中 $x_0(t)$ 为领导者的状态, $x_i(t), u_i(t)$ 分别为第 i 个跟随者的状态和控制输入, $0 < \mu < 1$, g 是非线性函数, A 为已知常矩阵。

设计间歇采样控制协议如下:

$$u_i(t) = \begin{cases} K \sum_{j=0}^F a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)), & t \in T_1, \\ 0, & t \in T_2, \end{cases} \quad (3)$$

其中 K 为增益矩阵, $T_1 = [lT, (l+\kappa)T)$ 为工作时间段, $T_2 = [(l+\kappa)T, (l+1)T)$ 为休息时间段, $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, $\kappa \in (0, 1)$, T 为控制周期且 $T > 0$ 。

Laplace 矩阵定义为:

$$L = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{pmatrix} L_F & L_R \\ 0_{1 \times F} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $L_F \in \mathbb{R}^{F \times F}$, $L_R \in \mathbb{R}^{F \times 1}$ 。

4. 一致性分析

作出以下假设:

A1. 符号有向图 G 是结构平衡的。

A2. 在符号有向图 G 中, 任意跟随者与领导者之间至少有一条有向路径。

A3. 存在常数 $\delta > 0$ 和 $\beta > 0$ ，使得：

$$E_{\mu}[-\delta \kappa^{\mu} T^{\mu}] E_{\mu}[\beta(1-\kappa)^{\mu} T^{\mu}] \leq 1.$$

A4. 存在正常数 $h > 0$ 和 $\sum_{i=1}^{N-M} \rho_i = 1$ ， $\rho_i > 0$ ，非线性函数 g 是满足对任意的 $z, z_i \in R^n$ ，有：

$$\left\| g(t, z) - \sum_{i=1}^{N-M} \rho_i g(t, z_i) \right\| \leq h \left\| z - \sum_{i=1}^{N-M} \rho_i z_i \right\|$$

引理 4.1 如果假设 **A1**, **A2** 成立，则 L_F 是非奇异 M 矩阵， $-L_F^{-1}L_R$ 是非负矩阵且其行和等于 1。

定理 在假设 **A1~A3** 条件下，如果存在正定矩阵 $P \in R^{n \times n}$ ，使得下列不等式成立：

$$I_F \otimes (PA + A^T P + P^2 + I_n h^2) - L_F \otimes PK - L_F^T \otimes K^T P \leq 0, \quad (4)$$

$$I_F \otimes (PA + A^T P + P^2 + I_n h^2) \leq 0. \quad (5)$$

其中 $h > 0$ 。

证明： 当 $t \in T_1$ 时，将(3)带入(2)可得：

$$\begin{cases} D^{\mu} x_0(t) = Ax_0(t) + g(t, x_0(t)), \\ D^{\mu} x_i(t) = Ax_i(t) + g(t, x_i(t)) + K \sum_{j=0}^F a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)), i \in \mathfrak{I}. \end{cases} \quad (6)$$

令

$$\begin{aligned} X_F &= (x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_F^T(t))^T, X_R = (x_0(t)), \\ G(t, X_F) &= (g^T(t, x_1(t)), g^T(t, x_2(t)), \dots, g^T(t, x_F(t)))^T, \\ G(t, X_R) &= (g(t, x_0(t))). \end{aligned}$$

则(6)可以转换为：

$$\begin{cases} D^{\mu} X_R(t) = AX_R(t) + G(t, X_R(t)), \\ D^{\mu} X_F(t) = (I_F \otimes A)X_F(t) + G(t, X_F(t)) - (L_F \otimes K)X_F(t) - (L_R \otimes K)X_R(t). \end{cases}$$

设误差为 $e(t) = X_F(t) - c_F \otimes X_R(t)$ ，其中 $c_F = (1, 1, \dots, 1)$ 为 F 维列向量，根据引理 4.1 可得， $e(t) = X_F(t) - (-L_F^{-1}L_R \otimes I_n)X_R(t)$ 。

分析误差系统的渐近稳定性，构造 Lyapunov 函数：

$$V(t) = e^T(t)(I_F \otimes P)e(t).$$

根据引理 2.1 得到：

$$\begin{aligned} D^{\mu} V(t) &\leq 2e^T(t)(I_F \otimes P)D^{\mu} e(t) \\ &= 2e^T(t)(I_F \otimes P) \left[(I_F \otimes A)e(t) - (L_F \otimes K)e(t) + G(t, X_F(t)) + (L_F^{-1}L_R \otimes I_n)G(t, X_R(t)) \right] \\ &= 2e^T(t)(I_F \otimes PA)e(t) - 2e^T(t)(L_F \otimes PK)e(t) \\ &\quad + 2e^T(t)(I_F \otimes P) \left[G(t, X_F(t)) + (L_F^{-1}L_R \otimes I_n)G(t, X_R(t)) \right] \\ &\leq e^T(t) \left[I_F \otimes (PA + A^T P) - L_F \otimes PK - L_F^T \otimes K^T P \right] e(t) + e^T(t) \left[I_F \otimes P^2 \right] e(t) \\ &\quad + \left[G(t, X_F(t)) + (L_F^{-1}L_R \otimes I_n)G(t, X_R(t)) \right]^T \left[G(t, X_F(t)) + (L_F^{-1}L_R \otimes I_n)G(t, X_R(t)) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

存在 $h > 0$ ，使得：

$$\begin{aligned}
 & \left[G(t, X_F(t)) + (L_F^{-1} L_R \otimes I_n) G(t, X_F(t)) \right]^T \left[G(t, X_F(t)) + (L_F^{-1} L_R \otimes I_n) G(t, X_F(t)) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^F \left[g(t, x_i(t)) - g(t, x_0(t)) \right]^T \sum_{i=1}^F \left[g(t, x_i(t)) - g(t, x_0(t)) \right] \\
 &\leq \sum_{i=1}^F h^2 \left[x_i(t) - x_0(t) \right]^T \left[x_i(t) - x_0(t) \right] \\
 &= h^2 \left[X_F(t) - c_F \otimes X_R(t) \right]^T \left[X_F(t) - c_F \otimes X_R(t) \right] \\
 &= h^2 e^T(t) e(t).
 \end{aligned} \tag{8}$$

将(8)带入(7)中可得：

$$D^\mu V(t) \leq 2e^T(t) \left[I_F \otimes (PA + A^T P + P^2 + I_n h^2) - L_F \otimes PK - L_F^T \otimes K^T P \right] e(t).$$

根据(4)可知， $D^\mu V(t)$ 是负定的，那么存在 $\delta > 0$ ，使得：

$$D^\mu V(t) \leq -\delta V(t).$$

同理，当 $t \in T_2$ 时，根据(5)可知， $D^\mu V(t)$ 是负定的，则存在 $\beta > 0$ ，使得：

$$D^\mu V(t) \leq \beta V(t).$$

当 $t \in [0, \kappa T]$ 时，存在非负函数 $\Theta(t)$ ，使得：

$$D^\mu V(t) + \delta V(t) + \Theta(t) = 0. \tag{9}$$

在(9)的两边进行拉普拉斯变换，得到：

$$s^\mu \ell[V(t)] - s^{\mu-1} \ell[V(0)] + \delta \ell[V(t)] + \ell[\Theta(t)] = 0.$$

其中， ℓ 表示一个函数的拉普拉斯变换。然后我们可以得到：

$$\ell[V(t)] = \frac{s^{\mu-1} \ell[V(0)] - \ell[\Theta(t)]}{s^\mu + \delta}. \tag{10}$$

在(10)的两边取拉普拉斯逆变换，我们得到：

$$V(t) = V(0) E_\mu[-\delta t^\mu] - \Theta * \{t^{\mu-1} E_{\mu,\mu}[-\delta t^\mu]\},$$

其中， $*$ 表示卷积算子， $t^{\mu-1}$ 和 $E_{\mu,\mu}[-\delta t^\mu]$ 是非负函数，很明显：

$$V(t) \leq V(0) E_\mu[-\delta t^\mu],$$

$$V(\kappa t) = V(\kappa t) E_\mu[-\delta t^\mu].$$

通过使用类似的迭代方法，当 $t \in [\kappa T, T]$ 时，

$$V(t) \leq V(\kappa T) E_\mu[\beta(t - \kappa T)^\mu] \leq V(0) E_\mu[-\delta(\kappa T)^\mu] E_\mu[\beta(t - \kappa T)^\mu].$$

当 $t \in [T, (1 + \kappa)T]$ 时，

$$V(t) \leq V(T) E_\mu[-\delta(t - T)^\mu] \leq V(0) E_\mu[-\delta \kappa^\mu T^\mu] E_\mu[\beta((1 - \kappa)T)^\mu] E_\mu[-\delta(t - T)^\mu].$$

当 $t \in [(1 + \kappa)T, 2T]$ 时，

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V((1+\kappa)T)E_{\mu}\left[\beta(t-(1+\kappa)T)^{\mu}\right] \\ &\leq V(0)E_{\mu}\left[-\delta\kappa^{\mu}T^{\mu}\right]E_{\mu}\left[\beta((1-\kappa)T)^{\mu}\right]E_{\mu}\left[-\delta(t-T)^{\mu}\right]E_{\mu}\left[\beta(t-(1+\kappa)T)^{\mu}\right]. \end{aligned}$$

使用归纳法, 当 $t \in [lT, (l+\kappa)T]$ 时,

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(lT)E_{\mu}\left[-\delta(t-lT)^{\mu}\right] \\ &\leq V(0)\left(E_{\mu}\left[-\delta\kappa^{\mu}T^{\mu}\right]E_{\mu}\left[\beta((1-\kappa)T)^{\mu}\right]\right)^l E_{\mu}\left[-\delta(t-lT)^{\mu}\right]. \end{aligned}$$

根据定义 2.3, 可得:

$$V(t) \leq V(lT)E_{\mu}\left[-\delta(t-lT)^{\mu}\right] \leq V(0)\left(E_{\mu}\left[-\delta\kappa^{\mu}T^{\mu}\right]E_{\mu}\left[\beta((1-\kappa)T)^{\mu}\right]\right)^l. \quad (11)$$

当 $t \in [(l+\kappa)T, (l+1)T]$ 时,

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V((l+\kappa)T)E_{\mu}\left[-\delta(t-(l+\kappa)T)^{\mu}\right] \\ &\leq V(0)\left(E_{\mu}\left[-\delta\kappa^{\mu}T^{\mu}\right]E_{\mu}\left[\beta((1-\kappa)T)^{\mu}\right]\right)^l E_{\mu}\left[\beta(t-(l+\kappa)T)^{\mu}\right]E_{\mu}\left[-\delta\kappa^{\mu}T^{\mu}\right]. \end{aligned}$$

同理, 当 $t \in [(l+1)T, (l+2)T]$ 时, 可得:

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V((l+1)T)E_{\mu}\left[-\delta(t-(l+1)T)^{\mu}\right] \\ &\leq V(0)\left(E_{\mu}\left[-\delta\kappa^{\mu}T^{\mu}\right]E_{\mu}\left[\beta((1-\kappa)T)^{\mu}\right]\right)^l E_{\mu}\left[\beta(t-(l+1)T)^{\mu}\right]. \end{aligned} \quad (12)$$

根据假设 A3、(11)和(12), 当 $l \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow \infty$, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ 。那么很容易得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ 。这就说明系统可以达到渐近稳定。因此在控制协议(3)下, FMAS(1)(2)实现一致性控制。

5. 仿真实验

考虑五个跟随者和一个领导者的一致性问题的, 相应的符号有向图如图 1 所示。可以看出, 图 1 的符号有向图在结构上是平衡的。

FMAS 的系数矩阵和函数如下:

$$A = \begin{pmatrix} 3.0 & 2.5 \\ 0.3 & -1.6 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.25 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, g(t, x_i(t)) = \frac{4}{5}x_i(t)\sin(t).$$

Laplace 矩阵为:

$$L = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 0 & 0 & -1.2 \\ 0 & 3.2 & 0 & -0.6 & -2.6 \\ -1.7 & 0 & 1.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & -3.3 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

图 2 和图 3 分别表示误差分量 $e_{i1}(t)$, $e_{i2}(t)$ 的轨迹。其中 $e_{i1}(t) = x_{i1} - x_{01}$, $e_{i2}(t) = x_{i2} - x_{02}$, 竖轴表示误差分量 $e_{i1}(t)$, $e_{i2}(t)$, 横轴表示时间 t (秒)。

从图中可以看出随着时间的变化误差接近于 0, 则实现了在控制协议(3)下, FMAS(1)(2)的一致性控制。

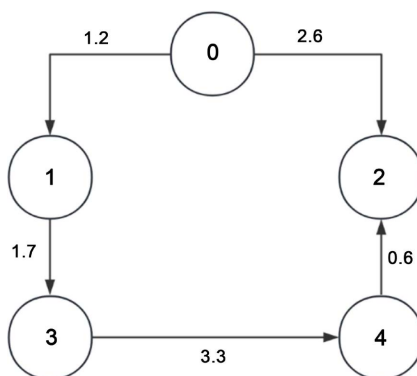


Figure 1. Communication topology diagram of the agents
图 1. 智能体的通信拓扑图

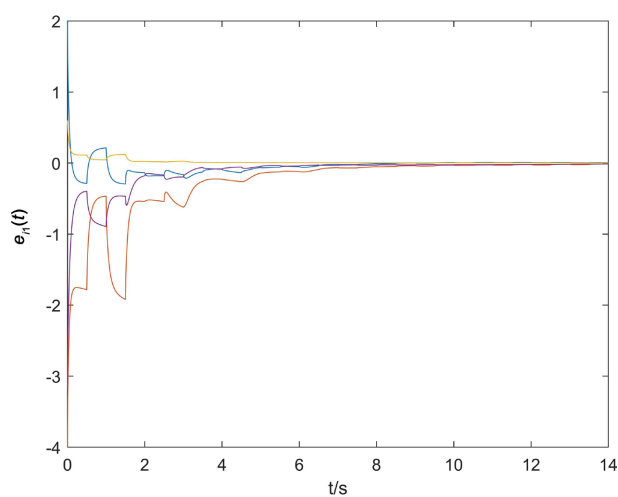


Figure 2. The trajectory of FMAS error $e_{i1}(t)$
图 2. FMAS 的误差 $e_{i1}(t)$ 轨迹

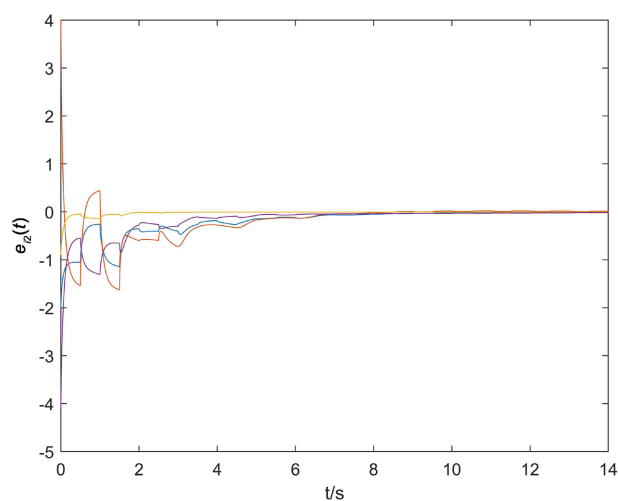


Figure 3. The trajectory of FMAS error $e_{i2}(t)$
图 3. FMAS 的误差 $e_{i2}(t)$ 轨迹

6. 总结

本文针对间歇采样情况下的非线性分数阶多智能体系统一致性问题，提出了一种新的解决方案。具体来说，通过引入一个领导跟随者图，设计带有间歇采样的控制协议，运用了图论和李亚普诺夫函数，最后，我们设计了仿真实验验证了该研究方法的可行性。关于一致性问题仍有很多方面值得进一步探讨，在未来，我们将进一步关注切换拓扑等情况下的二分包含控制问题。

致 谢

首先，我要衷心感谢我的导师李景老师，在学习和生活中都给予我很大帮助。在写论文的过程中，李老师在选题、查找资料等方面给了我很大的帮助。当论文初稿完成的时候，李老师放下繁重的工作，在百忙之中抽出时间来帮我修改论文，最终完成论文定稿。

其次，我要感谢我的女朋友王露晓，在我感到压力和困难的时候陪伴我，给予我精神力量，并且陪我一起学习，共同进步，在生活中也帮助我良多，在这三年的时间里带给我许多快乐的时光，没有她的陪伴，我就没有这么多美好的记忆。

我要感谢我的同学们，特别是我的室友和同门们刘晟、邓子威、李赛赛、刘玉坤、康馨月、赵浩雨。在这段时间里，他们不仅是我的同窗，更是我的朋友和伙伴。在学习上，我们互相帮助、共同进步。在生活中，我们相互扶持，共同度过难关。

我还要感谢我的父母和家人。是他们一直以来的支持和鼓励，让我坚定不移地走上了求学之路。他们的无私奉献和辛勤付出，是我不断前行的动力源泉。我会永远铭记他们对我的关爱和支持。

基金项目

湖南省研究生科研创新项目(CX20220954)。

参考文献

- [1] Xu, M., An, K., Vu, L.H., Ye, Z., Feng, J. and Chen, E. (2018) Optimizing Multi-Agent Based Urban Traffic Signal Control System. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, **23**, 357-369. <https://doi.org/10.1080/15472450.2018.1501273>
- [2] Sene, N. (2020) Stability Analysis of Electrical RLC Circuit Described by the Caputo-Liouville Generalized Fractional Derivative. *Alexandria Engineering Journal*, **59**, 2083-2090. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.01.008>
- [3] Russell Carpenter, J. (2002) Decentralized Control of Satellite Formations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **12**, 141-161. <https://doi.org/10.1002/rnc.680>
- [4] Lu, Q., Han, Q., Zhong, C., Zhang, B., Wang, J., Liu, S., et al. (2017) Finite-Time Consensus Analysis under Directed Communication Topologies for Multi-Agent Systems. *IFAC-PapersOnLine*, **50**, 619-624. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.055>
- [5] Sarkar, N. and Deb, A.K. (2022) Leader-Follower Formation of Second-Order Nonlinear Multi-Agent Systems by Adaptive Neural Networks with Novel Kernel. *IFAC-PapersOnLine*, **55**, 758-764. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.04.124>
- [6] Chen, L., Li, X., Wu, R., Lopes, A.M., Li, X. and Zhu, M. (2022) Guaranteed Cost Consensus for a Class of Fractional-Order Uncertain Multi-Agent Systems with State Time Delay. *International Journal of Control, Automation and Systems*, **20**, 3487-3500. <https://doi.org/10.1007/s12555-021-0009-0>
- [7] Bai, J., Wen, G., Rahmani, A. and Yu, Y. (2015) Distributed Formation Control of Fractional-Order Multi-Agent Systems with Absolute Damping and Communication Delay. *International Journal of Systems Science*, **46**, 2380-2392. <https://doi.org/10.1080/00207721.2014.998411>
- [8] Wang, X., Wu, H. and Cao, J. (2020) Global Leader-Following Consensus in Finite Time for Fractional-Order Multi-Agent Systems with Discontinuous Inherent Dynamics Subject to Nonlinear Growth. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **37**, Article ID: 100888. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2020.100888>
- [9] Yu, Z., Jiang, H. and Hu, C. (2015) Leader-following Consensus of Fractional-Order Multi-Agent Systems under Fixed Topology. *Neurocomputing*, **149**, 613-620. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2014.08.013>