

电磁辐射下神经元模型的动力学特性分析

于欢欢¹, 路正玉^{2*}

¹广东理工学院基础课教学研究部, 广东 肇庆

²广东理工学院艺术设计学院, 广东 肇庆

收稿日期: 2024年6月17日; 录用日期: 2024年7月11日; 发布日期: 2024年7月18日

摘要

近年来电磁辐射对神经元电活动的影响备受关注, 引入磁通以及电磁场建立了五维的神经元模型。该模型用来描述考虑电磁感应的神经元放电行为, 应用MATLAB进行数值仿真, 通过调节参数检测到神经元中电活动的多种模式。对深入了解神经元放电的规律以及异常放电提供了基础。

关键词

磁通, 电磁辐射, 放电行为

Analysis of the Dynamics of Neuronal Models under Electromagnetic Radiation

Huanhuan Yu¹, Zhengyu Lu^{2*}

¹Basic Course Teaching and Research Department, Guangdong Institute of Technology, Zhaoqing Guangdong

²College of Art and Design, Guangdong Institute of Technology, Zhaoqing Guangdong

Received: Jun. 17th, 2024; accepted: Jul. 11th, 2024; published: Jul. 18th, 2024

Abstract

In recent years, the influence of electromagnetic radiation on the electrical activity of neurons has attracted much attention, and a five-dimensional neuronal model has been established by introducing magnetic flux and electromagnetic field. The model is used to describe the firing behavior of neurons considering electromagnetic induction, and MATLAB is used to perform numerical simulations to detect multiple patterns of electrical activity in neurons by adjusting parameters. It provides a basis for understanding the pattern of neuronal firing and abnormal discharge.

*通讯作者。

文章引用: 于欢欢, 路正玉. 电磁辐射下神经元模型的动力学特性分析[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3250-3256.
DOI: 10.12677/aam.2024.137311

Keywords

Magneticflux, Electromagnetic Radiation, Discharge Behavior

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

神经元作为神经系统的基本功能单位[1], 能感受刺激和传导兴奋, 生物神经系统通过神经元放电来传递、编码和解码信息。在不同的 Ca^{2+} 、 Na^+ 、 K^+ 离子浓度或不同程度的外界刺激电流以及外界电磁辐射下, 神经元能表现出丰富的放电模式, 如尖峰放电、簇放电和混沌放电。因此, 建立许多神经元模型来研究神经元的放电规律, 检测神经元电活动的模式以及模式之间的转换是非常有意义的。

神经元模型的建立旨在通过数学语言来描述神经元的生理学行为, 神经科学的发展与神经元模型的发展息息相关。20 世纪 50 年代, Hodgkin 和 Kuxley 利用 Cole 发明的电压钳位技术获得了乌贼轴突电生理活动的大量实验数据, 并在这些数据的基础上推导出一个采用四维非线性微分方程系统描述的数学模型, 称之为 Hodgkin-Huxley 模型[2]。1961 年 FitzHugh 在 H-H 模型的基础上精简变量提出了 FitzHugh-Nagumo (FHN)模型[3]。1962 年 Nagumo 采用二极管组成的二极管电路成功的模拟了 FHN 模型[4]。1982 年, J. L. Hindmarsh 和 R. M. Rose 提出一种生物细胞模型(即 Hindmarsh-Rose 神经元模型)[5], 主要是用来研究神经元的放电状态, 所以有助于理解神经元的电活动模式以及模式之间的转换。此外, Hindmarsh-Rose 神经元模型有效的表述神经元活动的主要特征, 而且有更为可观的分岔参数。

近年来, 神经元电活动动力学特征备受研究人员的青睐。Qiao 等人[6]-[8]指出神经元系统中大量离子的运动会触发时变电磁场, 进一步调节神经元的放电活动;此外, 考虑到电场不可避免地受到周期性的扰动, 因此在模型中考虑电磁场时至关重要的。本文考虑了时变电磁场对神经元放电活动的影响, 构建了五维的 HR 神经元模型, 通过 MATLAB 分析了该模型的动力学特性。

2. 模型描述

在文献[9]中作者将经典的 H-R 神经元模型引入了一个新的参数: 磁通, 建立了新的神经元模型, 即磁通神经元模型, 具体表达式为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - ax^3 + bx^2 - z + I_{\text{ext}} - kW(\varphi)x \\ \frac{dy}{dt} = c - dx^2 - y \\ \frac{dz}{dt} = r[s(x - \chi) - z] \\ \frac{d\varphi}{dt} = k_1x - k_2\varphi \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c, d, r, s 是系统的参数, χ 表示钙离子的逆转电位, 这些参数取值为

$a = 1.0, b = 3.0, c = 1.0, d = 5.0, s = 4.0, r = 0.006, \chi = -1.6$ 。变量 x 为膜电位、变量 y 为恢复变量的慢电流、变量 z 为自适应电流、 I_{ext} 为神经元的外部刺激电流。 k_0, k_1, k_2 表示相关参数。 $W(\varphi)$ 表示磁控忆阻器[10],

定义 $kW(\varphi)x$ 为膜电位上的反馈电流, 这是由记忆电导来定义的, 其表达式为:

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = \alpha + 3\beta\varphi^2$$

$kW(\varphi)x$ 的物理意义描述为:

$$i = \frac{dq(\varphi)}{dt} = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = W(\varphi)V = kW(\varphi)x$$

其中 v 表示感应电动势, α, β 是确定的参数。

在该文章中作者从物理学角度研究了模型(1)的斑图动力学, 在文献[9]中, 作者对该模型进行了稳定性分析以及单参数分岔分析, 实际上, 多个参数对神经元放电活动的更具有影响力, 取

$k = 0.5, k_1 = 1, k_2 = 0.5$, 外界刺激电流 I_{ext} 与参数 d 的双参数分岔图如图 1 所示, 从图 1 中可以看出, 当参数 $I_{ext} \in [2.5, 4]$ 以及 $k \in [4.6, 5.6]$ 范围内变化时, 由左下方到右上方依次是 2 周期、3 周期、4 周期、5 周期、6 周期……直到 17 周期, 周期呈现了递增的现象, 也就是加周期现象, 展现了神经元丰富的放电行为。

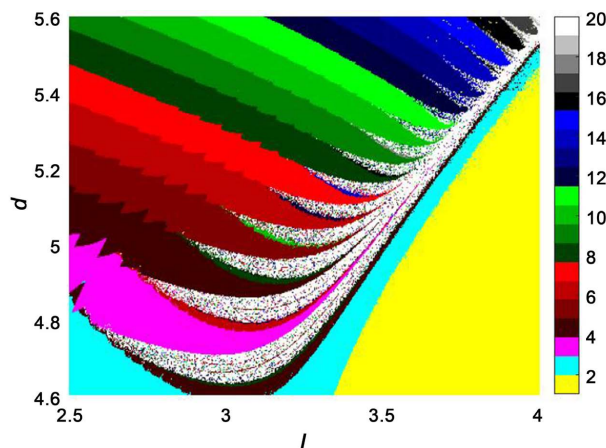


Figure 1. Bifurcation diagram of parameters I and k
图 1. 参数 I 与 k 的分岔图

实际上, 神经元细胞中电离子的交换、运动会引起电磁场的变化, 进而引起膜电位的变化, 在此影响下, 将四维的磁通神经元模型中引入外界电磁辐射, 改进了神经元模型。改进后五维的神经元模型[11]的表达式如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - ax^3 + bx^2 - z + I_{ext} - kW(\varphi)x \\ \frac{dy}{dt} = c - dx^2 - y + k_0E \\ \frac{dz}{dt} = r[s(x - \chi) - z] \\ \frac{d\varphi}{dt} = k_1x - k_2\varphi \\ \frac{dE}{dt} = k_3y - k_4E \end{cases} \quad (2)$$

其中变量 E 为电场的变量, 其余参数与模型中描述一致, 系统参数的取值也一致。

3. 稳定性分析

对于模型(2)分析其稳定性以及平衡点的类型, 令 $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$,

$\frac{d\varphi}{dt} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$, 求得平衡点设为 $s^* = (x, y, z, \varphi, E)$, 将方程化简为:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad (3)$$

其中

$$A = -a - \frac{3\beta k k_1^2}{k_2^2}, B = b - d - (1 - k_0) \frac{dk_3}{k_4 - k_0 k_3}, C = -k\alpha, D = (k_0 - 1) \frac{ck_3}{k_4 - k_0 k_3} + I_{ext}$$

方程的解即为平衡点处 x_* 的值, 设模型(2)的平衡点为 $s^* = (x_*, y_*, z_*, \varphi_*, E_*)$, 接下来讨论其稳定性, 通过计算可得模型(2)在平衡点处的雅可比矩阵为:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x}(x_*) = \begin{pmatrix} v & 1 & -1 & w & 0 \\ -2dx_* & -1 & 0 & 0 & k_0 \\ rs & 0 & -r & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 & -k_4 \end{pmatrix}$$

其中 $v = -3ax_*^2 + 2bx_* - k\rho(\varphi_*)$, $w = -6k\rho x\varphi$ 其对应的特征方程为:

$$\xi^5 + a_1\xi^4 + a_2\xi^3 + a_3\xi^2 + a_4\xi + a_5 = 0 \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_1 &= k_4 - k_2 - r - v - 1, \\ a_2 &= k_0 k_3 + k_1 w - k_2 k_4 - (k_2 - k_4)(r + v + 1) - v + rv + r + rs + 2dx_*, \\ a_3 &= k_0 k_3 (r + k_2 - v) + k_1 w (k_4 + 1 + v) - k_2 k_4 (r + v + 1) + vr - rs - 2rdx_*, \\ a_4 &= k_0 k_3 (k_2 r - rv - k_2 v - wk_1 + rs) + k_2 k_4 (r - vr - r - rs + 2dx) + (k_2 - k_4)(vr - rs - 2rdx_*), \\ a_5 &= -k_0 k_3 k_2 rv - wk_0 k_3 k_1 + k_0^2 k_3 rs - k_2 k_4 (2rdx + 2drs + rs - rv) \end{aligned}$$

由 Routh-Hurwitz 判据可得特征方程的系数满足

$$a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_5 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$$

方程式(4)具有负实部的特征值, 所以模型(2)在平衡点 $s^* = (x_*, y_*, z_*, \varphi_*, E_*)$ 处是渐进局部稳定的。

4. 数值模拟

模型(2)考虑到外界电磁辐射的影响, 神经元暴露在电磁场下会影响其放电行为。通过 MATLAB 对模型(2)进行数值仿真, 神经元在不同的参数以及不同的初值下呈现出多种放电模式, 例如簇放电、尖峰放电、混沌放电等。本文研究了模型(2)在系统参数不变的情况下, 改变外界刺激电流观察系统所呈现出的动力学特性。取定初值 $(x_0, y_0, z_0, \varphi_0, E_0) = (-1.52, -6.34, -0.35, -0.91, -7.56)$, 通过选取不同的外界刺激电流展现了神经元不同的放电模式, 如图 2 所示。从图中观察发现, 随着外界刺激电流的改变, 神经元呈现静息态、尖峰放电和周期态。

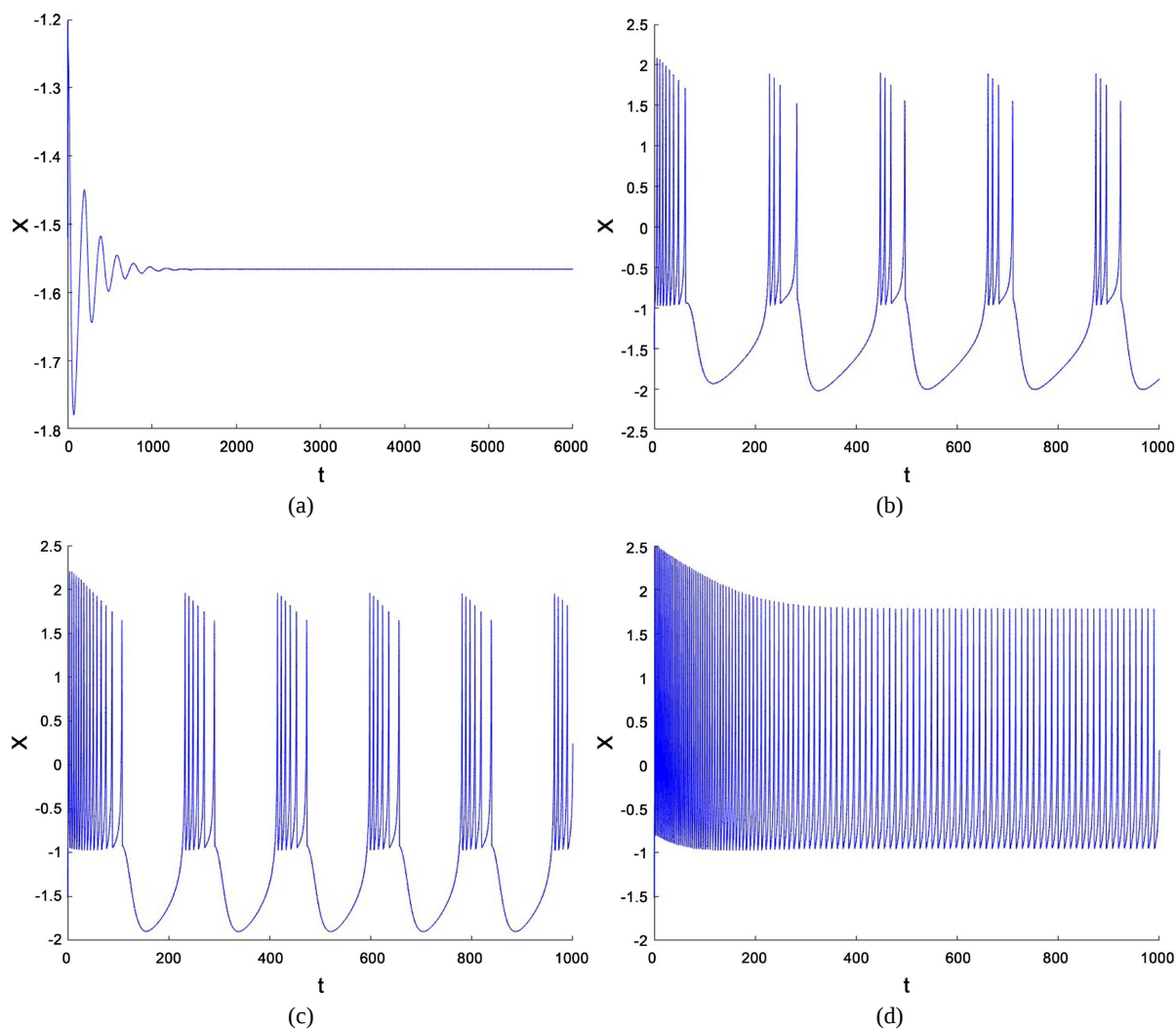
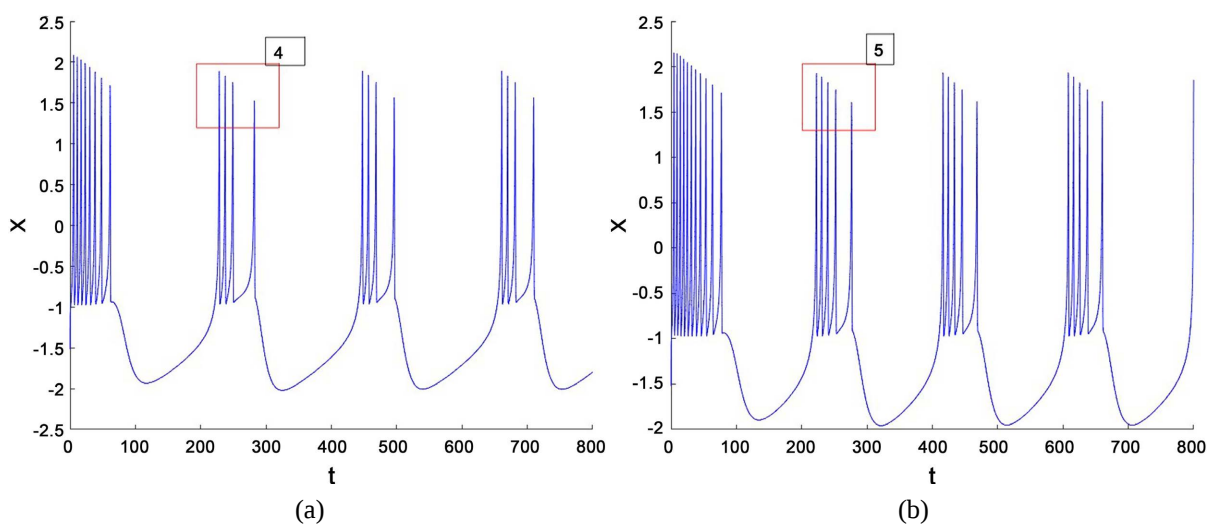


Figure 2. Time series plot of neuronal membrane potential under different external stimulus currents (a) $I = 1$; (b) $I = 1.5$; (c) $I = 2.3$; (d) $I = 3.8$ (unit: s)

图 2. 不同外界刺激电流下神经元膜电位的时间序列图 (a) $I = 1$; (b) $I = 1.5$; (c) $I = 2.3$; (d) $I = 3.8$ (单位: s)



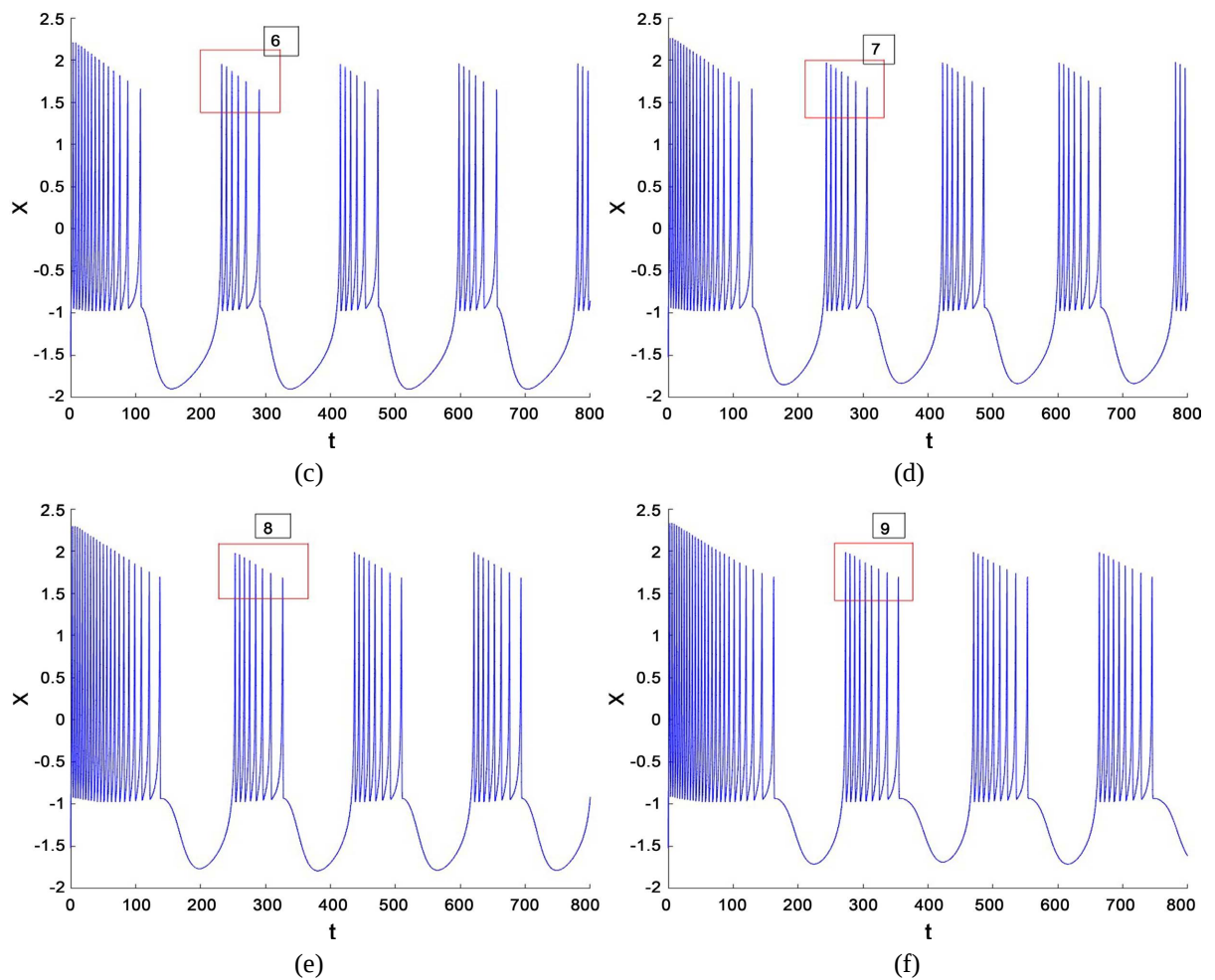


Figure 3. Time series plot of neuronal membrane potential under different. external stimulus currents (a) $I = 1.5$; (b) $I = 1.9$; (c) $I = 2.3$; (d) $I = 2.7$; (e) $I = 3$; (f) $I = 3.3$ (unit: s)

图 3. 不同外界刺激电流下神经元膜电位的时间序列图 (a) $I = 1.5$; (b) $I = 1.9$; (c) $I = 2.3$; (d) $I = 2.7$; (e) $I = 3$; (f) $I = 3.3$ (单位: s)

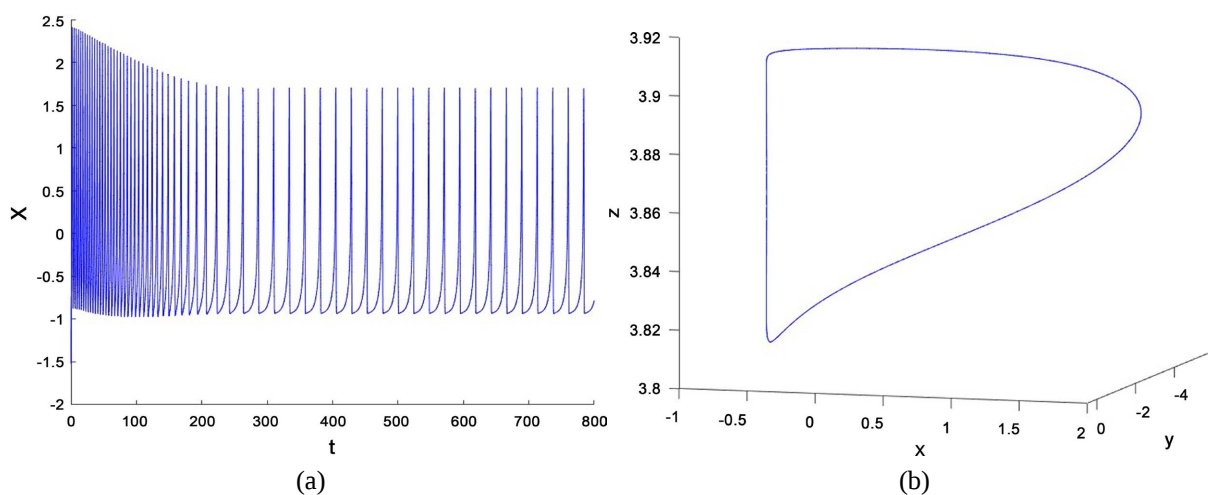


Figure 4. Time series plot and phase plot of neuronal membrane potential when $I = 4$ (unit: s)

图 4. 当 $I = 4$ 时神经元膜电位的时间序列图和相图(unit: s)

当外界刺激电流的 I 的取值在 $I \in [1.5, 3.3]$ 时, 神经元的放电模式呈现周期簇放电, 如图 3 所示。 $I = 1.5$ 时, 系统(2)的放电模式为周期 4 簇放电; $I = 1.9$ 时, 系统(2)的放电模式为周期 5 簇放电; $I = 2.3$ 时, 系统(2)的放电模式为周期 6 簇放电; $I = 2.7$ 时, 系统(2)的放电模式为周期 7 簇放电; $I = 3$ 时, 系统(2)的放电模式为周期 8 簇放电; $I = 3.3$ 时, 系统(2)的放电模式为周期 9 簇放电; 很明显的可以看出系统(2)的加周期放电行为。

在参数不变的情况下, 取外界刺激电流 I 为 4, 此时模型(2)的放电模式如图 4(a)所示, 呈现一周期放电, 通过观察和分析, 其运动状态和图 4(b)中相轨迹的情况完全一致。

5. 结论

考虑到电磁场也就是电磁辐射的影响, 在四维的 HR 神经元模型(磁通神经元模型)的基础上引入电场变量, 通过理论分析讨论了系统的稳定性, 通过 MATLAB 讨论了模型的放电模式等丰富的动力学特性。总之, 改进后的神经元模型由于拥有更多的影响参数并且考虑了电磁感应以及电磁辐射的影响, 通过调节参数可以观察到神经元多种放电模式, 易于了解和掌握神经元的放电规律或者异常放电, 以便应用到实际生活中。

基金项目

2021 年广东理工学院科技项目(自然科学) (2021GKJZK013)。

参考文献

- [1] Rabinovich, M.I., Varona, P., Selverston, A.I. and Abarbanel, H.D.I. (2006) Dynamical principles in neuroscience. *Reviews of Modern Physics*, **78**, 1213-1265. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.78.1213>
- [2] Hodgkin, A.L. and Huxley, A.F. (1952) A Quantitative Description of Membrane Current and Its Application to Conduction and Excitation in Nerve. *The Journal of Physiology*, **117**, 500-544. <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764>
- [3] FitzHugh, R. (1961) Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal*, **1**, 445-466. [https://doi.org/10.1016/s0006-3495\(61\)86902-6](https://doi.org/10.1016/s0006-3495(61)86902-6)
- [4] Nagumo, J., Arimoto, S. and Yoshizawa, S. (1962) An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon. *Proceedings of the IRE*, **50**, 2061-2070. <https://doi.org/10.1109/jrproc.1962.288235>
- [5] Hindmarsh, J.L. and Rose, R.M. (1982) A Model of the Nerve Impulse Using Two First-Order Differential Equations. *Nature*, **296**, 162-164. <https://doi.org/10.1038/296162a0>
- [6] Qiao, S. and An, X. (2020) Dynamic Expression of a HR Neuron Model under an Electric Field. *International Journal of Modern Physics B*, **35**, Article ID: 2150024. <https://doi.org/10.1142/s0217979221500247>
- [7] 乔帅, 安新磊, 王红梅, 张薇. 磁通 e-HR 神经元隐藏放电与分岔行为的研究[J]. 云南大学学报, 2020, 42(4): 685-694.
- [8] Qiao, S. and An, X. (2021) Dynamic Response of the E-Hr Neuron Model under Electromagnetic Induction. *Pramana*, **95**, 75-95. <https://doi.org/10.1007/s12043-021-02095-z>
- [9] 于欢欢, 张莉, 等. 磁通神经元模型的放电行为分析[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2019, 43(1): 37-44.
- [10] Song, X., Wang, C., Ma, J. and Tang, J. (2015) Transition of Electric Activity of Neurons Induced by Chemical and Electric Autapses. *Science China Technological Sciences*, **58**, 1007-1014. <https://doi.org/10.1007/s11431-015-5826-z>
- [11] 安新磊, 乔帅, 张莉. 基于麦克斯韦电磁场理论的神经元动力学响应与隐藏放电控制[J]. 物理学报, 2021, 70(5): 1-20.