Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(7), 3039-3051
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.137289

Hans汉斯

非定常渗透对流模型一阶分数步长算法的时间误差估计

田耕耘

温州大学数理学院，浙江 温州

收稿日期：2024年6月5日；录用日期：2024年6月29日；发布日期：2024年7月10日

摘 要

本文研究了求解非定常渗透对流模型的一阶分数步长时间离散算法，该方程是由非定常不可压缩**Navier-Stokes**方程和热传导方程所耦合的非线性多物理场模型。该算法的优点在于将**Navier-Stokes**方程的非线性性和不可压缩性进行分离，实现算法的高效性。理论上，在解的正则性假设下，我们得到了速度场和温度场一阶时间收敛阶。最后通过数值算例验证了所得到的收敛性结果。

关键词

非定常渗透对流模型，分数步长法，时间误差估计

Temporal Error Estimate of First-Order Fractional Step Algorithm for Unsteady Penetrative Convection Model

Gengyun Tian

School of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: Jun. 5th, 2024; accepted: Jun. 29th, 2024; published: Jul. 10th, 2024

Abstract

In this paper, the first-order fractional-step time-discretization algorithm for solving the unsteady penetrative-convection model is studied. This equation is a nonlinear multi-physical model coupled by the unsteady incompressible Navier-Stokes equation and the heat conduction equation. The advantage of the algorithm is that the nonlinearity and incompressibility of the Navier-Stokes

文章引用: 田耕耘. 非定常渗透对流模型一阶分数步长算法的时间误差估计[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3039-3051.
DOI: 10.12677/aam.2024.137289

equations are separated to realize the high efficiency of the algorithm. Theoretically, under the assumption of the regularity of the solution, we obtain the first-order temporal convergence order of the velocity field and the temperature field. Finally, the convergence results are verified by numerical examples.

Keywords

Unsteady Penetrative Convection Model, Fractional Step Algorithm, Temporal Error Estimates

1. 引言

非定常渗透对流模型指的是由流体力学中的非定常不可压缩 Navier-Stokes 方程和热传导方程所耦合的非线性偏微分方程组，在自然世界和工业制造中有广泛的应用[1]-[3]。对于有界的凸多边形区域$\Omega\in R^3$和正常数$T>0$，未知函数速度u、温度θ和压力p在$\Omega\times(0,T]$内满足如下的非定常渗透对流模型：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\mu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p-\left(\gamma_1\theta+\gamma_2\theta^2\right)i_3=f,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T]. \tag{1}$$

$$\nabla\cdot u=0,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T]. \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}-\kappa\Delta\theta+(u\cdot\nabla)\theta=g,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T]. \tag{3}$$

其中$i_3=(0,0,1)$是单位基向量，正常数μ和κ分别是粘性系数和导热系数。

对该模型，我们考虑如下的初始条件和边界条件：

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \theta(x,0)=\theta_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{4}$$

$$u=0,\theta=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T]. \tag{5}$$

关于非定常渗透对流模型数值方法及其收敛性已有一些研究工作。Ravindran 在[4]中使用二阶 BDF 格式分析了该模型的时间和空间离散化的外推两步后向差分，给出了全离散有限元格式的最优误差估计。Cao 等在文章[5]中采用 Mini 元和分片线性有限元分别逼近速度场、压力场和温度场，构造了线性化的 Crank-Nicolson 有限元格式，得到了L^2范数下的最优误差估计。Wan 等在文献[6]中基于 grad-div 稳定化方法，研究了非定常渗透对流模型的一阶后向 Euler 和二阶 BDF2 有限元全离散格式，所得到的误差估计界不依赖于粘性系数和导热系数。

由于非定常渗透对流模型是由 Navier-Stokes 方程和热传导方程所耦合，使得构造求解该模型的数值格式时，需考虑 Navier-Stokes 方程的不可压缩性和非线性性，这也是构造求解 Navier-Stokes 方程数值方法的难点之一。常用的方法之一为投影方法[7] [8]，然而投影方法中过渡的中间速度场不满足原方法的边界条件，导致数值边界层的出现。Blasco[9]等人构造了求解 Navier-Stokes 方程的一阶分数步长算法，在每个时间步上，该算法的基本思想是：首先通过求解一非线性椭圆方程得到过渡的中间速度场，然后通过求解一广义 Stokes 方程得到该时间步上的速度场和压力，从而实现方程的不可压缩性和非线性的分离，这是求解 Navier-Stokes 方程的一个高效稳定数值算法。基于该构造思想，Wu 等在[10]中研究了求解由非

定常 Navier-Stokes 方程和定常 Maxwell 方程所耦合的混合 MHD 系统的一阶分数步长有限元算法。An 在[11]中研究了三维变密度不可压缩 Navier-Stokes 方程的一阶分数步长时间离散格式。目前，还没有关于求解非定常渗透对流模型分数步长算法的研究。

本文将基于 Blasco 等所构造的一阶分数步长算法，构造求解非定常渗透对流模型的分数步长算法，使得所构造的数值算法是无条件稳定的。同时，在解的正则性假设下，我们给出了速度场和温度场的一阶时间误差估计。

2. 预备知识

首先引入下列符号。当 $k \in N^+$，$1 \le p \le +\infty$ 时，记 $W^{k,p}(\Omega)$ 为 Sobolev 空间[12]。当 $p=2$ 时，H^k 定义为 $W^{k,2}(\Omega)$。$(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 内积。用 $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$，$\|\cdot\|_{H^k}$ 和 $\|\cdot\|_{L^p}$ 分别表示 $W^{k,p}(\Omega)$，$H^k(\Omega)$ 和 $L^p(\Omega)$ 的范数。

记：

$$H=\left\{u \in L^2(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot u=0, n \cdot u|_{\partial\Omega}=0\right\},\quad V=H_0^1(\Omega)^3,\quad V_0=\left\{u \in H_0^1(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot u=0\right\},$$

$$M=H_0^1(\Omega),\quad L=L_0^2(\Omega)=\left\{q \in L^2(\Omega), \int_\Omega q \mathrm{d}x=0\right\},$$

其中 n 表示边界 $\partial\Omega$ 上的单位向外法向量。

定义如下三线性项：

$$c_1(u,v,w)=((u \cdot \nabla)v,w),\ \forall u,v,w \in H_0^1(\Omega)^3,$$

$$c_2(u,\phi,\varphi)=((u \cdot \nabla)\phi,\varphi),\ \forall u \in H_0^1(\Omega)^3,\ \phi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \in H_0^1(\Omega)。$$

当 $\nabla \cdot u=0$ 时，通过分部积分，容易验证三线性项 $c_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ 和 $c_2(\cdot,\cdot,\cdot)$ 满足如下反对称性：

$$c_1(u,v,w)=-c_1(u,w,v),\ c_2(u,\phi,\varphi)=-c_1(u,\varphi,\phi),$$

且有：

$$c_1(u,v,v)=0,\ c_2(u,\phi,\phi)=0.$$

记 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$ 是时间区间 $[0,T]$ 的一个均匀化分割，对于每个时间步长 $\Delta t>0$ 和 $t_n=n\Delta t$，$n=0,\cdots,N=[T/\Delta t]$。下面引入离散的 Gronwall 不等式[13]：

引理 2.1 对整数 $k \ge 0$，记 a_k, b_k, c_k, γ_k 和 B 都是非负数。若成立：

$$a_n+\Delta t\sum_{k=0}^{n} b_k \le \Delta t\sum_{k=0}^{n}\gamma_k a_k+\Delta t\sum_{k=0}^{n}\gamma_k c_k+B,\quad n \ge 0.$$

则当 $\Delta t\gamma_k<1$ 时有：

$$a_n+\Delta t\sum_{k=0}^{n} b_k \le \left(\Delta t\sum_{k=0}^{n}\gamma_k c_k+B\right)\exp\left(\Delta t\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\sigma_k\right),\quad n \ge 0,$$

其中 $\sigma_k=(1-\Delta t\gamma_k)^{-1}$。

3. 数值格式

下面给出求解非定常渗透对流模型的一阶分数步长时间离散算法。对 $0 \le n \le N-1$：

第一步：求 θ^{n+1} 使得：

$$\frac{\theta^{n+1}-\theta^{n}}{\Delta t}-\kappa\Delta\theta^{n+1}+\left(u^{n}\cdot\nabla\right)\theta^{n+1}=g\left(t_{n+1}\right). \tag{6}$$

第二步：求中间速度 $u^{n+\frac{1}{2}}$ 使得：

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}}-u^{n}}{\Delta t}-\mu\Delta u^{n+\frac{1}{2}}+\left(u^{n}\cdot\nabla\right)u^{n+\frac{1}{2}}-\left(\gamma_1\theta^{n}+\gamma_2\theta^{n}\theta^{n+1}\right)i_3=f\left(t_{n+1}\right), \tag{7}$$

$$u^{n+\frac{1}{2}}\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{8}$$

第三步：求 u^{n+1} 和 p^{n+1} 使得：

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}-\mu\Delta\left(u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}\right)+\nabla p^{n+1}=0,\ \ \nabla\cdot u^{n+1}=0, \tag{9}$$

$$u^{n+1}\Big|_{\partial\Omega}=0,\ \ \theta^{n+1}\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{10}$$

下面给出上述分数步长算法的稳定性分析。

定理 3.1 假设正则性(A)成立，对所有的 $\Delta t>0$ 和 $0\le m\le N-1$ 有：

$$\left\|\theta^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\sum_{n=0}^{m}\left\|\theta^{n+1}-\theta^{n}\right\|_{L^2}^2+\kappa\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\|\nabla\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2\le C, \tag{11}$$

和

$$\begin{aligned}&\left\|u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{m+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\sum_{n=0}^{m}\left\{\left\|u^{n+\frac{1}{2}}-u^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2\right\}\\&+\mu\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\{\left\|\nabla u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\left(u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}\right)\right\|_{L^2}^2\right\}\le C.\end{aligned} \tag{12}$$

证明：将(6)与 $2\Delta t\theta^{n+1}$ 作内积，利用公式 $(a-b,2a)=\|a\|_{L^2}^2-\|b\|_{L^2}^2+\|a-b\|_{L^2}^2$，则会有：

$$\begin{aligned}&\left\|\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|\theta^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|\theta^{n+1}-\theta^{n}\right\|_{L^2}^2+2\kappa\Delta t\left\|\theta^{n+1}\right\|_{H^1}^2\\&\le C\Delta t\left\|g\left(t_{n+1}\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla\theta^{n+1}\right\|_{L^2}\\&\le C\Delta t\left\|g\left(t_{n+1}\right)\right\|_{L^2}^2+\kappa\Delta t\left\|\nabla\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{13}$$

将式(13)从 $n=0$ 加到 $n=m$ $(0\le m\le N-1)$，由于解的正则性会有：

$$\left\|\theta^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\sum_{n=0}^{m}\left\|\theta^{n+1}-\theta^{n}\right\|_{L^2}^2+\kappa\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\|\nabla\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2\le C\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\|g\left(t_{n+1}\right)\right\|_{L^2}^2\le C. \tag{14}$$

另一方面，将(9)与 $2\Delta tu^{n+1}$ 作内积可得：

$$\left\|u^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\mu\Delta t\left\{\left\|\nabla u^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|\nabla u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\left(u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}\right)\right\|_{L^2}^2\right\}=0, \tag{15}$$

将式(7)与 $2\Delta tu^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积可得：

$$\left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2-\left\|u^n\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{n+\frac{1}{2}}-u^n\right\|_{L^2}^2+\mu\Delta t\left\|\nabla u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2$$
$$\leq C\Delta t\left\|\theta^n\right\|_{L^2}^2+C\Delta t\left\|\theta^n\right\|_{L^2}^2\left\|\nabla\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t\left\|f\left(t_{n+1}\right)\right\|_{L^2}^2\leq C. \tag{16}$$

将式(15)和(16)分别从 $n=0$ 加到 $n=m$，可以得到：

$$\left\|u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\sum_{n=0}^{m}\left\{\left\|u^{n+\frac{1}{2}}-u^n\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2\right\}+\mu\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\{\left\|\nabla u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\left(u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}\right)\right\|_{L^2}^2\right\}\leq C, \tag{17}$$

通过上述推导和分析，定理 3.1 成立。证毕。

4. 时间误差估计

记速度、温度以及压力的误差函数为：

$$\begin{aligned}&e_u^{n+1}=u\left(t_{n+1}\right)-u^{n+1},\quad e_u^{n+\frac{1}{2}}=u\left(t_{n+1}\right)-u^{n+\frac{1}{2}},\\&e_\theta^{n+1}=\theta\left(t_{n+1}\right)-\theta^{n+1},\quad e_p^{n+1}=p\left(t_{n+1}\right)-p^{n+1}.\end{aligned} \tag{18}$$

当 $0\leq n\leq N-1$ 时，容易验证真解满足如下的离散抛物系统：

$$\frac{\theta\left(t_{n+1}\right)-\theta\left(t_n\right)}{\Delta t}-\kappa\Delta\theta\left(t_{n+1}\right)+\left(u\left(t_{n+1}\right)\cdot\nabla\right)\theta\left(t_{n+1}\right)=g\left(t_{n+1}\right)+R_\theta^n, \tag{19}$$

$$\frac{u\left(t_{n+1}\right)-u\left(t_n\right)}{\Delta t}-\mu\Delta u\left(t_{n+1}\right)+\left(u\left(t_{n+1}\right)\cdot\nabla\right)u\left(t_{n+1}\right)+\nabla p\left(t_{n+1}\right)-\left(\gamma_1\theta\left(t_{n+1}\right)+\gamma_2\theta^2\left(t_{n+1}\right)\right)i_3=f\left(t_{n+1}\right)+R_u^n, \tag{20}$$

其中截断函数为：

$$R_\theta^n=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_n\right)\theta_{tt}(t)\mathrm{d}t,\quad R_u^n=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_n\right)u_{tt}(t)\mathrm{d}t.$$

下面我们开始证明所构造的一阶分数步长算法具有一阶时间收敛精度。为此，我们假设真解满足如下正则性：

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases}f\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)^3\right),\ g\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\ f_t\in L^1(0,T;H),\\u\in C^0(0,T;H)\cap L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)^3\right),\\\theta\in C^0(0,T;M)\cap L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\right),\ \nabla p\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\\u_t\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^3\right),\ \theta_t\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\\u_t\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)^3\right),\ \theta_t\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),\\u_{tt}\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^3\right),\ \theta_{tt}\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).\end{cases}$$

定理 4.1 假设正则性(A)成立，则当 $0\leq m\leq N-1$ 和对足够小的 $\Delta t>0$，我们有：

$$\left\|e_\theta^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{m+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\sum_{n=0}^{m}\left\{\left\|e_\theta^{n+1}-e_\theta^n\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}-e_u^n\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{n+1}-e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2\right\}$$
$$+\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\{\kappa\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\mu\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\mu\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\mu\left\|\nabla\left(e_u^{n+1}-e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)\right\|_{L^2}^2\right\}\leq C\Delta t. \tag{21}$$

证明：利用(19)减去(6)，可以获得：

$$\frac{e_\theta^{n+1}-e_\theta^n}{\Delta t}-\kappa\Delta e_\theta^{n+1}+\left(u\left(t_{n+1}\right)\cdot\nabla\right)\theta\left(t_{n+1}\right)-\left(u^n\cdot\nabla\right)\theta^{n+1}=R_\theta^n. \tag{22}$$

对于非线性项，我们做如下处理：

$$\left(u\left(t_{n+1}\right)\cdot\nabla\right)\theta\left(t_{n+1}\right)-\left(u^n\cdot\nabla\right)\theta^{n+1}=\left(\left(u\left(t_{n+1}\right)-u\left(t_n\right)\right)\cdot\nabla\right)\theta\left(t_{n+1}\right)+\left(u\left(t_n\right)\cdot\nabla\right)e_\theta^{n+1}+\left(e_u^n\cdot\nabla\right)\theta^{n+1}.$$

将(22)与 $2\Delta te_\theta^{n+1}$ 作内积，用 Hölder 不等式和 Young 不等式估计其右端项，对每个分量的处理如下：

1) 非线性项

$$\begin{aligned}&2\Delta tc_2\left(u\left(t_{n+1}\right)-u\left(t_n\right),\theta\left(t_{n+1}\right),e_\theta^{n+1}\right)\\&\leq C\Delta t\left\|u\left(t_{n+1}\right)-u\left(t_n\right)\right\|_{L^2}\left\|\theta\left(t_{n+1}\right)\right\|_{H^2}\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}\\&\leq\frac{\kappa\Delta t}{3}\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|u_t\right\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$2\Delta tc_2\left(e_u^n,\theta^{n+1},e_\theta^{n+1}\right)=2\Delta tc_2\left(e_u^n,\theta\left(t_{n+1}\right),e_\theta^{n+1}\right)\leq\frac{\kappa\Delta t}{3}\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t\left\|e_u^n\right\|_{L^2}^2,$$

2) 截断误差项

$$2\Delta t\left\langle R_\theta^n,e_\theta^{n+1}\right\rangle\leq\frac{\kappa\Delta t}{3}\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|\theta_{tt}\right\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t,$$

根据上述推导，我们有：

$$\begin{aligned}&\left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|e_\theta^n\right\|_{L^2}^2+\left\|e_\theta^{n+1}-e_\theta^n\right\|_{L^2}^2+\kappa\Delta t\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2\\&\leq C\Delta t\left\|e_u^n\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|u_t\right\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|\theta_{tt}\right\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{23}$$

另一方面，利用(20)减去(7)，可得：

$$\begin{aligned}\frac{e_u^{n+\frac12}-e_u^n}{\Delta t}-\mu\Delta e_u^{n+\frac12}=&\left(u^n\cdot\nabla\right)u^{n+\frac12}-\left(u\left(t_{n+1}\right)\cdot\nabla\right)u\left(t_{n+1}\right)+R_u^n-\nabla p\left(t_{n+1}\right)\\&+\left(\gamma_1\left(\theta\left(t_{n+1}\right)-\theta^n\right)+\gamma_2\left(\theta^2\left(t_{n+1}\right)-\theta^n\theta^{n+1}\right)\right)i_3.\end{aligned}\tag{24}$$

将(24)与 $2\Delta te_u^{n+\frac12}$ 作内积，对(24)的右侧非线性项的处理如下：

$$\left(u^n\cdot\nabla\right)u^{n+\frac12}-\left(u\left(t_{n+1}\right)\cdot\nabla\right)u\left(t_{n+1}\right)=\left(-e_u^n\cdot\nabla\right)u^{n+\frac12}+\left(\left(u\left(t_n\right)-u\left(t_{n+1}\right)\right)\cdot\nabla\right)u\left(t_{n+1}\right)-\left(u\left(t_n\right)\cdot\nabla\right)e_u^{n+\frac12} \tag{25}$$

类似地，对于式子(24)的最后两项可以分裂成：

$$\begin{aligned}&\left(\gamma_1\left(\theta\left(t_{n+1}\right)-\theta^n\right)+\gamma_2\left(\theta^2\left(t_{n+1}\right)-\theta^n\theta^{n+1}\right)\right)i_3\\&=\left[\gamma_1\left(\theta\left(t_{n+1}\right)-\theta\left(t_n\right)\right)+\gamma_1e_\theta^n\right]i_3+\left[\gamma_2\left(\theta^{n+1}e_\theta^n+e_\theta^{n+1}\theta\left(t_{n+1}\right)+\left(\theta\left(t_{n+1}\right)-\theta\left(t_n\right)\right)\theta^{n+1}\right)\right]i_3,\end{aligned}\tag{26}$$

这样整理到(24)就会有：

$$\begin{aligned}&\left\|e_u^{n+\frac12}\right\|_{L^2}^2-\left\|e_u^n\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{n+\frac12}-e_u^n\right\|_{L^2}^2+2\mu\Delta t\left\|\nabla e_u^{n+\frac12}\right\|_{L^2}^2\\&=2\Delta t\left\langle R_u^n,e_u^{n+\frac12}\right\rangle-2\Delta t\left(\nabla p\left(t_{n+1}\right),e_u^{n+\frac12}\right)+2\Delta tc_1\left(-e_u^n,u^{n+\frac12},e_u^{n+\frac12}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\Delta t c_1\left(u(t_n)-u(t_{n+1}),u(t_{n+1}),e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)+2\Delta t c_1\left(-u(t_n),e_u^{n+\frac{1}{2}},e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)\\
&+2\Delta t\left(\gamma_1\left(\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)\right)i_3,e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)+2\Delta t\left(\gamma_1 e_\theta^n i_3,e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)+2\Delta t\left(\gamma_2\theta^{n+1}e_\theta^n i_3,e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)\\
&+2\Delta t\left(\gamma_2 e_\theta^{n+1}\theta(t_{n+1})i_3,e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)+2\Delta t\left(\gamma_2\left(\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)\right)\theta^{n+1}i_3,e_u^{n+\frac{1}{2}}\right):=\sum_{n=1}^{9}I_n,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

下面分别对(27)的右端每一项进行估计：

1) 截断误差项

$$
|I_1|\le\frac{\mu\Delta t}{8}\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{H^1}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{tt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t, \tag{28}
$$

2) 压力梯度项

$$
|I_2|\le\frac{1}{2}\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}-e_u^n\right\|_{L^2}^2+2\Delta t^2\left\|\nabla p(t_{n+1})\right\|_{L^2}^2, \tag{29}
$$

这里用到了 $-\left(\nabla p(t_{n+1}),e_u^n\right)=\left(p(t_{n+1}),\nabla\cdot e_u^n\right)=0$，

3) 非线性项

$$
|I_3|\le C\Delta t\|e_u^n\|_{L^2}\|u(t_{n+1})\|_{H^2}\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}\le\frac{\mu\Delta t}{8}\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t\|e_u^n\|_{L^2}^2, \tag{30}
$$

$$
|I_4|\le\frac{\mu\Delta t}{8}\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t, \tag{31}
$$

4) 与温度相关的项

$$
|I_5|\le\frac{\mu\Delta t}{8}\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\theta_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t, \tag{32}
$$

$$
|I_6|\le\frac{\mu\Delta t}{8}\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t\|e_\theta^n\|_{L^2}^2, \tag{33}
$$

$$
|I_7|\le\frac{\mu\Delta t}{8}\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2\|e_\theta^n\|_{L^2}^2\le\frac{\mu\Delta t}{8}\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t\|e_\theta^n\|_{L^2}^2, \tag{34}
$$

$$
|I_8|\le\frac{\mu\Delta t}{8}\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t\|e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2, \tag{35}
$$

$$
|I_9|\le\frac{\mu\Delta t}{8}\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\theta_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t, \tag{36}
$$

根据上述推导，将(28)~(36)代入(27)中得到：

$$
\begin{aligned}
&\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2-\|e_u^n\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}-e_u^n\right\|_{L^2}^2+\mu\Delta t\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2\\
&\le C\Delta t\|e_u^n\|_{L^2}^2+2\Delta t^2\|\nabla p(t_{n+1})\|_{L^2}^2+C\Delta t\|e_\theta^n\|_{L^2}^2+C\Delta t\|e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2\\
&\quad+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{tt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\theta_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

将式(9)重新写为：

$$\frac{e_u^{n+1}-e_u^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}-\mu\Delta\left(e_u^{n+1}-e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)-\nabla p^{n+1}=0\,, \tag{38}$$

将(38)与 $2\Delta t e_u^{n+1}$ 作内积，再由于 $\nabla\cdot e_u^{n+1}=0$，可得：

$$\left\|e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{n+1}-e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\mu\Delta t\left\{\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|\nabla e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\left(e_u^{n+1}-e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)\right\|_{L^2}^2\right\}=0. \tag{39}$$

将(23)，(37)和(39)从 $n=0$ 加到 $n=m$，可以得到：

$$\begin{aligned}&\left\|e_\theta^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\sum_{n=0}^{m}\left\{\left\|e_\theta^{n+1}-e_\theta^{n}\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}-e_u^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{n+1}-e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2\right\}\\&+\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\{\kappa\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\mu\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\mu\left\|\nabla\left(e_u^{n+1}-e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)\right\|_{L^2}^2\right\}\\&\le C\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\{\left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2\right\}+C\Delta t^2\int_0^T\left\|u_t\right\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+C\Delta t^2\int_0^T\left\|u_{tt}\right\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\\&+C\Delta t^2\int_0^T\left\|\theta_t\right\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+C\Delta t^2\int_0^T\left\|\theta_{tt}\right\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t+2\Delta t^2\sum_{n=0}^{m}\left\|\nabla p\left(t_{n+1}\right)\right\|_{L^2}^2\,,\end{aligned} \tag{40}$$

对(40)利用引理 2.1 和连续解的正则性质(A)，使得定理 4.1 成立。证毕。

定理 4.1 得到了在 $H_0^1(\Omega)$ 中一致稳定的速度和温度，换句话来说就是，存在一个与时间步长 Δt 不相关的常数 C ($C>0$)，使得对所有 $0\le n\le N-1$，可得：

$$\begin{aligned}&\left\|u^{n+1}\right\|_{H^1}\le C,\ \left\|\theta^{n+1}\right\|_{H^1}\le C,\ \left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{H^1}\le C,\ \left\|e_u^{n+1}\right\|_{L^2}\le C\Delta t^{\frac{1}{2}},\\&\left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}\le C\Delta t^{\frac{1}{2}},\ \left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}\le C\Delta t^{\frac{1}{2}},\ \left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{H^1}\le C,\ \left\|e_u^{n+1}\right\|_{H^1}+\left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{H^1}\le C.\end{aligned} \tag{41}$$

定理 4.2 假设正则性(A)成立，则当 $0\le m\le N-1$ 和对足够小的 $\Delta t>0$ 有：

$$\begin{aligned}&\left\|e_\theta^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{m+1}\right\|_{L^2}^2+\kappa\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2\\&+\mu\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+\sum_{n=0}^{m}\left\{\left\|e_\theta^{n+1}-e_\theta^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{n+1}-e_u^{n}\right\|_{L^2}^2\right\}\le C\Delta t^2.\end{aligned} \tag{42}$$

证明：将(22)与 $2\Delta t e_\theta^{n+1}$ 作内积，可以得到：

$$\begin{aligned}&\left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|e_\theta^{n}\right\|_{L^2}^2+\left\|e_\theta^{n+1}-e_\theta^{n}\right\|_{L^2}^2+2\kappa\Delta t\left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{H^1}^2\\&=2\Delta t\left\langle R_\theta^n,e_\theta^{n+1}\right\rangle+2\Delta t c_2\left(u^n,\theta^{n+1},e_\theta^{n+1}\right)-2\Delta t c_2\left(u\left(t_{n+1}\right),\theta\left(t_{n+1}\right),e_\theta^{n+1}\right).\end{aligned} \tag{43}$$

下面分别对(43)的右端的每一项进行估计：

1) 截断误差项

$$2\Delta t\left\langle R_\theta^n,e_\theta^{n+1}\right\rangle\le\frac{\kappa\Delta t}{2}\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|\theta_{tt}\right\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\,, \tag{44}$$

2) 非线性项

$$-2\Delta t c_2\left(u\left(t_{n+1}\right)-u\left(t_n\right),\theta\left(t_{n+1}\right),e_\theta^{n+1}\right)\le C\Delta t\left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|u_t\right\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\,, \tag{45}$$

$$-2\Delta t c_2\left(e_u^n,\theta^{n+1},e_\theta^{n+1}\right)=-2\Delta t c_2\left(e_u^n,\theta\left(t_{n+1}\right),e_\theta^{n+1}\right)\le C\Delta t\left\|e_u^n\right\|_{L^2}^2+\frac{\kappa\Delta t}{2}\left\|\nabla e_\theta^{n+1}\right\|_{L^2}^2. \tag{46}$$

将式(7)和(9)相加，可得：

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}-\mu\Delta u^{n+1}+\left(u^n\cdot\nabla\right)u^{n+\frac{1}{2}}+\nabla p^{n+1}-\left(\gamma_1\theta^n+\gamma_2\theta^n\theta^{n+1}\right)i_3=f\left(t_{n+1}\right). \tag{47}$$

将式(20)减去(47)，可得：

$$\begin{aligned}&\frac{e_u^{n+1}-e_u^n}{\Delta t}-\mu\Delta e_u^{n+1}+\nabla e_p^{n+1}\\&=\left(u^n\cdot\nabla\right)u^{n+\frac{1}{2}}-\left(u\left(t_{n+1}\right)\cdot\nabla\right)u\left(t_{n+1}\right)+R_u^n+\left(\gamma_1\left(\theta\left(t_{n+1}\right)-\theta^n\right)i_3+\gamma_2\left(\theta^2\left(t_{n+1}\right)-\theta^n\theta^{n+1}\right)\right)i_3.\end{aligned} \tag{48}$$

将(48)与 $2\Delta t e_u^{n+1}$ 作内积，又由于在原先的假设下有 $e_u^{n+1}\in V_0$，可以得到：

$$\begin{aligned}&\left\|e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2-\left\|e_u^n\right\|_{L^2}^2+\left\|e_u^{n+1}-e_u^n\right\|_{L^2}^2+2\mu\Delta t\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2\\&=2\Delta t\left\langle R_u^n,e_u^{n+1}\right\rangle+2\Delta t c_1\left(u^n,u^{n+\frac{1}{2}},e_u^{n+1}\right)-2\Delta t c_1\left(u\left(t_{n+1}\right),u\left(t_{n+1}\right),e_u^{n+1}\right)\\&\quad+2\Delta t\left(\gamma_1\left(\theta\left(t_{n+1}\right)-\theta^n\right)i_3,e_u^{n+1}\right)+2\Delta t\left(\gamma_2\left(\theta^2\left(t_{n+1}\right)-\theta^n\theta^{n+1}\right)i_3,e_u^{n+1}\right).\end{aligned} \tag{49}$$

类似式(25)的分裂，对(49)的右端项进行估计：

1) 截断误差项

$$2\Delta t\left\langle R_u^n,e_u^{n+1}\right\rangle\le\frac{\mu\Delta t}{6}\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|u_{tt}\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\,, \tag{50}$$

2) 非线性项

$$2\Delta t c_1\left(-e_u^n,u^{n+\frac{1}{2}},e_u^{n+1}\right)=2\Delta t c_1\left(e_u^n,e_u^{n+\frac{1}{2}},e_u^{n+1}\right)-2\Delta t c_1\left(e_u^n,u\left(t_{n+1}\right),e_u^{n+1}\right)=T_1+T_2. \tag{51}$$

下面分别估计 T_1 和 T_2，由于 $c_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的反对称性，$c_1\left(e_u^n,e_u^{n+\frac{1}{2}},e_u^{n+1}\right)=-c_1\left(e_u^n,e_u^{n+1},e_u^{n+\frac{1}{2}}\right)$，可得：

$$\begin{aligned}\left|T_1\right|&\le C\Delta t\left\|\nabla e_u^n\right\|_{L^2}\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\\&\le C\Delta t^{\frac{5}{4}}\left\|\nabla e_u^n\right\|_{L^2}\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}\\&\le C\mu\Delta t^{\frac{3}{2}}\left\|\nabla e_u^n\right\|_{L^2}^2+\frac{\mu\Delta t}{6}\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{52}$$

$$\left|T_2\right|\le C\Delta t\left\|e_u^n\right\|_{L^2}\left\|u\left(t_{n+1}\right)\right\|_{H^2}\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}\le C\Delta t\left\|e_u^n\right\|_{L^2}^2+\frac{\mu\Delta t}{6}\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2. \tag{53}$$

下面估计其余的非线性项：

$$2\Delta t c_1\left(u\left(t_n\right)-u\left(t_{n+1}\right),u\left(t_{n+1}\right),e_u^{n+1}\right)\le\frac{\mu\Delta t}{6}\left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2+C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|u_t\right\|_{H^1}^2\mathrm{d}t\,, \tag{54}$$

$$2\Delta t c_1\left(-u(t_n), e_u^{n+\frac{1}{2}}, e_u^{n+1}\right) = 2\Delta t c_1\left(-u(t_n), e_u^{n+\frac{1}{2}} - e_u^{n+1}, e_u^{n+1}\right) + 2\Delta t c_1\left(-u(t_n), e_u^{n+1}, e_u^{n+1}\right)$$
$$\le C\Delta t\|u(t_n)\|_{H^2}\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}} - e_u^{n+1}\right\|_{L^2}\|\nabla e_u^{n+1}\|_{L^2} \tag{55}$$
$$\le \frac{\mu\Delta t}{6}\|\nabla e_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + C\Delta t\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}} - e_u^{n+1}\right\|_{L^2}^2.$$

3) 与温度相关的项

$$2\Delta t\left(\gamma_1\left(\theta(t_{n+1}) - \theta^n\right)i_3, e_u^{n+1}\right)$$
$$= 2\Delta t\left(\gamma_1\left(\theta(t_{n+1}) - \theta(t_n)\right)i_3, e_u^{n+1}\right) + 2\Delta t\left(\gamma_1 e_\theta^n i_3, e_u^{n+1}\right) \tag{56}$$
$$\le C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\theta_t\|_{H^1}^2\,\mathrm{d}t + \frac{\mu\Delta t}{6}\|\nabla e_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + C\Delta t\|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + \Delta t\|e_u^{n+1}\|_{L^2}^2,$$

$$2\Delta t\left(\gamma_2\left(\theta^2(t_{n+1}) - \theta^n\theta^{n+1}\right)i_3, e_u^{n+1}\right)$$
$$= 2\Delta t\left(\gamma_2\left(\theta^{n+1}e_\theta^n + e_\theta^{n+1}\theta(t_{n+1}) + \left(\theta(t_{n+1}) - \theta(t_n)\right)\theta^{n+1}\right)i_3, e_u^{n+1}\right)$$
$$\le C\Delta t\|e_\theta^n\|_{L^2}\|e_u^{n+1}\|_{L^2} + C\Delta t\|e_\theta^{n+1}\|_{L^2}\|e_u^{n+1}\|_{L^2} + C\Delta t\|\theta(t_{n+1}) - \theta(t_n)\|_{H^1}\|e_u^{n+1}\|_{L^2} \tag{57}$$
$$\le C\Delta t\|e_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + C\Delta t\|e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + C\Delta t\|e_\theta^n\|_{L^2}^2 + C\Delta t^2\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\theta_t\|_{H^1}^2\,\mathrm{d}t.$$

将(43)和(49)从 $n=0$ 加到 $n=m$，再由(44)~(57)可以得到：

$$\|e_\theta^{m+1}\|_{L^2}^2 + \|e_u^{m+1}\|_{L^2}^2 + \sum_{n=0}^{m}\left\{\|e_\theta^{n+1} - e_\theta^n\|_{L^2}^2 + \|e_u^{n+1} - e_u^n\|_{L^2}^2\right\} + \kappa\Delta t\sum_{n=0}^{m}\|\nabla e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + \mu\Delta t\sum_{n=0}^{m}\|\nabla e_u^{n+1}\|_{L^2}^2$$
$$\le C\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\{\|e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|e_u^{n+1}\|_{L^2}^2\right\} + C\Delta t^2\int_0^T\|u_{tt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t + C\Delta t^2\int_0^T\|u_t\|_{H^1}^2\,\mathrm{d}t + C\Delta t^2\int_0^T\|\theta_t\|_{H^1}^2\,\mathrm{d}t$$
$$+ C\Delta t^2\int_0^T\|\theta_{tt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t + C\mu\Delta t^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{m}\|\nabla e_u^n\|_{L^2}^2 + C\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\|e_u^{n+1} - e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{L^2}^2 \tag{58}$$
$$\le C\Delta t\sum_{n=0}^{m}\left\{\|e_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|e_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2\right\} + C\Delta t^2 + C\mu\Delta t^{\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{m}\|\nabla e_u^n\|_{L^2}^2$$

对足够小的 Δt，可以对式子(58)应用引理 2.1，最后一项被左边吸收，定理 4.2 成立。证毕。

定理 4.3 假设正则性(A)成立，则当 $0 \le m \le N-1$ 和对足够小的 $\Delta t > 0$ 有：

$$\Delta t\sum_{n=0}^{m}\|e_p^{n+1}\|_{L_0^2}^2 \le C\Delta t. \tag{59}$$

证明：重写(48)为：

$$-\nabla e_p^{n+1} = \frac{e_u^{n+1} - e_u^n}{\Delta t} - \mu\Delta e_u^{n+1} - (u^n\cdot\nabla)u^{n+\frac{1}{2}} + (u(t_{n+1})\cdot\nabla)u(t_{n+1}) - R_u^n$$
$$-\left(\gamma_1\theta(t_{n+1}) + \gamma_2\theta^2(t_{n+1})\right)i_3 + \left(\gamma_1\theta^n + \gamma_2\theta^n\theta^{n+1}\right)i_3. \tag{60}$$

利用离散的 LBB 条件：

$$\|e_p^{n+1}\|_{L_0^2} \le C\sup_{v\in H_0^1(\Omega)^3}\frac{\left(\nabla\cdot v, e_p^{n+1}\right)}{\|v\|_{H^1}}, \tag{61}$$

对任意的 $v \in H_0^1(\Omega)^3$，需要估计(60)的右边：

$$\frac{\left(e_u^{n+1}-e_u^n, v\right)}{\Delta t} \le \frac{1}{\Delta t}\left\|e_u^{n+1}-e_u^n\right\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}, \tag{62}$$

$$\left(-\mu \Delta e_u^{n+1}, v\right) \le \left\|\nabla e_u^{n+1}\right\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}, \tag{63}$$

$$\left\langle -R_u^n, v\right\rangle \le \left\|R_u^n\right\|_{H^{-1}}\|\nabla v\|_{L^2} \le C\Delta t^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{tt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{L^2}. \tag{64}$$

对于非线性项，有如下的分裂：

$$\begin{aligned}
&-\left(u^n\cdot\nabla\right)u^{n+\frac{1}{2}}+\left(u(t_{n+1})\cdot\nabla\right)u(t_{n+1}) \\
&=\left(\left(u(t_{n+1})-u(t_n)\right)\cdot\nabla\right)u(t_{n+1})+\left(e_u^n\cdot\nabla\right)u(t_{n+1})+\left(u^n\cdot\nabla\right)e_u^{n+\frac{1}{2}} \\
&=G_1+G_2+G_3.
\end{aligned} \tag{65}$$

下面分别估计 G_1，G_2 和 G_3：

$$\left(G_1, v\right) \le C\left\|u(t_{n+1})-u(t_n)\right\|_{L^2}\left\|u(t_{n+1})\right\|_{H^2}\|\nabla v\|_{L^2} \le C\left(\Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{L^2}, \tag{66}$$

$$\left(G_2, v\right) \le C\left\|e_u^n\right\|_{H^1}\left\|u(t_{n+1})\right\|_{H^1}\|\nabla v\|_{L^2} \le C\left\|e_u^n\right\|_{H^1}\|\nabla v\|_{L^2}, \tag{67}$$

$$\left(G_3, v\right) \le C\left\|u^n\right\|_{H^1}\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{H^1}\|\nabla v\|_{L^2} \le C\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{H^1}\|\nabla v\|_{L^2}. \tag{68}$$

对于式(60)右端剩下的两项，可以进行如下分裂：

$$\begin{aligned}
&\left(\gamma_1\theta(t_{n+1})+\gamma_2\theta^2(t_{n+1})\right)i_3-\left(\gamma_1\theta^n+\gamma_2\theta^n\theta^{n+1}\right)i_3 \\
&=\left(\gamma_1\left(\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)\right)+\gamma_1 e_\theta^n\right)i_3+\gamma_2\left(\theta^{n+1}e_\theta^n+e_\theta^{n+1}\theta(t_{n+1})+\left(\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)\right)\theta^{n+1}\right)i_3.
\end{aligned} \tag{69}$$

下面分别估计(69)的右端项，可得：

$$\left(\gamma_1\left(\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)\right)i_3, v\right) \le C\left\|\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)\right\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} \le C\left(\Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\theta_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{L^2}, \tag{70}$$

$$\left(\gamma_1 e_\theta^n i_3, v\right) \le C\left\|e_\theta^n\right\|_{H^1}\|\nabla v\|_{L^2}, \tag{71}$$

$$\left(\gamma_2\theta^{n+1}e_\theta^n i_3, v\right) \le C\left\|e_\theta^n\right\|_{H^1}\|\nabla v\|_{L^2}, \tag{72}$$

$$\left(\gamma_2 e_\theta^{n+1}\theta(t_{n+1})i_3, v\right) \le C\left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{H^1}\|\nabla v\|_{L^2}, \tag{73}$$

$$\left(\gamma_2\left(\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)\right)\theta^{n+1}i_3, v\right) \le C\left(\Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\theta_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{L^2}. \tag{74}$$

因此，整理(62)~(74)，可以得到：

$$\begin{aligned}
\left\|p_c^{n+1}\right\|_{L_0^2} \le{}& \frac{C}{\Delta t}\left\|e_u^{n+1}-e_u^n\right\|_{L^2}+C\Bigg\{\left\|e_u^{n+1}\right\|_{H^1}+\left\|e_u^n\right\|_{H^1}+\left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{H^1}+\left\|e_\theta^n\right\|_{H^1}+\left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{H^1} \\
&+\left(\Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{tt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\theta_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{75}$$

从而也会有：

$$\left\|p_c^{n+1}\right\|_{L_0^2}^2 \le \frac{C}{\Delta t^2}\left\|e_u^{n+1}-e_u^n\right\|_{L^2}^2 + C\left\{\left\|e_u^{n+1}\right\|_{H^1}^2 + \left\|e_u^n\right\|_{H^1}^2 + \left\|e_u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{H^1}^2 + \left\|e_\theta^n\right\|_{H^1}^2 + \left\|e_\theta^{n+1}\right\|_{H^1}^2 \right.$$
$$\left. + \Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|u_{tt}\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t + \Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|u_t\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t + \Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|\theta_t\right\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t\right\}. \tag{76}$$

不等式(59)可以由定理 4.2 和与连续性的解 u 相关的(A)给出。证毕。

5. 数值结果

下面将给出数值实验来验证理论推导的最优误差估计。为了简便，考虑在单位正方形[0, 1] × [0, 1]上的问题(1)~(5)。在计算过程中，通过取适当的 f 和 g，使得真解有如下形式：

$$u = \left(10x^2(x-1)^2 y(y-1)(2y-1)\mathrm{e}^{-t}, -10x(x-1)(2x-1)y^2(y-1)^2\mathrm{e}^{-t}\right),$$

$$\theta = \sin(\pi\cdot x)\sin(\pi\cdot y)\mathrm{e}^{-t},$$

$$p = 10(2x-1)(2y-1)\mathrm{e}^{-t}.$$

Table 1. Numerical error and convergence order under L^2
表 1. L^2 范数下的数值误差和收敛阶数

M	$\|u-u_h\|_{L^2}$	阶数	$\|\theta-\theta_h\|_{L^2}$	阶数	$\|p-p_h\|_{L^2}$	阶数
10	1.11E−03	–	5.62E−03	–	1.10E−03	-
20	5.49E−04	1.01	2.82E−03	0.99	4.00E−04	1.46
30	3.57E−04	1.07	1.87E−03	1.02	2.22E−04	1.45
40	2.61E−04	1.09	1.39E−03	1.03	1.46E−04	1.45
60	1.67E−04	1.10	9.06E−04	1.05	8.15E−05	1.44
80	1.22E−04	1.10	6.64E−04	1.08	5.43E−05	1.41

Table 2. Numerical error and convergence order under L^2
表 2. L^2 范数下的数值误差和收敛阶数

M	$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2}$	阶数	$\|\nabla(\theta-\theta_h)\|_{L^2}$	阶数
10	4.43E−03	–	9.47E−03	-
20	1.62E−03	1.46	4.16E−03	1.19
30	9.46E−04	1.32	2.86E−03	0.92
40	6.76E−04	1.17	2.30E−03	0.77
60	4.55E−04	0.97	1.76E−03	0.65
80	3.62E−04	0.79	1.49E−03	0.59

为了验证收敛阶，固定 $h = 1/100$，取时间步长 $\Delta t = 1/M$，其中 M 为正方形边长上的节点数。对于定理 4.2 中给出的时间误差估计，分别取 $M = 10, 20, 30, 40, 60, 80$，得到的数值误差及收敛阶如表 1 和表 2 所示。从表 1 和表 2 可以看出，当网格逐渐变小时，得到的一阶收敛与定理 4.2 中的理论相一致。

参考文献

[1] Straughan, B. (2022) Effect of Anisotropy and Boundary Conditions on Darcy and Brinkman Porous Penetrative Convection. *Environmental Fluid Mechanics*, **22**, 1233-1252. https://doi.org/10.1007/s10652-022-09888-9

[2] Carr, M. and de Putter, S. (2003) Penetrative Convection in a Horizontally Isotropic Porous Layer. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **15**, 33-43. https://doi.org/10.1007/s00161-002-0102-4

[3] Musman, S. (1968) Penetrative Convection. *Journal of Fluid Mechanics*, **31**, 343-360. https://doi.org/10.1017/s0022112068000194

[4] Ravindran, S.S. (2012) Convergence of Extrapolated BDF2 Finite Element Schemes for Unsteady Penetrative Convection Model. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **33**, 48-79. https://doi.org/10.1080/01630563.2011.618899

[5] Cao, M. and Li, Y. (2023) Optimal Error Analysis of Linearized Crank-Nicolson Finite Element Scheme for the Time-Dependent Penetrative Convection Problem. *Communications on Applied Mathematics and Computation*. https://doi.org/10.1007/s42967-023-00269-7

[6] Wan, W. and An, R. (2024) Convergence Analysis of Euler and BDF2 Grad-Div Stabilization Methods for the Time-Dependent Penetrative Convection Model. *AIMS Mathematics*, **9**, 453-480. https://doi.org/10.3934/math.2024025

[7] Shen, J. (1992) On Error Estimates of Projection Methods for Navier-Stokes Equations: First-Order Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **29**, 57-77. https://doi.org/10.1137/0729004

[8] Shen, J. (1996) On Error Estimates of the Projection Methods for the Navier-Stokes Equations: Second-Order Schemes. *Mathematics of Computation*, **65**, 1039-1065. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-96-00750-8

[9] Blasco, J. and Codina, R. (2004) Error Estimates for an Operator-Splitting Method for Incompressible Flows. *Applied Numerical Mathematics*, **51**, 1-17. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2004.02.004

[10] Wu, J.K., An, R. and Li, Y. (2021) Optimal H^1 Error Analysis of a Fractional Step Finite Element Scheme for a Hybrid MHD System. *Journal of Applied Analysis and Computation*, **11**, 1535-1556. https://doi.org/10.11948/20200277

[11] An, R. (2020) Error Analysis of a New Fractional-Step Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Variable Density. *Journal of Scientific Computing*, **84**, Article No. 3. https://doi.org/10.1007/s10915-020-01253-6

[12] Adams, R. (1975) Sobolev Spaces. Academic Press, New York.

[13] Heywood, J.G. and Rannacher, R. (1990) Finite-Element Approximation of the Nonstationary Navier-Stokes Problem. Part IV: Error Analysis for Second-Order Time Discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **27**, 353-384. https://doi.org/10.1137/0727022