Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(7), 3332-3340
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.137319

一类基于Allee效应的捕食者–食饵模型的动力学研究

王恬静，孙福芹

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2024年6月17日；录用日期：2024年7月11日；发布日期：2024年7月19日

摘　要

近年来，关于捕食–食饵模型的动力学分析作为一个重要课题，吸引了许多学者的广泛研究。通过对Allee效应的研究，可以发现种群自身适应度与种群自身的生长密度等其他方面的正相关关系。本文从数学和生物学的角度出发，建立了带有Allee效应和具有Holling IV功能反应的捕食者–食饵模型。针对模型，对其有界性、解的性质、平衡点的存在性以及其局部稳定性和分支进行了分析。

关键词

Holling IV功能反应，Allee效应，存在性，稳定性，Hopf分支

Global Dynamics in a Predator-Prey Model with Allee Effect

Tianjing Wang, Fuqin Sun

School of Sciences, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Jun. 17th, 2024; accepted: Jul. 11th, 2024; published: Jul. 19th, 2024

Abstract

In recent years, the dynamical analysis of predator-prey models has emerged as a significant topic, garnering extensive research attention from scholars worldwide. Through the study of the Allee effect, it has been observed that there is a positive correlation between a population's fitness and its growth density, among other factors. This paper constructs a predator-prey model incorporating the Allee effect and featuring the Holling type IV functional response from both mathematical and biological perspectives. The analysis of the model includes its boundedness, the properties of solutions, the existence of equilibrium points, as well as the local stability and Hopf bifurcation.

文章引用: 王恬静, 孙福芹. 一类基于 Allee 效应的捕食者–食饵模型的动力学研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3332-3340. DOI: 10.12677/aam.2024.137319

Keywords

Holling Type IV Functional Response, Allee Effect, Existence, Stability, Hopf Bifurcation

1. 模型的组成

近年来，关于捕食－食饵模型的动力学分析作为一个重要课题，吸引了许多学者的广泛研究。1932年，Allee 通过金鱼种群增长的实验研究中发现，金鱼密度较大时有利于金鱼种群的增长，提出当种群的密度减少到一定量时，将会保持在一个很低的水平并趋于灭绝，即 Allee 效应[1] [2]。Allee 效应主要分为两类，分别为弱 Allee 效应和强 Allee 效应[3]-[7]。人们普遍认为 Allee 效应可能会增加低密度种群的灭绝风险。因此，Allee 效应的种群生态学调查对保护生物学很重要。如果用 $x(t)$ 表示食饵种群的数量；$y(t)$ 表示捕食者种群的数量，食饵具有 Allee 效应的增长模型表示为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\frac{x}{k}\right)(x-v)$$

r 表示食饵的自然增长率，k 表示环境容纳量，v 是表示 Allee 效应的阈值总体水平，且 $0<v<k$。

此外学者们提出多种功能反应，其中 Holling 类型 I，II，III 被广泛讨论[8]-[10]。

Holling I：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}x, & 0<x<a\\ b, & x>a\end{cases}$$

Holling II：

$$f(x)=\frac{\alpha x}{\gamma+x}$$

Holling III：

$$f(x)=\frac{\alpha x^2}{\gamma+x^2}$$

在现实生活中，食饵种群大部分是有防御能力的，随着食饵种群数量的不断增加，其防御能力也会增强，对捕食者就会起到相对抑制的作用。因此，根据这类现象，Andrews 提出了 Holling IV 型功能性反应函数。

$$f(x,y)=\frac{mxy}{\alpha+\beta x+x^2}$$

最近几年，Cui 等[11]考虑了具有强 Allee 效应和的 Holling II 型功能反应函数的扩散捕食者－食饵系统。但是对于研究 Allee 效应和 Holling IV 功能反应的扩散捕食者－食饵模型比较少见。因此本文研究具有 Allee 效应的 Holling IV 功能反应的捕食者－食饵模型，具体模型为虑相互作用的物种食饵和捕食者的系统，$x(t)$ 为食饵种群的数量；$y(t)$ 为捕食者种群的数量。

2. 解的性质

首先我们证明解的正性。事实上，设

$$\varphi_1(x,y)=r\left(1-\frac{x}{k}\right)(x-v)-\frac{my}{\alpha+\beta x+x^2}，\quad \varphi_2(x,y)=\frac{emx}{\alpha+\beta x+x^2}-d$$

由模型(1.1)可得：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\varphi_1(x,y)，\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\varphi_2(x,y)$$

因此：

$$x(t)=x(0)\mathrm{e}^{\int_0^t\varphi_1(x(s),y(s))\mathrm{d}s}>0，\quad y(t)=y(0)\mathrm{e}^{\int_0^t\varphi_2(x(s),y(s))\mathrm{d}s}>0.$$

这意味着解是正的。

引理 2.2 若系统初值 $(x_0,y_0)\in R_+^2$，且满足初值条件的解都是有界的。

证：构造一个关于 x 和 y 的函数 $w(t)$：

$$w(t)=ex(t)+y(t)$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}&=er\left(1-\frac{x}{k}\right)(x-v)-dy\\&=ervx\left(1-\frac{x}{k}\right)\left(\frac{x}{v}-1\right)-dy\\&=-ervx-dy+\frac{er}{k}x^2(-x+k+v)\end{aligned}$$

令

$$\wp=\frac{er}{k}x^2(-x+k+v),$$

经过计算可得 $\wp$ 在 $x=(2k+2v)/3$ 处取得最大值 M，则可得到：

$$\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}\le M-ervx-dy\le M-\delta w$$

其中：

$$\delta=\min\{rv,d\}，\quad M=\frac{4}{27}\frac{ev}{k}(k+v)^3.$$

根据微分比较定理可得：

$$0\le w(x(t),y(t))\le\frac{\delta\left(1-\mathrm{e}^{-Mt}\right)}{M}+w(x(0),y(0))\mathrm{e}^{-Mt}$$

当 $t\to+\infty$，有 $0\le w(t)\le\delta/M$ 。

所以系统(1.1)的解是有界的。

3. 模型的动力学分析

本节先分析平衡点的存在性，再分析稳定性：

1) 显然系统存在平衡点 $E_0=(0,0)$；

2) 当 $x\neq 0, y=0$ 时，令

$$rx\left(1-\frac{x}{k}\right)(x-v)-\frac{mxy}{\alpha+\beta x+x^2}=0$$

可得：

$$rx\left(1-\frac{x}{k}\right)(x-v)=0$$

可得 $x=k$ 或 $x=v$，此时系统存在两个平衡点 $E_1=(k,0)$，$E_2=(v,0)$。

3) 当 $x\neq 0, y\neq 0$ 时，令

$$\frac{emxy}{\alpha+\beta x+x^2}-dy=0$$

可得：

$$x_i^*=\frac{em-\beta d\pm\sqrt{e^2m^2-2e\beta dm+\beta^2d^2-4d^2\alpha}}{2d}$$

再由

$$\frac{emxy}{\alpha+\beta x+x^2}-dy=0$$

可得：

$$\frac{mxy}{\alpha+\beta x+x^2}=\frac{dy}{e}$$

将其代入

$$rx\left(1-\frac{x}{k}\right)(x-v)-\frac{mxy}{\alpha+\beta x+x^2}=0$$

可得：

$$rx\left(1-\frac{x}{k}\right)(x-v)=\frac{dy}{e}$$

$$y_i^*=\frac{e}{d}rx_i^*\left(1-\frac{x_i^*}{k}\right)(x_i^*-v),\ i=1,2,$$

系统(1.1)的 Jacobian 矩阵为：

$$J=\begin{pmatrix} r\left(1-\frac{x}{k}\right)(x-v)-\frac{rx(x-v)}{k}+rx\left(1-\frac{x}{k}\right)+\frac{m(\alpha-x)^2y}{(\alpha+\beta x+x^2)^2} & -\frac{mx}{\alpha+\beta x+x^2} \\ \frac{em(\alpha-x)^2y}{(\alpha+\beta x+x^2)^2} & \frac{emx}{\alpha+\beta x+x^2}-d \end{pmatrix}$$

于是通过计算各平衡点对应的 Jacobian 矩阵来分析局部稳定性。

3.1. $E_0=(0,0)$ 的稳定性

设 J_0 是系统(1.1)在平衡点 E_0 处的 Jacobian 矩阵，所以：

$$J_0=\begin{pmatrix}-rv & 0\\ 0 & -d\end{pmatrix}$$

所以两特征根分别为 $\lambda_1=-rv,\lambda_2=-d$ ，系统在 E_0 是稳定的，否则系统(1.1)是不稳定的。

3.2. $E_1=\left(k,0\right)$ 的稳定性

设 J_1 是系统(1.1)在平衡点 E_1 处的 Jacobian 矩阵，所以

$$J_1=\begin{pmatrix}-r\left(k-v\right) & \dfrac{mk}{\alpha+\beta x+x^2}\\ 0 & \dfrac{emk}{\alpha+\beta k+k^2}-d\end{pmatrix}$$

所以两特征根分别为：

$$\lambda_1=-r\left(k-v\right),\lambda_2=\frac{emk}{\alpha+\beta k+k^2}-d\text{ ，}$$

如果

$$d>\frac{emk}{\alpha+\beta k+k^2}$$

系统在 E_1 是稳定的，否则系统(1.1)是不稳定的。

3.3. $E_2=\left(v,0\right)$ 的稳定性

设 J_2 是系统(1.1)在平衡点 E_2 处的 Jacobian 矩阵，所以

$$J_2=\begin{pmatrix}rv\left(1-\dfrac{v}{k}\right) & \dfrac{mv}{\alpha+\beta x+x^2}\\ 0 & \dfrac{mv}{\alpha+\beta v+v^2}-d\end{pmatrix}$$

所以两特征根分别为：

$$\lambda_1=rv\left(1-\frac{v}{k}\right),\lambda_2=\frac{emv}{\alpha+\beta v+v^2}-d$$

由于 λ_1 为正，所以根据 Routh-Hurwitz 的稳定性条件可得，E_2 是不稳定的。

3.4. $E_3=\left(x^*,y^*\right)$ 的稳定性

设 J_3 是系统(1.1)在平衡点 E_3 处的 Jacobian 矩阵，所以

$$J_3=\begin{pmatrix}r\left(1-\dfrac{x^*}{k}\right)\left(x^*-v\right)-\dfrac{rx^*(x^*-v)}{k}+rx^*\left(1-\dfrac{x^*}{k}\right)+\dfrac{m\left(\alpha-x^*\right)^2y^*}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2} & -\dfrac{mx^*}{\alpha+\beta x^*+x^{*2}}\\ \dfrac{em\left(\alpha-x^*\right)^2y^*}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2} & \dfrac{emx^*}{\alpha+\beta x^*+x^{*2}}-d\end{pmatrix}$$

当参数 H_1 满足条件：

$$r\left(1-\frac{x^*}{k}\right)\left(x^*-v\right)-\frac{rx^*\left(x^*-v\right)}{k}+rx^*\left(1-\frac{x^*}{k}\right)+\frac{m\left(\alpha-x^*\right)^2y^*}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2}<0$$

时，正平衡点 $E_{31}=\left(x_1^*,y_1^*\right)$ 是局部渐近稳定的。

设 $A=r\left(1-\frac{x_1^*}{k}\right)\left(x_1^*-v\right)-\frac{rx_1^*\left(x_1^*-v\right)}{k}+rx_1^*\left(1-\frac{x_1^*}{k}\right)+\frac{m\left(\alpha-x_1^*\right)^2 y_1^*}{\left(\alpha+\beta x_1^*+x_1^{*2}\right)^2}$

$$B=-\frac{mx_1^*}{\alpha+\beta x_1^*+x_1^{*2}}, \quad C=\frac{em\left(\alpha-x_1^*\right)^2 y_1^*}{\left(\alpha+\beta x_1^*+x_1^{*2}\right)^2}$$

$D=0$ 所以特征方程为 $\lambda^2-A\lambda+BC=0$。

所以根据根与系数的关系，可得方程的两个特征根 λ_1,λ_2 满足：

$$\lambda_1+\lambda_2=A, \lambda_1\lambda_2=BC=\frac{em^2\left(\alpha-x_1^*\right)^2 x_1^* y_1^*}{\left(\alpha+\beta x_1^*+x_1^{*2}\right)^3} \tag{1.2}$$

令

$$x_1^*=\frac{em-\beta d-\sqrt{e^2m^2-2e\beta dm+\beta^2d^2-4d^2\alpha}}{2d}$$
$$x_2^*=\frac{em-\beta d+\sqrt{e^2m^2-2e\beta dm+\beta^2d^2-4d^2\alpha}}{2d}$$

所以

$$\begin{aligned}\alpha-x_1^{*2}&=\alpha-\left[\frac{em-\beta d-\sqrt{e^2m^2-2e\beta dm+\beta^2d^2-4d^2\alpha}}{2d}\right]^2\\&=\alpha-\frac{\left(em-\beta d\right)^2+\left(e^2m^2-2e\beta dm+\beta^2d^2-4d^2\alpha\right)-2\left(em-\beta d\right)\sqrt{e^2m^2-2e\beta dm+\beta^2d^2-4d^2\alpha}}{2d}\\&=\frac{8\alpha d^2-2\left(em-\beta d\right)^2+2\left(em-\beta d\right)\sqrt{e^2m^2-2e\beta dm+\beta^2d^2-4d^2\alpha}}{4d^2}\\&=\frac{4\alpha d^2-\left(em-\beta d\right)^2+\left(em-\beta d\right)\sqrt{\left(em-\beta d\right)^2-4d^2\alpha}}{2d^2}>0\end{aligned}$$

因为

$$\left(em-\beta d\right)>\sqrt{\left(em-\beta d\right)^2-4d^2\alpha}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{4\alpha d^2-\left(em-\beta d\right)^2+\left(em-\beta d\right)\sqrt{e^2m^2-2e\beta dm+\beta^2d^2-4d^2\alpha}}{2d^2}\\&>\frac{4\alpha d^2-\left(em-\beta d\right)^2+\left(em-\beta d\right)^2-4\alpha d^2}{2d^2}=0\end{aligned}$$

所以 $\lambda_1\lambda_2>0$，因此若 $\lambda_1+\lambda_2<0$，两个特征根具有负实根，此时 $E_{31}=\left(x_1^*,y_1^*\right)$ 是局部渐近稳定的同理对于平衡点 $E_{32}=\left(x_2^*,y_2^*\right)$ 可得 $\lambda_1\lambda_2<0$ 所以不稳定。

3.5. Hopf 分支

由 3.4 可知，系统(1.1)正平衡点 $E_{31}=\left(x_1^*,y_1^*\right)$ 的局部稳定性需要满足一定的条件。因此，本小节主要

分析系统(1.1)在平衡点 $E_{31}=\left(x_1^*,y_1^*\right)$ 发生在 Hopf 分支的条件和 Hopf 分支的方向。

记 $\eta_1=\lambda_1+\lambda_2$， $\eta_2=\lambda_1\lambda_2$ 其中 λ_1 和 λ_2 是(1.2)中定义的，且 $\eta_2>0$ 选取捕食者自然死亡率 d 作为分支参数。如果存在 $d=d^*>0$，使得 H_2： $\eta_1\left(d^*\right)=0$， $\eta_{12}\left(d^*\right)<0$， $2\eta_{12}\eta_2+\eta_1\eta_{21}\neq 0$ 成立，其中 η_{12} η_{21} 表示对 d 的求导。

假设条件 H_2 成立，当 $d=d^*$，系统会在正平衡点 $E_{31}=\left(x_1^*,y_1^*\right)$ 处发生 Hopf 分支。

证：因为正平衡点 E_{31} 处的 Jacobian 矩阵对应的特征方程如下：

$$\lambda^2-\eta_1\lambda+\eta_2=0 \tag{1.3}$$

当 $d=d^*$ 时，即 $\eta_1=0$ 特征方程可以为：

$$\lambda^2+\eta_2=0$$

此时方程会出现一对纯虚根为：

$$\lambda_1=i\sqrt{\eta_2}\text{，}\quad \lambda_2=-i\sqrt{\eta_2}$$

现在验证横截条件，对特征方程(1.3)关于 d 进行求导，有：

$$2\lambda\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}-\lambda\eta_{12}-\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}\eta_1+\eta_{21}=0$$

整理可得：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}=\frac{\lambda\eta_{12}-\eta_{21}}{2\lambda-\eta_1}$$

则有：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}=\frac{2\lambda\eta_{12}\eta_2-\eta_1\eta_{21}}{4\eta_2+\eta_1^2}+i\frac{2\eta_{21}\sqrt{\eta_2}-\eta_1\sqrt{\eta_2}\eta_{21}}{4\eta_2+\eta_1^2}\text{ 当 }\lambda=i\sqrt{\eta_2}$$

因此此时系统(1.1)会在正平衡点 $E_{31}=\left(x_1^*,y_1^*\right)$ 处发生 Hopf 分支。

下面通过计算第一系数 Lyapunov 系数来分析 Hopf 分支的方向。

首先做线性替换所以令 $u=x-x^*$， $v=y-y^*$ 对系统(1.1)泰勒展开可得：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=a_{10}u+a_{01}v+a_{11}uv+a_{20}u^2+a_{02}v^2+a_{30}u^3+a_{21}v^3+a_{12}u^2v+a_{03}uv^2+P(u,v)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=b_{10}u+b_{01}v+b_{11}uv+b_{20}u^2+b_{02}v^2+b_{30}u^3+b_{21}v^3+b_{12}u^2v+b_{03}uv^2+Q(u,v)$$

$$a_{10}=r\left(1-\frac{x^*}{k}\right)\left(x^*-v\right)-\frac{rx^*\left(x^*-v\right)}{k}+rx^*\left(1-\frac{x^*}{k}\right)+\frac{m\left(\alpha-x^*\right)^2y^*}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2}$$

$$a_{01}=-\frac{mx^*}{\alpha+\beta x^*+x^{*2}}\text{，}\quad a_{11}=\frac{m\left(\alpha-x^{*2}\right)}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2}$$

$$a_{20}=-\frac{r\left(x^*-v\right)}{k}+r\left(1-\frac{x^*}{k}\right)-\frac{rx^*}{k}-\frac{m\left(\alpha-x^*\right)y^*}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2}-\frac{m\left(\beta+2x^*\right)\left(\alpha-x^{*2}\right)y^*}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2}\text{，}\quad a_{02}=0$$

$$a_{30}=-\frac{r}{k}+\frac{my^*}{3\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2}+\frac{2m\left(\beta+2x^*\right)\left(\alpha-x^{*2}\right)y^*}{3\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^3}-\frac{2m\left(\alpha-x^{*2}\right)y^*}{3\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^3}$$
$$+\frac{2m\left(\beta+2x^*\right)x^*y^*}{3\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^3}+\frac{m\left(\beta+2x^*\right)^2\left(\alpha-x^{*2}\right)y^*}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^4}$$

$$a_{03}=0，\quad a_{21}=-\frac{m\left(\alpha-x^*\right)}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2}+\frac{m\left(\beta+2x^*\right)\left(\alpha-x^{*2}\right)}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^3}，\quad a_{12}=0$$

$$b_{10}=\frac{em\left(\alpha-x^*\right)^2y^*}{\left(\alpha+\beta x^*+x^{*2}\right)^2}=ey^*a_{11}，\quad b_{01}=0，\quad b_{11}=ea_{11}，\quad b_{20}=ey^*a_{21}，\quad b_{02}=0，$$

$$b_{30}=e\left(\frac{r}{k}+a_{30}\right)，\quad b_{03}=0，\quad b_{21}=ea_{21}，\quad b_{12}=0$$

$$P(u,v)=\sum_{i+j=4}^{+\infty}a_{ij}u^iv^j，\quad Q(u,v)=\sum_{i+j=4}^{+\infty}b_{ij}u^iv^j$$

则由第一 Lyapunov 系数 σ 计算可得：

$$\sigma=-\frac{3\pi}{2a_{01}\Delta^{\frac{3}{2}}}\Big\{\Big[a_{10}b_{10}\left(a_{11}b_{02}+a_{02}b_{11}+a_{11}^2\right)+a_{10}a_{01}\left(a_{20}b_{11}+a_{11}b_{02}+b_{11}^2\right)+b_{10}^2\left(a_{11}a_{02}+2a_{02}b_{02}\right)$$
$$-2a_{10}b_{10}\left(b_{02}^2-a_{20}a_{02}\right)-2a_{10}a_{01}\left(a_{20}^2-b_{20}b_{02}\right)-a_{01}^2\left(2a_{20}b_{20}+b_{11}b_{20}\right)+\left(a_{10}b_{01}-2a_{10}^2\right)\left(b_{11}b_{02}-a_{11}a_{20}\right)\Big]$$
$$-\left(a_{10}^2+a_{01}b_{10}\right)\left[3\left(b_{10}b_{03}-a_{01}a_{30}\right)+2a_{10}\left(a_{21}+b_{12}\right)+\left(b_{10}a_{21}-a_{01}b_{21}\right)\right]\Big\}$$

其中 $\Delta=a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10}$。

若 $\sigma>0$ 时：$E_{31}=\left(x_1^*,y_1^*\right)$ 产生次临界 Hopf 分支；

当 $\sigma<0$ 时：$E_{31}=\left(x_1^*,y_1^*\right)$ 产生超临界 Hopf 分支。

4. 结语

本文研究了具有 Allee 效应和具有 Holling IV 功能反应的捕食者－食饵模型。对其有界性、解的性质、平衡点的存在性以及其局部稳定性和分支进行了分析。通过构造函数得出了解的有界性。最后对模型线性化处理，通过计算 Lyapunov 系数来分析 Hopf 分支的方向。

参考文献

[1] Allee, W.C. and Bowen, E.S. (1932) Studies in Animal Aggregations: Mass Protection against Colloidal Silver among Goldfishes. *Journal of Experimental Zoology*, **61**, 185-207. https://doi.org/10.1002/jez.1400610202

[2] Allee, W.C. (1931). Animal Aggregations, a Study in General Sociology. The University of Chicago Press. https://doi.org/10.5962/bhl.title.7313

[3] van Voorn, G.A.K., Hemerik, L., Boer, M.P. and Kooi, B.W. (2007) Heteroclinic Orbits Indicate Overexploitation in Predator-Prey Systems with a Strong Allee Effect. *Mathematical Biosciences*, **209**, 451-469. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2007.02.006

[4] Wang, J., Shi, J. and Wei, J. (2010) Predator–Prey System with Strong Allee Effect in Prey. *Journal of Mathematical Biology*, **62**, 291-331. https://doi.org/10.1007/s00285-010-0332-1

[5] Wang, M. and Kot, M. (2001) Speeds of Invasion in a Model with Strong or Weak Allee Effects. *Mathematical Biosciences*, **171**, 83-97. https://doi.org/10.1016/s0025-5564(01)00048-7

[6] Keitt, T.H., Lewis, M.A. and Holt, R.D. (2001) Allee Effects, Invasion Pinning, and Species' Borders. *The American Naturalist*, **157**, 203-216. https://doi.org/10.1086/318633

[7] Lewis, M.A. and Kareiva, P. (1993) Allee Dynamics and the Spread of Invading Organisms. *Theoretical Population Biology*, **43**, 141-158. https://doi.org/10.1006/tpbi.1993.1007

[8] Zhang, S. and Chen, L. (2005) A Holling II Functional Response Food Chain Model with Impulsive Perturbations. *Chaos, Solitons & Fractals*, **24**, 1269-1278. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.09.051

[9] Liu, X. and Chen, L. (2003) Complex Dynamics of Holling Type II Lotka-Volterra Predator-Prey System with Impulsive Perturbations on the Predator. *Chaos, Solitons & Fractals*, **16**, 311-320. https://doi.org/10.1016/s0960-0779(02)00408-3

[10] Sarwardi, S., Haque, M. and Venturino, E. (2010) Global stability and Persistence in LG-Holling Type II Diseased Predator Ecosystems. *Journal of Biological Physics*, **37**, 91-106.

[11] Cui, R., Shi, J. and Wu, B. (2014) Strong Allee Effect in a Diffusive Predator-Prey System with a Protection Zone. *Journal of Differential Equations*, **256**, 108-129. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.08.015