

一类具有随机扰动的SEIR传染病随机模型的稳定性分析

黄毅, 廖新元*

南华大学数理学院, 湖南 衡阳

收稿日期: 2024年6月19日; 录用日期: 2024年7月13日; 发布日期: 2024年7月23日

摘要

本文提出了一类非线性微分方程组成的SEIR传染病随机模型, 该模型考虑了系统受到的白噪声随机扰动的影响, 并且假定扰动与系统偏离平衡点的程度成正比。应用线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequalities, LMI)等方法, 结合MATLAB找到符合矩阵不等式的矩阵, 验证了平衡点的概率稳定性, 并进行数值模拟验证结果。

关键词

传染病模型, 随机扰动, 概率稳定性, 数值仿真

Stability Analysis of a Stochastic SEIR Epidemic Model with Random Perturbations

Yi Huang, Xinyuan Liao*

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan

Received: Jun. 19th, 2024; accepted: Jul. 13th, 2024; published: Jul. 23rd, 2024

Abstract

We propose a stochastic SEIR epidemic model composed of a set of nonlinear differential equations. This model takes into account the effect of white noise stochastic perturbations on the system, and it is assumed that the perturbations are proportional to the degree of deviation of the system from the equilibrium point. By applying the Linear Matrix Inequality (LMI) method and using MATLAB to find matrices that satisfy the matrix inequalities, we verify the probabilistic stability of the equilibrium point and conduct numerical simulations to validate the results.

*通讯作者。

Keywords

Epidemic Model, Stochastic Perturbations, Probabilistic Stability, Numerical Simulation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

前几年新冠病毒在全球流行, 传染病模型研究受到了前所未有的关注[1]-[3]。传染病传播过程中有着很多随机波动[4] [5], 如环境变化、个体行动的随机性以及病原体自身的变异进化。这些因素使得传染病传播过程中存在随机性, 而确定性模型无法充分体现这种特性, 所以考虑随机扰动下的传染病模型可以更真实地接近现实情况。Malen [6]提出了一种考虑新生儿疫苗接种率的 SEIR 模型:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = (1-q)A - (\beta I(t) + \mu)S(t), \\ \dot{E}(t) = \beta S(t)I(t) - (\mu + \sigma)E(t), \\ \dot{I}(t) = \sigma E(t) - (\mu + \gamma + \alpha)I(t), \\ \dot{R}(t) = qA + \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $S(t)$ 、 $E(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 分别代表易感者比例、暴露者比例、感染者比例、康复者比例, β 、 μ 、 σ 、 γ 、 α 、 A 、 q 分别代表传染率、自然死亡率、潜伏期的倒数、康复率、感染导致的死亡率、出生率、接种疫苗新生儿的比例, 式中所有参数都是正的。事实上, 在病毒传播过程中, 有着许多不可预测的因素比如天气的变化、人群活动的随机性等。本文中我们考虑系统(1)受到随机扰动, 提出了一类非线性微分方程组成的 SEIR 传染病随机模型, 应用线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequalities, LMI)等方法, 结合 MATLAB 找到符合矩阵不等式的矩阵, 得到了随机系统平衡点的概率稳定性。

2. 平衡点

系统(1)中存在两个平衡点, 分别是无病平衡点和地方性平衡点, 根据平衡点的定义导出了相应的代数方程:

$$\begin{cases} (1-q)A - (\beta I(t) + \mu)S = 0, \\ \beta SI - (\mu + \sigma)E = 0, \\ \sigma E - (\mu + \gamma + \alpha)I = 0, \\ qA + \gamma I - \mu R = 0. \end{cases} \quad (2)$$

根据(2)可以得到系统的无病平衡点处 $E_0^* = (S_0^*, E_0^*, I_0^*, R_0^*)$, 其中:

$$E_0^* = I_0^* = 0, S_0^* = (1-q)\frac{A}{\mu}, R_0^* = q\frac{A}{\mu}.$$

系统的地方性平衡点处 $E_+^* = (S_+^*, E_+^*, I_+^*, R_+^*)$, 其中:

$$S_+^* = \frac{(\mu + \sigma)(\mu + \gamma + \alpha)}{\beta\sigma}, \quad E_+^* = \frac{(1-q)A}{\mu + \sigma} - \frac{\mu(\mu + \gamma + \alpha)}{\beta\sigma},$$

$$I_+^* = \frac{(1-q)\sigma A}{(\mu + \sigma)(\mu + \gamma + \alpha)} - \frac{\mu}{\beta}, \quad R_+^* = \frac{A}{\mu} \left(\frac{(1-q)\gamma\sigma}{(\mu + \sigma)(\mu + \gamma + \alpha)} + q \right) - \frac{\gamma}{\beta}.$$

3. 线性化

设 (Ω, F, P) 是完备概率空间, $\{F_t, t \geq 0\}$ 为 F 的非递减子 σ -代数族, $F_{t_1} \subseteq F_{t_2} \subseteq F, t_1 < t_2$, E 为对于测度 P 的数学期望。病毒在传播过程中, 会受到多种随机因素的影响, 为了使模型更加符合实际传播情况, 我们假设系统暴露在白噪声类型的随机扰动下, 该扰动是系统与平衡点偏离程度成正比的随机扰动 [7], 当系统状态 $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ 与平衡点偏离程度增大, 随机扰动也随之增大; $w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t)$ 是标准维纳过程。因此我们提出了随机扰动下的系统:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= (1-q)A - (\beta I(t) + \mu)S(t) + \sigma_1(S(t) - S^*)\dot{w}_1(t), \\ \dot{E}(t) &= \beta S(t)I(t) - (\mu + \sigma)E(t) + \sigma_2(E(t) - E^*)\dot{w}_2(t), \\ \dot{I}(t) &= \sigma E(t) - (\mu + \gamma + \alpha)I(t) + \sigma_3(I(t) - I^*)\dot{w}_3(t), \\ \dot{R}(t) &= qA + \gamma I(t) - \mu R(t) + \sigma_4(R(t) - R^*)\dot{w}_4(t). \end{aligned} \tag{3}$$

下面我们对随机微分方程进行平移变换, 令

$$S(t) = y_1(t) + S^*, E(t) = y_2(t) + E^*, I(t) = y_3(t) + I^*, R(t) = y_4(t) + R^*.$$

由(3)可得:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= (1-q)A - (y_1(t) + S^*)[\beta(y_3(t) + I^*) + \mu] + \sigma_1 y_1(t) \dot{w}_1(t), \\ \dot{y}_2(t) &= \beta(y_1(t) + S^*)(y_3(t) + I^*) - (\mu + \sigma)(y_2(t) + E^*) + \sigma_2 y_2(t) \dot{w}_2(t), \\ \dot{y}_3(t) &= \sigma(y_2(t) + E^*) - (\mu + \gamma + \alpha)(y_3(t) + I^*) + \sigma_3 y_3(t) \dot{w}_3(t), \\ \dot{y}_4(t) &= qA + \gamma(y_3(t) + I^*) - \mu(y_4(t) + R^*) + \sigma_4 y_4(t) \dot{w}_4(t). \end{aligned} \tag{4}$$

易见系统(4)零点的稳定性等价于系统(3)平衡点 $E^* = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ 的稳定性。系统(4)是高于二阶的非线性方程, 结合平衡点进行线性化得到:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -(\beta I^* + \mu)z_1(t) - \beta S^* z_3(t) + \sigma_1 z_1(t) \dot{w}_1(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \beta I^* z_1(t) - (\mu + \sigma)z_2(t) + \beta S^* z_3(t) + \sigma_2 z_2(t) \dot{w}_2(t), \\ \dot{z}_3(t) &= \sigma z_2(t) - (\mu + \gamma + \alpha)z_3(t) + \sigma_3 z_3(t) \dot{w}_3(t), \\ \dot{z}_4(t) &= \gamma z_3(t) - \mu z_4(t) + \sigma_4 z_4(t) \dot{w}_4(t). \end{aligned} \tag{5}$$

由 Ito 随机微分方程理论可以把系统(5)写成矩阵形式:

$$dz(t) = Bz(t)dt + C(z(t))dw(t),$$

其中

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t))^T, w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t))^T, C(z(t)) = \text{diag}(\sigma_1 z_1(t), \dots, \sigma_4 z_4(t)),$$

$$B = \begin{bmatrix} -(\beta I^* + \mu) & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & -(\mu + \sigma) & \beta S^* & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}.$$

注 1 [8] 对于非线性阶数大于 1 的系统, 线性部分零解渐近均方稳定的充分条件可以证明非线性系统的零解依概率稳定。对于系统(5), 如果得到零解渐近均方稳定的充分条件, 那么在这个条件下, 系统(4)的零解是依概率稳定的, 系统(3)在平衡点处也是依概率稳定的。

4. 平衡点的概率稳定性

定义 1 如果对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得系统的 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))'$ 满足 $P(|y(0)| < \delta) = 1$ 时, 有 $P\left(\sup_{t \geq 0} |y(t)| > \varepsilon_1\right) < \varepsilon_2$, 系统(4)的零解是依概率稳定的。

定义 2 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $E|z(0)|^2 < \delta$ 时, 有 $E|z(t)|^2 < \varepsilon (t \geq 0)$, 则系统(5)是均方稳定的。

定义 3 在系统均方稳定的条件下, 当 $E|z(0)|^2 < \infty$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} E|z(t)|^2 = 0$, 则系统(5)是渐近均方稳定的。

引理 1 [9] 若存在 $V(t, z(t))$ 是二次可微分函数, 有正数 c_1, c_2, c_3 下面条件成立:

$$EV(t, z(t)) \geq c_1 |Ez(t)|^2, EV(0, z(0)) \leq c_2 |Ez(0)|^2, ELV(t, z(t)) \leq -c_3 |Ez(t)|^2,$$

系统(5)是渐近均方稳定的。

根据 Ito 公式[10]定义 $V(t, z(t))$ 的扩散算子:

$$LV(t, z(t)) = V_t(t, z(t)) + \nabla V'(t, z(t))Az(t) + \frac{1}{2} \text{Tr}[\nabla^2 V(t, z(t))C(z(t))C'(z(t))].$$

定理: 如果存在一个正定矩阵 P , 满足下面的线性不等式:

$$PB + B^T P + P_\sigma < 0 \quad (P_\sigma = \text{diag}\{p_{11}\sigma_1^2, \dots, p_{44}\sigma_3^2\}),$$

则系统(3)在平衡点 (S^*, E^*, I^*, R^*) 上是依概率稳定的。

证明: 对于 $V(t, z(t)) = z^T(t)Pz(t)$, 因为 P 是正定矩阵, 由引理 1 可知前面两个不等式满足, 对于第三个, 我们考虑:

$$\begin{aligned} LV(t, z(t)) &= 2z^T(t)PAz(t) + \text{Tr}[C(z(t))PC^T(z(t))] \\ &= z^T(t)(PB + B^T P + P_\sigma)z(t) \leq -c|z(t)|^2 \end{aligned}$$

引理 1 的条件满足, 得到了系统(5)渐近均方稳定的充分条件, 根据注 1 可以得到系统(3)在平衡点 (S^*, E^*, I^*, R^*) 上依概率稳定, 所以定理得证。

由于满足 LMI 条件可以得到渐近均方稳定性, 而对于系统(5)而言, 那么它的系数矩阵必须是 Hurwitz 矩阵, 而 Hurwitz 矩阵必须满足[11]:

$$T_1 < 0, T_1 T_2 < 0, 0 < T_1^2 T_4 < (T_1 T_2 - T_3) T_3, \text{ 其中:}$$

$$T_K = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{bmatrix}$$

下面我们根据 Hurwitz 矩阵的性质用代数方法, 先对系统的两个平衡点进行分析, 得到一些稳定性的必要条件:

1) $E_0^* = (S_0^*, E_0^*, I_0^*, R_0^*)$

对于无病平衡点 $E_0^* = I_0^* = 0, S_0^* = (1-q)\frac{A}{\mu}, R_0^* = q\frac{A}{\mu}$, 有:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -\mu z_1(t) - (1-q)\frac{AB}{\mu} z_3(t) + \sigma_1 z_1(t) \dot{w}_1(t), \\ \dot{z}_2(t) &= -(\mu + \sigma) z_2(t) + (1-q)\frac{AB}{\mu} z_3(t) + \sigma_2 z_2(t) \dot{w}_2(t), \\ \dot{z}_3(t) &= \sigma z_2(t) - (\mu + \gamma + \alpha) z_3(t) + \sigma_3 z_3(t) \dot{w}_3(t), \\ \dot{z}_4(t) &= \gamma z_3(t) - \mu z_4(t) + \sigma_4 z_4(t) \dot{w}_4(t). \end{aligned}$$

可以用矩阵表示 $dz(t) = Bz(t)dt + C(z(t))dw(t)$, 其中:

$$B = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -(1-q)\frac{AB}{\mu} & 0 \\ 0 & -(\mu + \sigma) & (1-q)\frac{AB}{\mu} & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}.$$

矩阵 B 是 Hurwitz 矩阵, 所以有:

$$\begin{aligned} T_1 &= -(4\mu + \gamma + \alpha) < 0, \\ T_2 &= (\mu + \sigma)(3\mu + \gamma + \alpha) + 2\mu(\mu + \gamma + \alpha) - (1-q)\frac{A\beta\sigma}{\mu} > 0, \\ T_3 &= -\mu(3\mu + 2\sigma)(\mu + \gamma + \alpha) - \mu^2(\mu + \sigma) + 2(1-q)A\beta\sigma < 0, \\ T_4 &= \mu^2(\mu + \sigma)(\mu + \gamma + \alpha) - (1-q)A\beta\sigma\mu > 0. \end{aligned}$$

我们考虑 $S(0) = 0.99, I(0) = 0.01, E(0) = R(0) = 0, \mu = 0.01, \sigma = 0.2, \gamma = 0.01, \alpha = 0.01, A = 0.01, \beta = 0.1, \sigma_1 = 0.11, \sigma_2 = 0.07, \sigma_3 = 0.09, \sigma_4 = 0.12, q = 0.3$ 满足 $T_1 < 0, T_1 T_2 < 0, 0 < T_1^2 T_4 < (T_1 T_2 - T_3) T_3$, 又通过 MATLAB 计算这些参数也满足 (Linear Matrix Inequalities, LMI) 条件, 存在正定矩阵 P 使得 $PB + B^T P + P_\sigma < 0$, 满足系统(3)在平衡点概率稳定的条件, 系统解的 50 个轨迹如图 1 所示。

2) $E_+^* = (S_+^*, E_+^*, I_+^*, R_+^*)$

对于地方平衡点 $(S_+^*, E_+^*, I_+^*, R_+^*)$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -(\beta I_+^* + \mu) z_1(t) - \beta S_+^* z_3(t) + \sigma_1 z_1(t) \dot{w}_1(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \beta I_+^* z_1(t) - (\mu + \sigma) z_2(t) + \beta S_+^* z_3(t) + \sigma_2 z_2(t) \dot{w}_2(t), \\ \dot{z}_3(t) &= \sigma z_2(t) - (\mu + \gamma + \alpha) z_3(t) + \sigma_3 z_3(t) \dot{w}_3(t), \\ \dot{z}_4(t) &= \gamma z_3(t) - \mu z_4(t) + \sigma_4 z_4(t) \dot{w}_4(t). \end{aligned}$$

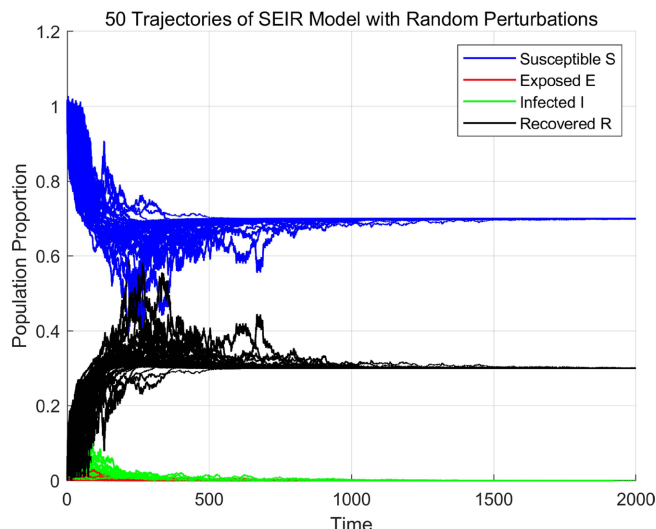


Figure 1. Disease-Free equilibrium trajectory

图 1. 无病平衡点轨迹

可以用矩阵表示 $dz(t) = Bz(t)dt + C(z(t))dw(t)$, 其中:

$$B = \begin{bmatrix} -(\beta I^* + \mu) & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & -(\mu + \sigma) & \beta S^* & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + \gamma + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}.$$

矩阵 B 是 Hurwitz 矩阵, 所以有:

$$T_1 = -(\beta I^* + 4\mu + \sigma + \gamma + \alpha) < 0,$$

$$T_2 = (\beta I^* + \mu)(3\mu + \sigma + \gamma + \alpha) + (2\mu + \sigma)(\mu + \gamma + \alpha) + \mu(\mu + \sigma) - \sigma\beta S^* > 0,$$

$$T_3 = -(\beta I^* + \mu)[(2\mu + \sigma)(\mu + \gamma + \alpha) + \mu(\mu + \sigma) - \sigma\beta S^*] - \mu(\mu + \sigma)(\mu + \gamma + \alpha) + \sigma\beta S^*(\mu - \beta I^*) < 0,$$

$$T_4 = \mu(\beta I^* + \mu)[(\mu + \sigma)(\mu + \gamma + \alpha) - \sigma\beta S^*] + \mu\sigma\beta^2 S^* I^* > 0.$$

我们考虑 $S(0) = 0.99$, $I(0) = 0.01$, $E(0) = R(0) = 0$, $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.2$, $\gamma = 0.01$, $\alpha = 0.01$, $A = 0.01$, $\beta = 0.1$, $\sigma_1 = 0.11$, $\sigma_2 = 0.17$, $\sigma_3 = 0.09$, $\sigma_4 = 0.11$, $q = 0$ (考虑对新生儿没有进行育苗接种) 满足 $T_1 < 0, T_1 T_2 < 0, 0 < T_1^2 T_4 < (T_1 T_2 - T_3) T_3$, 又通过 MATLAB 计算这些参数也满足 (Linear Matrix Inequalities, LMI) 条件, 存在正定矩阵 P 使得 $PB + B^T P + P_c < 0$, 满足系统 (3) 在平衡点概率稳定的条件, 系统解的 50 个轨迹如图 2 所示。

图 1、图 2 对比可以看出对新生儿进行疫苗接种可以有效抑制传染病的传播。图 1 中传染病在疫苗接种的情况下考虑随机扰动, 在满足 (Linear Matrix Inequalities, LMI) 条件下, 传染病经过一段时间传播后收敛到无病平衡点, 通过多个轨迹模拟, 验证了传染病模型在无病平衡点处的概率稳定性。图 2 考虑同类型传染病在没有对新生儿进行疫苗接种情况下的传播轨迹, 在满足 (Linear Matrix Inequalities, LMI) 条件下, 传染病经过一段时间传播后收敛到地方性平衡点, 通过多个轨迹模拟, 验证了传染病模型在地方性平衡点处的概率稳定性。图 1、图 2 表明通过 (Linear Matrix Inequalities, LMI) 方法得到平衡态概率稳定条件是可靠的, 这种方法还可以用于更加一般的随机微分方程平衡点概率稳定性的研究。

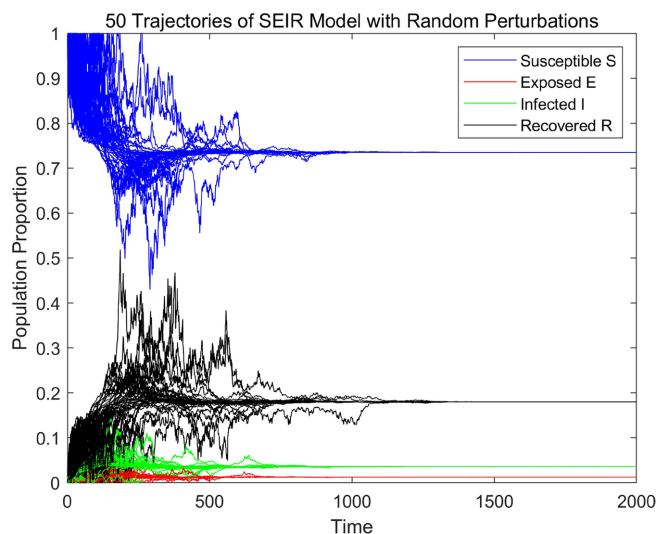


Figure 2. Local equilibrium point trajectory

图 2. 地方性平衡点轨迹

5. 结论

本文提出一类随机扰动下的 SEIR 传染病模型, 假设随机扰动与系统偏离平衡点程度成正比。在平衡点通过对系统进行线性化, 利用引理 1 结合线性矩阵不等式方法得到系统(5)渐近均方稳定的充分条件, 从而得到系统(3)平衡点概率稳定的充分条件。通过进行数值模拟, 验证了结论的正确性。

参考文献

- [1] He, S., Peng, Y. and Sun, K. (2020) SEIR Modeling of the COVID-19 and Its Dynamics. *Nonlinear Dynamics*, **101**, 1667-1680. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05743-y>
- [2] Carcione, J.M., Santos, J.E., Bagaini, C. and Ba, J. (2020) A Simulation of a COVID-19 Epidemic Based on a Deterministic SEIR Model. *Frontiers in Public Health*, **8**, Article 230. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2020.00230>
- [3] Yang, Z., Zeng, Z., Wang, K., Wong, S., Liang, W., Zanin, M., et al. (2020) Modified SEIR and AI Prediction of the Epidemics Trend of COVID-19 in China under Public Health Interventions. *Journal of Thoracic Disease*, **12**, 165-174. <https://doi.org/10.21037/jtd.2020.02.64>
- [4] Liu, W. (2013) A SIRS Epidemic Model Incorporating Media Coverage with Random Perturbation. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article 792308. <https://doi.org/10.1155/2013/792308>
- [5] Yang, Q. and Mao, X. (2014) Stochastic Dynamics of SIRS Epidemic Models With random Perturbation. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **11**, 1003-1025. <https://doi.org/10.3934/mbe.2014.11.1003>
- [6] Etxeberria-Etxaniz, M., Alonso-Quesada, S. and De la Sen, M. (2020) On an SEIR Epidemic Model with Vaccination of Newborns and Periodic Impulsive Vaccination with Eventual on-Line Adapted Vaccination Strategies to the Varying Levels of the Susceptible Subpopulation. *Applied Sciences*, **10**, Article 8296. <https://doi.org/10.3390/app10228296>
- [7] Shi, Y., Wen, J. and Xiong, J. (2020) Backward Doubly Stochastic Volterra Integral Equations and Their Applications. *Journal of Differential Equations*, **269**, 6492-6528. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.05.006>
- [8] Shaikhet, L. (2020) Stability of Equilibria of Rumor Spreading Model under Stochastic Perturbations. *Axioms*, **9**, Article 24. <https://doi.org/10.3390/axioms9010024>
- [9] Shaikhet, L. (2013) Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations. Springer Science & Business Media.
- [10] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [11] Hale, J.K. (2009) Ordinary Differential Equations. Courier Corporation.