Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(7), 3456-3466**
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.137331

Hans汉斯

孪生素数分布原理

刘　丹，石勇国

内江师范学院数学与信息科学学院　四川　内江

收稿日期：2024年6月23日；录用日期：2024年7月16日；发布日期：2024年7月24日

摘　要

孪生素数分布问题，通常是用传统的筛法研究。我们提出对应素数的初等方法。包括整数的对应素数，合数的对应素数，还有素数的对应素数，即孪生素数。我们研究了整数，合数与素数对应素数的分布规律，由此，证明了孪生素数分布原理。运用孪生素数分布原理，并且参照素数定理的传统证明方法，证明了合数对应素数上限。对应素数初等方法，为研究孪生素数分布提供了新的途径。

关键词

合数，对应素数，孪生素数分布原理，合数对应素数上限

The Principle of Twin Prime Distribution

Dan Liu, Yongguo Shi

School of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang Sichuan

Received: Jun. 23rd, 2024; accepted: Jul. 16th, 2024; published: Jul. 24th, 2024

Abstract

The distribution of twin prime numbers is usually studied using traditional screening methods. We propose a research method for corresponding prime numbers. This includes the corresponding prime numbers of integers, the corresponding prime numbers of composite numbers, and the corresponding prime numbers of prime numbers, namely twin prime numbers. We studied the distribution law of prime numbers corresponding to integers, composite numbers, and prime numbers, and thus proved the principle of twin prime number distribution. By applying the principle of twin prime number distribution and referring to the proof method of prime number theorem, the upper limit of prime numbers corresponding to composite numbers has been proved. The research method of corresponding prime numbers provides a new approach for studying the distribution of twin prime numbers.

文章引用: 刘丹, 石勇国. 孪生素数分布原理[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3456-3466.
DOI: 10.12677/aam.2024.137331

Keywords

Prime Numbers, Composite Number, Corresponding Prime Numbers, The Principle of Twin Prime Distribution, Composite Numbers Correspond to the Upper Limit of Prime Numbers

1. 引言

孪生素数就是距离 2 的两个素数

(3, 5)，(5, 7)，(11, 13)，(59, 61)，

这样的素数有无穷多个，称为孪生素数猜想[1]-[4]。孪生素数猜想，就是要证明

有无穷多个素数 p，其 $p+2$ 为素数。

张益唐，2013 年，用“筛法”证明

$p+n$，偶数 $n \le 70{,}000{,}000$，有无穷多个素数。

陶哲轩，2014 年，改进“筛法”证明

$p+n$，偶数 $n \le 246$，有无穷多个素数。

陶哲轩，2022 年，提到用新的方法证明

$p+n$，偶数 $n \le 6$，有无穷多个素数。接近孪生素数猜想。但未认同这个方法。

陈氏定理，1973 年，证明

有无穷多个素数 p，其 $p+2$ 是素数，或 2 个素数的乘积。称为光辉顶点。

我们提出对应素数的初等方法，研究孪生素数猜想。

我们来看数学家对素数定理初等证明的评价：

“要发现巧妙而有用的初等证明需要天才和机智，这比发现深奥的证明要困难得多。素数定理确实是一个非常困难的问题，因为对素数的研究除了其定义和算术基本定理外，几乎是一无所知。可能正是由于这些原因，使得素数定理的初等证明是如此难以发现。

正因为如此，Selberg 和 Erdös 的工作在数论中占有重要地位。”

参阅：潘成洞，潘成彪。素数定理的初等证明[M]。上海科学技术出版社。1988 年第 20 页。

定义：

设 k 为整数，则 $k+2$ 称为 k 的对应数。若 $k+2$ 为素数，则 $k+2$ 称为 k 的对应素数。

设 k 不小于 0，与 $k+2 \le x$，整数 k 包括蓝色的数，不是素数，几乎是合数。红色的数，称为素数。

k____ 0........1.........2........3........4........5........6.......7.......8........9........10........11........12........13........14 $\cdots$ $x-2$，

$k+2$_2........3.........4........5.......6.......7........8.......9......10.....11...... 12........13.......14........15........16 $\cdots$ x，

我们来看 k 的对应数：

在 k 里，所有的整数，对应 $k+2$ 里的整数有

2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，15，16 $\cdots$ x，

再来看 k 的对应素数：

在 k 里，所有的整数，对应 $k+2$ 里的素数有 2，3，5，7，11，13，$\cdots p$，其个数记为 $\pi(x)$，
在 k 里，所有蓝色的数，对应 $k+2$ 里的素数有 2，3，11，$\cdots p$，其个数记为 $c(x)$，
在 k 里，所有红色的数，对应 $k+2$ 里的素数有 5，7，13，$\cdots p$，其个数记为 $L(x)$。
本篇，我们证明：

$$\pi(x)=c(x)+L(x), \tag{1.1}$$

(1.1)称为孪生素数分布原理。

例如

x	$\pi(x)$	$c(x)$	$L(x)$
10^4	1229	1024	205
10^{15}	29844570422669	28667361180365	1177209242304

基于孪生素数分布原理，我们得到：

$$\frac{x^2\pi(x)-\pi(x)^3}{x^2}>c(x),\quad (x\to+\infty), \tag{1.2}$$

(1.2)为合数对应素数上限。

2. 孪生素数分布原理

我们详细证明孪生素数分布原理。

证明

设 k 不小于 0，与 $k+2\le 16$，整数 k 包括蓝色的数，不是素数，几乎是合数。红色的数，称为素数。
整数 k 对应 $k+2$ 里的素数：

k_____0........1.........2........3........4........5........6.......7.......8........9........10........11........12........13........14，
$k+2$__2........3.........4........5........6........7........8.......9......10......11.......12........13........14........15........16，

所有的整数 k，对应 $k+2$ 里的素数有：
2，3，5，7，11，13，
素数的个数记为 $\pi(16)=6$，
我们来看蓝数 c 对应 $c+2$ 里的素数：

c_____0........1........4........6.......8........9........10........12........14
$c+2$__2........3........6........8......10......11.......12........14........16

所有的蓝数 c，对应 $c+2$ 里的素数有：
2，3，11，
素数的个数记为 $c(16)=3$，
我们来看素数 p 对应 $p+2$ 里的素数：

p_____2........3........5.......7........11........13
$p+2$__4........5........7.......9........13........15

所有的素数 p，对应 $p+2$ 里的素数有：
5，7，13，
素数的个数记为 $L(16)=3$，

即孪生素数的个数。

由以上，确认：

整数 k 对应素数的个数 $\pi(16)$，等于蓝数对应素数的个数 $c(16)$加红数对应素数的个数 $L(16)$，

$$\pi(16)=c(16)+L(16), \tag{2.1}$$

设 $k+2\le x$，根据(2.1)，任何情况[2] [3]，

$$\pi(x)=c(x)+L(x),$$

由此证明(1.1)是正确的。对于大的 x，显然估计

$$\frac{\pi(x)}{c(x)}>1, \tag{2.2}$$

例如

x	$\pi(x)$	$c(x)$	$\frac{\pi(x)}{c(x)}$
10^4	1229	1024	1.2001953125
10^{15}	29844570422669	28667361180365	1.0410644438

根据(2.2)我们进行不等变换。

3. 对应素数不等变换

根据(2.2)我们得到：

$$\frac{\pi(x)}{c(x)}>1, \tag{3.1}$$

变换[3] [5]：

$$\frac{\pi(x)}{c(x)}\frac{x-\pi(x)}{x-\pi(x)}>\frac{x}{x}, \tag{3.2}$$

(3.1)得到：

$$\frac{x\pi(x)-\pi(x)^2}{xc(x)}>\frac{x-\pi(x)}{x}, \tag{3.3}$$

(3.2)两边乘以相同的项：

$$\frac{x\pi(x)-\pi(x)^2}{xc(x)}\frac{x+\pi(x)}{x}>\frac{x-\pi(x)}{x}\frac{x+\pi(x)}{x}, \tag{3.4}$$

根据(3.4)我们得到：

$$\frac{x^2\pi(x)+x\pi(x)^2-x\pi(x)^2-\pi(x)^3}{x^2c(x)}>\frac{x^2-\pi(x)^2}{x^2}, \tag{3.5}$$

根据(3.5)我们得到：

$$\frac{x^2\pi(x)-\pi(x)^3}{x^2c(x)}>1-\frac{\pi(x)^2}{x^2}, \tag{3.6}$$

例如

x	$\pi(x)$	$c(x)$	$\frac{x^2\pi(x)-\pi(x)^3}{x^2c(x)}$
10^4	1229	1024	1.18206707
10^{15}	29844570422669	28667361180365	1.04013716

有限的数，(3.6)左边都是大于 1 的。如果能证明无限的数，左边依然大于 1，那就可以得到 $c(x)$的上限。

孪生素数分布的初等研究，没有任何现成的定理可以运用，我们参考数学家证明素数定理的方法。

4. 素数定理初等证明

根据车比雪夫函数：

$$\theta(x)=\sum_{p\le x}\log p, \tag{4.1}$$

任给正数 $\lambda<1$，与 $x\ge 1$，根据(4.1)有：

$$\left(\pi(x)-\pi\left(x^\lambda\right)\right)\log x^\lambda\le\theta(x)\le\pi(x)\log x, \tag{4.2}$$

(4.2)显然估计 $\pi\left(x^\lambda\right)<x^\lambda$，得到[4] [6]

$$\lambda\frac{\pi(x)-x^\lambda}{x}\log x\le\frac{\theta(x)}{x}\le\pi(x)\frac{\log x}{x},$$

由此得到：

$$\lambda\frac{\pi(x)\log x}{x}-\lambda\frac{x^\lambda\log x}{x}\le\frac{\theta(x)}{x}\le\pi(x)\frac{\log x}{x}, \tag{4.3}$$

例如

x	λ	x^λ	$\lambda\frac{x^\lambda\log x}{x}$,
10^4	0.5	100	0.0460517018
10^{15}	0.78	501187233627	0.0135021071

根据 $\lambda<1$，可以设：

$$\lambda=1-\frac{2\log\log x}{\log x}, \tag{4.4}$$

根据 x^λ，有：

$$\log x^\lambda=\lambda\log x,$$

代入(4.4)得到：

$$\log x^{\lambda} = \log x - 2\log\log x = \log x - \log(\log x)^2,$$

由此得到：

$$\log x^{\lambda} = \log \frac{x}{(\log x)^2},$$

可以得到：

$$x^{\lambda} = \frac{x}{(\log x)^2},$$

代入(4.3)，

$$\lambda\left(\frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{1}{\log x}\right) \le \frac{\theta(x)}{x} \le \frac{\pi(x)\log x}{x},$$

极限：

$$\frac{1}{\log x} \to 0,$$

我们得到：

$$\lambda \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \le \lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \le \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}, \tag{4.5}$$

车比雪夫定理：

$$\frac{\theta(x)}{x} \to 1,$$

λ 趋近 1，(4.5)得到：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1, \tag{4.6}$$

根据(4.6)可以得到素数定理。

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad (x \to \infty),$$

参阅：潘承洞, 潘承彪. **素数定理的初等证明** [M]. 上海：上海科学技术出版社. 1988. 第 41~43 页.

我们参照数学家的方法，证明合数对应素数分布范围。

5. 合数对应素数上限

我们详细证明合数对应素数上限。

证明

根据素数定理：

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad (x \to +\infty),$$

变换：

$$\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{\log x}, \quad (x \to +\infty),$$

设 x 趋于无穷大，参照数学家的方法，极限：

$$\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{\log x} \to 0, \tag{5.1}$$

由(5.1)可以确认：

$$1 - \frac{\pi(x)}{x} = 0.999999999\cdots \tag{5.2}$$

由(5.2)显然：

$$1 - \frac{\pi(x)^2}{x^2} = 0.999999999\cdots \tag{5.3}$$

根据(3.6)：

$$\frac{x^2\pi(x) - \pi(x)^3}{x^2 c(x)} > 1 - \frac{\pi(x)^2}{x^2},$$

代入(5.3)，我们得到：

$$\frac{x^2\pi(x) - \pi(x)^3}{x^2 c(x)} > 0.999999999\cdots \tag{5.4}$$

例如

x	$\pi(x)$	$\frac{x\pi(x) - \pi(x)^2}{x\,c(x)}$,	$1 - \frac{\pi(x)^2}{x^2}$,
10^4	1229	1.052691308	0.98489559
10^{15}	29844570422669	1.009994322	0.999109301

教科书的算数规则[5] [7]：

$$0.99999999\cdots = 1, \tag{5.5}$$

爱思唯尔《数论杂志》主编史蒂文・米勒教授(Steven Miller)评论：

“If you have the decimal of all nines, yes, that does equal one”.

如果你有所有 9 的小数，是的，那的确是等于 1 的。

根据(5.4)与(5.5)我们可以得到：

$$\frac{x^2\pi(x) - \pi(x)^3}{x^2 c(x)} > 1, \quad (x \to +\infty), \tag{5.6}$$

(5.6)得到合数对应素数的上限：

$$\frac{x^2\pi(x) - \pi(x)^3}{x^2} > c(x), \quad (x \to +\infty),$$

由此证明(1.2)正确。

我们研究孪生素数猜想的初等方法与传统的现代方法不同。

传统方法

证明 $p+n$ 有无穷多个素数，然后证明 $n=2$ 有无穷多个素数。能否证明 $n=2$，并不明确。

数学家证明了 $n\le 256$，能否证明 $n=2$，并不明确。

如果没有证明 $n=2$，这个理论就不适于研究孪生素数猜想，那就得提出新的理论。

数学家提出新的理论，证明了 $n\le 6$，能否证明 $n=2$，依然不明确。

初等方法

证明孪生素数分布原理(6.1)，然后运用分布原理证明(6.2)，就可以明确的证明孪生素数猜想。

根据(6.2)代入(6.1)得到：

$$L(x)=\pi(x)-c(x)>\pi(x)-\frac{x^2\pi(x)-\pi(x)^3}{x^2},\quad (x\to+\infty),$$

孪生素数分布下限：

$$L(x)>\frac{\pi(x)^3}{x^2},\quad (x\to+\infty),$$

根据素数定理有：

$$\pi(x)>\frac{x}{\log x},\quad (x\to+\infty),$$

我们得到：

$$L(x)>\frac{x}{(\log x)^3},\quad (x\to+\infty),$$

如果(6.2)的证明没有问题，那就证明了孪生素数有无穷多个。这是很明确的。

北京大学访问学者，王茂泽教授评论：

“您的原理和提法特别简单，让任何人容易理解，也容易得到结论，值得借鉴。在此基础上通过证明孪生素数个数公式的单调递增性达到孪生素数有无限多对的结论。”

我们还可以研究很强的孪生素数猜想，哈代－利特尔伍德(Hardy-Littlewood)第一猜想。

基于孪生素数分布原理 $\pi(x)=c(x)+L(x)$，得到

$$1=\frac{c(x)}{\pi(x)}+\frac{L(x)}{\pi(x)},$$

变换：

$$1-\frac{\pi(x)}{x}=\frac{c(x)}{\pi(x)}+\frac{L(x)}{\pi(x)}-\frac{\pi(x)}{x},$$

极限：

$$\frac{L(x)}{\pi(x)}-\frac{\pi(x)}{x}\to 0,$$

可以得到：

$$1-\frac{\pi(x)}{x}\sim\frac{c(x)}{\pi(x)},$$

我们得到：

$$\frac{x-\pi(x)}{x}\sim\frac{c(x)}{\pi(x)},$$

由此得到：

$$\frac{x\pi(x)-\pi(x)^2}{x}\sim c(x),$$

代入原理：

$$L(x)=\pi(x)-c(x)\sim\frac{\pi(x)^2}{x},$$

代入素数定理：

$$L(x)\sim\frac{x}{(\log x)^2},$$

引入孪生素数常数 $c = 0.66016\cdots$我们得到：

$$L(x)\sim 2c\frac{x}{(\log x)^2},$$

这就是哈代－利特尔伍德(Hardy-Littlewood)第一猜想。

我们还可以研究超强的孪生素数猜想，哈代－利特尔伍德(Hardy-Littlewood)第二猜想。

基于孪生素数分布原理 $\pi(x)=c(x)+L(x)$，得到：

$$1=\frac{c(x)}{\pi(x)}+\frac{L(x)}{\pi(x)},$$

极限：

$$\frac{L(x)}{\pi(x)}\to 0,$$

可以确认：

$$\frac{c(x)}{\pi(x)}\to 1,$$

由此得到：

$$c(x)\sim\pi(x),$$

素数定理：

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x},$$

代入原理：

$$L(x)\sim\pi(x)-\frac{x}{\log x},$$

根据素数定理 $\pi(x)\sim li(x)$，

引入孪生素数常数 $c = 0.66016\cdots$ 我们得到：

$$L(x) \sim 2c\left(li(x)-\frac{x}{\log x}\right),$$

这就是哈代－利特尔伍德(Hardy-Littlewood)第二猜想。

根据前面的讨论，不难发现，研究孪生素数猜想的关键是孪生素数分布原理。基于孪生素数分布原理，还可以进行不同的变换。有兴趣的学者，可以探讨。

6. 结论

我们提出对应素数的初等方法，研究了对应素数的分布规律，证明了孪生素数分布原理：

$$\pi(x)=c(x)+L(x), \tag{6.1}$$

基于(6.1)我们参照数学家素数定理的初等证明方法证明了合数对应素数上限[6] [8]：

$$\frac{x^2\pi(x)-\pi(x)^3}{x^2}>c(x), \quad (x\to+\infty), \tag{6.2}$$

例如：

x	$\pi(x)$	$c(x)$	$\frac{x^2\pi(x)-\pi(x)^3}{x^2}$,
10^4	1229	1024	1210
10^{15}	29844570422669	28667361180365	29817987912030

对应素数的初等方法，对于研究黎曼猜想也可以得到启迪。黎曼(Riemann)猜想素数原理：

$$\pi(x)=\frac{1}{2}+(x+1)\sum_{p\le x}\frac{1}{p}-2\sum_{p\le 2n}\frac{1}{p},\ n\le x/2,$$

设 $n=1,2,3,4,\cdots,x/2$，可以表示为：

$$\pi(x)=\frac{1}{2}+(x+1)\sum_{p\le x}\frac{1}{p}+2\left(\sum_{p\le 2}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 4}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 6}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 8}\frac{1}{p}+\cdots+\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\right),$$

设 $x=2$，有 $x/2=1$，$n=1$，得到：

$$\pi(2)=\frac{1}{2}+(2+1)\sum_{p\le 2}\frac{1}{p}-2\sum_{p\le 2}\frac{1}{p}=1,$$

设 $x=16$，$n\le x/2=8$，$n=1$，2，3，4，5，6，7，8，得到：

$$\pi(16)=\frac{1}{2}+(16+1)\sum_{p\le 16}\frac{1}{p}-2\left(\sum_{p\le 2}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 4}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 6}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 8}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 10}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 12}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 14}\frac{1}{p}+\sum_{p\le 16}\frac{1}{p}\right)=6,$$

深奥复杂的数学难题有浅显的规律，其余的科学问题也应该有浅显的本源。这不只是证明数学难题，而且对于改变人的思考方法，提升人的辩证意识，启迪行业发明创造，共建社会物质辉煌，都是有积极作用的。

参考文献

[1] Atiyah, M.F. and Singer, I.M. (1963) The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **69**, 422-433. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1963-10957-x

[2] Ge, L.M. (2019) On the Riemann Zeta Function, I: KS-Transform. *Acta Mathema tica Sinica, Chinese Series*, **62**, Article 674.

[3] Lu, C.H. (2004) The Riemann Hypothesis. Tsinghua University Press, 9-18.

[4] Pan, C.D. and Pan, C.B. (1988) The Elementary Proof of Prime Number Theorem. Shanghai Science and Technology Press, 41-43.

[5] Li, X. (1997) The Positivity of a Sequence of Numbers and the Riemann Hypothesis. *Journal of Number Theory*, **65**, 325-333. https://doi.org/10.1006/jnth.1997.2137

[6] Riemann, B. (1859) Uber die Anzahl der Primzahlen unter Einer Gegebenen Grösse. Berlin Akad.

[7] Liu, D. (2022) Twin Prime Distribution Problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **10**, 1352-1361. https://doi.org/10.4236/jamp.2022.104095

[8] Liu, D. and Liu, C. (2023) Corresponding Prime Number Distribution Equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **11**, 3354-3365. https://doi.org/10.4236/jamp.2023.1111214