Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(7), 3527-3540
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.137337

Hans汉斯

基于改进重叠组稀疏的遥感图像去噪算法

高　雪[1]，李　喆[1,2]

[1]长春理工大学数学与统计学院，吉林　长春
[2]长春理工大学中山研究院遥感技术与大数据分析实验室，广东　中山

收稿日期：2024年6月25日；录用日期：2024年7月19日；发布日期：2024年7月29日

摘　要

脉冲噪声对遥感图像的质量有着显著的负面影响，它会破坏图像的连续性，降低图像的可视性和信息的准确性，从而影响遥感图像的应用效果。本文通过融合自适应中值滤波技术和组稀疏模型，设计了基于改进重叠组稀疏的模型，以有效地消除遥感图像的脉冲噪声，并消除梯度伪影现象。由于本文所提出的模型是非凸问题，我们利用最大－最小化(MM)方法和交替方向乘子法(ADMM)对模型进行求解。实验结果表明，本文提出的模型在峰值信噪比(PSNR)和结构相似度(SSIM)方面优于其他四种算法。

关键词

脉冲噪声，重叠组稀疏，交替方向乘子法，自适应中值滤波，图像去噪

Remote Sensing Image Denoising Algorithm Based on Improved Overlap Group Sparsity

Xue Gao[1], Zhe Li[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin
[2]Laboratory of Remote Sensing Technology and Big Data Analysis, Changchun University of Science and Technology, Zhongshan Guangdong

Received: Jun. 25th, 2024; accepted: Jul. 19th, 2024; published: Jul. 29th, 2024

Abstract

Impulse noise has a significant negative effect on the quality of remote sensing image. It can destroy the continuity of image, reduce the visibility and sourcing circumstances of image, and affect the application effect of remote sensing image. By fusing adaptive median filter and group sparse model, a new model based on improved overlap group sparse model is designed to eliminate impulse noise and gradient artifacts in remote sensing images. Since the model presented in this pa-

文章引用: 高雪, 李喆. 基于改进重叠组稀疏的遥感图像去噪算法[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3527-3540.
DOI: 10.12677/aam.2024.137337

per is non-convex, we use the maximum-minimum (MM) method and the alternating direction multiplier (ADMM) method to solve the model. Experimental results show that the proposed model outperforms the other four algorithms in Peak signal-to-noise ratio (PSNR) and structural similarity (SSIM).

Keywords

Impulse Noise, Overlapping Group Sparsity, ADMM, Adaptive Median Filtering, Image Denoising

1. 引言

遥感图像的复原可以被视为一个线性逆问题，这是成像科学中的核心问题之一，对于众多图像处理应用而言至关重要。其中，去噪作为遥感图像复原的一个重要环节，旨在从受噪声影响的观测图像中估计并还原出原始清晰图像。

数学上，图像去噪的模型可以表示为：

$$b = u + n, \tag{1}$$

其中 $b \in R^{n\times 1}$ 为降级后的图像，$u \in R^{n\times 1}$ 为期望的原始干净图像，$n \in R^{n\times 1}$ 为加性噪声。

遥感图像在采集和传输过程中会受到脉冲噪声的影响，脉冲噪声可以分为固定值脉冲噪声和随机值脉冲噪声(RVIN)两种类型，其中固定值脉冲噪声也被称为椒盐噪声(SPN)。在图像处理阶段，可以使用滤波算法、增强算法等技术来降低噪声并提高图像质量。以往，学者们已经提出了自适应中值滤波器(AMF) [1]来处理遥感图像中的脉冲噪声，然而 AMF 对细节丰富的图像可能产生不良影响。所以 Erkan (2019) [2]，Zhang and Li (2014) [3]，Thanh (2020) [4]，Wang (2016) [5]，Khan (2018) [6]，Singh (2020) [7]，Mojica Vargas (2018) [8]，Enginoglu (2019) [9]，和 Li (2014) [10]等人提出了一些基于平均滤波器的算法，虽然基于平均滤波器的算法简单易懂、高效，但同时也会导致边缘信息损失、细节信息丢失。最近，Mohd Rafi Lone 等人提出的 NNFM 方法[11]利用距离较近的像素具有更高的相关性这一特点来去除脉冲噪声。虽然该方法通常能够较好地保留图像的细节和边缘信息，但该方法涉及的参数较多，如果参数设置不当可能会导致处理效果不佳或引入新的噪声。

但现在，学者们开始运用正则化技术构造优化模型，以更好地平衡去噪和细节保留之间的关系。最初，由 Rudin 等人将总变分模型(TV) [12]应用于去噪、去模糊、分割和超分辨率等问题。TV 模型能够获得清晰的恢复结果并保留图像边缘，但复原的图像容易受到梯度伪影的影响。针对上述问题，Liu 等人提出了重叠组稀疏(OGS)全变分图像恢复模型[13]。文献[14]中将超拉普拉斯先验与 OGS 结合使用，得到更稀疏的图像表示约束模型来有效地降低梯度伪影的影响。Selesnick 和 Chen [15]提出了用于一维 TV 去噪的 OGS 惩罚函数，数值实验表明该方法有效地减少了梯度伪影。综上所述，OGS 正则化器已成功应用于混合图像恢复模型，特别是在消除梯度伪影方面[16]-[18]，取得了显著的成功。

在图像去噪中，l_2 范数保真度被广泛用于恢复被加性高斯噪声损坏的图像[19]。然而，l_2 范数对异常值敏感，当存在异常值时，图像恢复效果不理想。而基于贝叶斯统计原理，l_1 范数保真度比 l_2 范数更适合恢复被脉冲噪声破坏的图像[20]。先前的研究[21]-[25]表明 l_1 范数在稀疏信号和脉冲噪声下的图像恢复中表现良好。在 TV 正则化器中使用 l_1 范数也有助于最小化凸目标函数[16]。尽管如此，l_1 范数可能会产

生过度惩罚的解[26]-[28]，在捕获脉冲噪声的异常值特征方面不够稳健。最近，文献[26]提出了一种基于 l_0 l_0 全变差(l_0-TV)脉冲噪声去除方法，该方法使用 l_0 范数作为数据保真度，并使用近端交替方向乘子法(PADMM)来恢复图像。结果表明，该方法的性能优于基于 l_1 范数的方法。文献[29]提出了一种重叠群稀疏全变分方法，该方法将数据保真度范数与重叠群稀疏全变分(OGSTV)相结合，用于恢复脉冲噪声下的模糊图像。

现有的去噪算法大多是基于模糊逻辑，这无疑增加了计算复杂度。所以，本文通过融合自适应中值滤波技术和组稀疏模型，设计了基于改进重叠组稀疏的模型，以有效地消除遥感图像的脉冲噪声。该模型首先利用改进的自适应中值滤波去除遥感图像中大部分脉冲噪声，并利用梯度域导向滤波保留图像边缘信息；利用自适应中值滤波计算噪声掩模矩阵，并利用该噪声掩模矩阵提高重叠组稀疏模型对脉冲噪声去除的能力，并消除图像中的梯度伪影。数值结果表明，我们的方法与其他四种先进的方法相比是非常有效和有竞争力的。

2. 预备知识

2.1. 改进的自适应中值滤波算法

在本节中，首先我们提供一些基本概念，以便在图像的滤波窗口中找到无噪声像素，然后给出了该方法及其实现的算法，如算法 1。

我们设 $u:=\left[u_{ij}\right]_{m\times n}$ 为图像矩阵(IM)，其中 u_{ij} 是无符号整数，且 $0\le u_{ij}\le 255$。如果 $u_{ij}=0$ 或者 $u_{ij}=255$，则 u_{ij} 称为 u 的噪声像素，否则，则为 u 的干净像素；如果存在某些 i 和 j，使得 u_{ij} 是 u 的带噪声的像素，则称 u 为噪声图像矩阵(NIM)。如果设 $u:=\left[u_{ij}\right]_{m\times n}$ 为 NIM，那么 $C:=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ 称为 u 的二进制矩阵表示为：

$$c_{ij}=\begin{cases}0, & c_{ij}\text{是}u\text{的噪声像素}\\ 1, & \text{其他}\end{cases}, \tag{2}$$

如果我们设 $u:=\left[u_{ij}\right]_{m\times n}$ 和 $t\in\left\{1,2,\cdots,\min\left\{m,n\right\}\right\}$，则 $\left[\overline{u}_{rs}\right]_{(m+2t)\times(n+2t)}$ 称为 u 的 t 对称矩阵，u 的 t 对称矩阵用 $\overline{u}_{t-sym}$ 或者 $\overline{u}_t$ 表示，其定义如下：

$$\begin{bmatrix}
u_{tt} & \cdots & u_{t1} & u_{t1} & u_{t2} & \cdots & u_{tn} & u_{tn} & \cdots & u_{t(n-t+1)}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
u_{1t} & \cdots & u_{11} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} & \cdots & u_{1(n-t+1)}\\
u_{1t} & \cdots & u_{11} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & u_{1n} & \cdots & u_{1(n-t+1)}\\
u_{2t} & \cdots & u_{21} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} & u_{2n} & \cdots & u_{2(n-t+1)}\\
u_{3t} & \cdots & u_{31} & u_{31} & u_{32} & \cdots & u_{3n} & u_{3n} & \cdots & u_{3(n-t+1)}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
u_{mt} & \cdots & u_{m1} & u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} & u_{mn} & \cdots & u_{m(n-t+1)}\\
u_{mt} & \cdots & u_{m1} & u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} & u_{mn} & \cdots & u_{m(n-t+1)}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
u_{(m-t+1)t} & \cdots & u_{(m-t+1)1} & u_{(m-t+1)1} & u_{(m-t+1)2} & \cdots & u_{(m-t+1)n} & u_{(m-t+1)n} & \cdots & u_{(m-t+1)(n-t+1)}
\end{bmatrix}, \tag{3}$$

如果设 $u:=\left[u_{ij}\right]_{m\times n}$ 和 $k\in\left\{1,2,\cdots,t\right\}$，那么 $\overline{u}_t$ 的 k 近似矩阵 u_{ij}^k 定义为：

$$\begin{bmatrix}
\overline{u}_{(i+t-k)(j+t-k)} & \cdots & \overline{u}_{(i+t-k)(j+t+k)}\\
\vdots & \overline{u}_{(i+t)(j+t)} & \vdots\\
\overline{u}_{(i+t+k)(j+t-k)} & \cdots & \overline{u}_{(i+t+k)(j+t+k)}
\end{bmatrix}_{(2k+1)\times(2k+1)}, \tag{4}$$

其中，由 u_{ij}^{k} 的所有正数项组成的非递减矩阵 $\hat{u}_{ij}^{k}$ 称为 u_{ij}^{k} 的正则项矩阵(REM)。所有元素为零的矩阵称为零矩阵，记为[0]。最后我们计算中值 $m=\text{median}\left(\hat{u}_{ij}^{k}\right)$，用于替换噪声像素。

算法 1. 改进的自适应中值滤波算法

步骤 1： 输入 $u:=[u_{ij}]_{m\times n}$，其中 $\min\{m,n\}\geq 5$.

步骤 2： 将变量 u 从 uint8 形式转换为 double 形式

步骤 3： 对于 t 从 5 到 1

获得关于 u 的二进制矩阵 $C:=[c_{ij}]_{m\times n}$，获得 $\overline{u}_t$ 和 $\overline{C}_t$

对于所有 i 和 j

如果 $c_{ij}=0$

对于 k 从 1 到 t

如果 $C_{ij}^{k}\neq 0$

获得 u_{ij}^{k} 和 $\hat{u}_{ij}^{k}$

$u_{ij}\leftarrow median(\hat{u}_{ij}^{k})$

结束循环

End If

End For

End If

End For

End For

步骤 4： 将 u 从 double 形式转换为 uint8 形式

本文采用改进的自适应脉冲噪声检测算法计算噪声掩膜矩阵 M，该掩膜矩阵 M 的大小与图像的尺寸相同，其分量元素表示对应位置是否为噪声，噪点位置对应的分量设置为 1，以便在后续处理中提高重叠组稀疏模型对脉冲噪声去除的能力，对于非噪声位置，其分量设置为 0，以保留图像的信息。

2.2. 重叠组稀疏正则化器

为了能够更好地在去噪过程中消除 TV 先验所产生的块状伪影，文献[14]提出了一种重叠组稀疏正则化器。对于给定的向量 $x\in R^{n}$，其 K 块组表示为：

$$x_{i,k}=\left[x(i),\cdots,x(i+K-1)\right]\in R^{K}, \tag{5}$$

其中，$x_{i,K}$ 可以被视为 x 中从索引 i 开始的大小为 K 的连续样本块，常用的组稀疏正则化器[14] [29]定义为：

$$\varphi(x)=\sum_{i}\left[\sum_{k=0}^{K-1}\left|x(i+k)\right|^{2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

对于二维的情况，图像 $u\in R^{n\times 1}$ 的 $K\times K$ 块由[12]给出：

$$\tilde{u}(i,j)_{K}=\begin{bmatrix} u(i-m_1,j-m_1) & u(i-m_1,j-m_1+1) & \cdots & u(i-m_1,j+m_2) \\ u(i-m_1+1,j-m_1) & u(i-m_1+1,j-m_1+1) & \cdots & u(i-m_1+1,j+m_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(i+m_2,j-m_1) & u(i+m_2,j-m_1+1) & \cdots & u(i+m_2,j+m_2) \end{bmatrix}\in R^{K\times K}, \tag{7}$$

式中 $m_1=\left[\frac{K-1}{2}\right]$，$m_2=\left[\frac{K}{2}\right]$，其中 $|x|$ 表示不大于 x 的最大正整数。$\tilde{u}(i,j)_K$ 的中心坐标是 (i,j)，设 $u(i,j)_K$ 为矩阵 $\tilde{u}(i,j)_K$ 的 K 列叠加得到的向量，即 $u(i,j)_K=\tilde{u}(i,j)_K(:)$。然后，二维重叠群稀疏正则化器可以表示为：

$$\varphi(u)=\sum_{i,j=1}\left\|u(i,j)_K\right\|_2. \tag{8}$$

在线性逆问题的背景下，OGS 被用作正则化器以模拟信号在原始形式或其它领域中的分组或聚类行为，并已成功减少基于总变差的信号和图像恢复中的梯度伪影。

3. 本文模型及求解

3.1. 模型建立

本文提出一种基于改进重叠组稀疏的模型来去除脉冲噪声，模型如下：

$$\min_{0\le u\le 1}\left\|o\odot(u-b)\right\|_0+\lambda\varphi(\nabla u), \tag{9}$$

其中，$\lambda>0$ 是控制 OGS 正则器的正则化参数(8)，u 是经过改进的自适应中值滤波处理后并采用梯度域导向滤波进行增强的图像。为了便于计算和验证结果，我们只考虑位于 $[0,1]$ 范围内的所有图像。

在本文模型中的数据保真度项使用 l_0 范数项，众所周知，l_0 范数可以用来计算向量中非零元素的数量，从而实现稀疏性。而保真度项 $\left\|o\odot(u-b)\right\|_0$ 表示降级后的图像与需要的原始干净图像之间的误差。由于 l_0 范数计算向量中的非零元素，这使得 $o\odot(u-b)$ 稀疏，并且非常适合脉冲噪声的稀疏性质。因此，本文的模型对脉冲噪声的异常值特征具有更强的鲁棒性。这就是在我们提出的模型中采用 l_0 范数作为稳健脉冲噪声恢复的数据保真度的主要原因。

那么问题(9)可以重新表述为：

$$\begin{aligned}&\min_{0\le u,v\le 1}\langle 1,1-v\rangle+\lambda\varphi(\nabla u),\\&s.t.\ v\odot|o\odot(u-b)|=0.\end{aligned} \tag{10}$$

我们利用变量拆分，将问题重新表述为以下约束优化问题：

$$\begin{aligned}&\min_{0\le u,v\le 1}\langle 1,1-v\rangle+\lambda\varphi(x),\\&s.t.\ \nabla u=x,u-b=y,v\odot|o\odot y|=v\odot o\odot|y|=0.\end{aligned} \tag{11}$$

3.2. 模型求解

为了解决(11)式问题，我们采用 ADMM 算法，那么(11)的增广拉格朗日函数为：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(u,v,x,y,\pi,\pi_z,\pi_0)&=\langle 1,1-v\rangle+\lambda\varphi(x)+\langle\nabla u-x,\pi\rangle+\frac{\beta_1}{2}\|\nabla u-x\|^2\\&+\langle u-b-y,\pi_z\rangle+\frac{\beta_2}{2}\|u-b-y\|^2+\langle v\odot o\odot|y|,\pi_0\rangle+\frac{\beta_3}{2}\|v\odot o\odot|y|\|^2,\end{aligned} \tag{12}$$

其中，变量 π，π_z 和 π_0 是与(11)的约束相关的拉格朗日乘子。β_1，β_2 和 $\beta_3>0$ 是二次罚分项 $\|\nabla u-x\|^2$，$\|u-b-y\|^2$ 和 $\|v\odot o\odot|y|\|^2$ 所对应的惩罚参数。

基于 ADMM 方案，我们可以采用交替的方式解决以下问题。在此过程中，我们会深入探讨每个问题的解决方案，并在后文呈现完整的算法流程，即算法 2，以清晰展示整个求解过程。

$$\begin{cases} u^{k+1}=\arg\min_u \left\langle \nabla u-x^k,\pi_k\right\rangle+\dfrac{\beta_1}{2}\left\|\nabla u-x^k\right\|^2+\left\langle u-b-y^k,\pi_z^k\right\rangle+\dfrac{\beta_2}{2}\left\|u-b-y^k\right\|^2, \\ v^{k+1}=\arg\min_v \left\langle v,1-v\right\rangle+\left\langle v\odot o\odot\left|y^k\right|,\pi_0^k\right\rangle+\dfrac{\beta_3}{2}\left\|v\odot o\odot\left|y^k\right|\right\|^2, \\ x^{k+1}=\arg\min_x \lambda\varphi(x)+\left\langle \nabla u^{k+1}-x,\pi^k\right\rangle+\dfrac{\beta_1}{2}\left\|\nabla u^{k+1}-x\right\|^2, \\ y^{k+1}=\arg\min_y \left\langle u^{k+1}-b-y,\pi_z^k\right\rangle+\dfrac{\beta_2}{2}\left\|u^{k+1}-b-y\right\|^2 \\ \quad +\left\langle v^{k+1}\odot o\odot|y|,\pi_0^k\right\rangle+\dfrac{\beta_3}{2}\left\|v^{k+1}\odot o\odot|y|\right\|^2, \\ \pi^{k+1}=\pi^k+\beta_1\left(\nabla u^{k+1}-x^{k+1}\right), \\ \pi_z^{k+1}=\pi_z^k+\beta_2\left(u^{k+1}-b-y^{k+1}\right), \\ \pi_0^{k+1}=\pi_0^k+\beta_3\left(v^{k+1}\odot o\odot\left|y^{k+1}\right|\right). \end{cases} \tag{13}$$

式(13)中的 u 的子问题等价于：

$$u^{k+1}=\arg\min_u \frac{\beta_1}{2}\left\|\nabla u-x^k+\frac{\pi^k}{\beta_1}\right\|^2+\frac{\beta_2}{2}\left\|u-b-y^k+\frac{\pi_z^k}{\beta_2}\right\|^2, \tag{14}$$

根据一阶最优性条件，这个问题要求我们解线性方程组：

$$\left(\beta_1\nabla^{\mathrm{T}}\nabla+\beta_2\right)u=\nabla^{\mathrm{T}}\left(\beta_1x^k-\pi^k\right)+\left(\beta_2b+\beta_2y^k-\pi_z^k\right), \tag{15}$$

在 u 的周期边界条件下，矩阵 $\nabla^{\mathrm{T}}\nabla$ 具有块循环和循环块(BCCB)的结构，因此可以用二维离散傅里叶变换(FFT)对角化，即利用二维 FFT 和二维 IFFT 可以有效地求解 u：

$$u^{k+1}=\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}\left(\nabla^{\mathrm{T}}\right)\odot\mathcal{F}\left(\beta_1x^k-\pi^k\right)+\mathcal{F}\left(\beta_2b+\beta_2y^k-\pi_z^k\right)}{\beta_2\mathcal{F}+\beta_1\mathcal{F}\left(\nabla^{\mathrm{T}}\right)\odot\mathcal{F}(\nabla)}\right). \tag{16}$$

对于求解 v 的子问题，可以得到下式：

$$v^{k+1}=\arg\min\frac{1}{2}\beta_3o\odot y^k\odot y^k\odot v^2+\left(\pi_0^k\odot o\odot\left|y^k\right|-1\right)v. \tag{17}$$

因此，解 v^{k+1} 我们通过投影运算得到：

$$v^{k+1}=\min\left(1,\max\left(0,-\frac{\pi_0^k\odot o\odot\left|y^k\right|-1}{\beta_3o\odot y^k\odot y^k}\right)\right). \tag{18}$$

这个子问题是凸集上的投影，它能确保恢复图像的像素值在 0 到 1 之间。

对于求解式(13)中的 x 的子问题，其最小化函数可以表示为：

$$\begin{aligned} x^{k+1}&=\arg\min_x\frac{\beta_1}{2}\left\|x-\left(\nabla u^{k+1}+\frac{\pi^k}{\beta_1}\right)\right\|^2+\lambda\varphi(x), \\ &=\arg\min_x\frac{1}{2}\left\|x-\left(\nabla u^{k+1}+\frac{\pi^k}{\beta_1}\right)\right\|^2+\frac{\lambda}{\beta_1}\varphi(x). \end{aligned} \tag{19}$$

不难看出，此问题我们可以使用 MM 方法[30]来解决，则：

$$x^{k+1}=\left(I+\mu\Lambda\left(x^k\right)^{\mathrm{T}}\Lambda\left(x^k\right)^{-1}\right)x_0,k=0,1,\cdots, \tag{20}$$

然后我们利用掩膜矩阵 M 进行更新，当迭代次数 k 小于 3 时，

$$x^{k+1}=M\odot\left(I+\mu\Lambda\left(x^{k}\right)^{\mathrm{T}}\Lambda\left(x^{k}\right)^{-1}\right)x_{0}+\nabla u^{k+1}\odot(1-M),k=0,1\cdots, \tag{21}$$

其中，$x_{0}=\nabla u^{k+1}+\dfrac{\pi^{k}}{\beta_{1}}$。

求解式(13)中的 y 的子问题等价于：

$$y^{k+1}=\arg\min_{y}\frac{\beta_{2}}{2}\left\|y-\left(u^{k+1}-b+\frac{\pi_{z}^{k}}{\beta_{2}}\right)\right\|^{2}+\frac{\beta_{3}}{2}\left\|v^{k+1}\odot o\odot|y|+\frac{\pi_{0}^{k}}{\beta_{3}}\right\|^{2}, \tag{22}$$

通过展开(22)并去掉常数项，我们可以将(22)重写为：

$$y^{k+1}=\operatorname{argmin}_{y}\frac{1}{2}\left\|y-\frac{\beta_{2}\left(u^{k+1}-b+\dfrac{\pi_{z}^{k}}{\beta_{2}}\right)}{\beta_{2}+\beta_{3}\left(v^{k+1}\odot o\right)^{2}}\right\|^{2}+\frac{v^{k+1}\odot o\odot\pi_{0}^{k}}{\beta_{2}+\beta_{3}\left(v^{k+1}\odot o\right)^{2}}\odot|y|. \tag{23}$$

其最小值可以通过以下四维收缩算子计算得到：

$$y^{k+1}=\frac{\dfrac{\beta_{2}\left(u^{k+1}-b+\dfrac{\pi_{z}^{k}}{\beta_{2}}\right)}{\beta_{2}+\beta_{3}\left(v^{k+1}\odot o\right)^{2}}}{\left|\dfrac{\beta_{2}\left(u^{k+1}-b+\dfrac{\pi_{z}^{k}}{\beta_{2}}\right)}{\beta_{2}+\beta_{3}\left(v^{k+1}\odot o\right)^{2}}\right|}\odot\max\left(\left|\frac{\beta_{2}\left(u^{k+1}-b+\dfrac{\pi_{z}^{k}}{\beta_{2}}\right)}{\beta_{2}+\beta_{3}\left(v^{k+1}\odot o\right)^{2}}\right|-\frac{v^{k+1}\odot o\odot\pi_{0}^{k}}{\beta_{2}+\beta_{3}\left(v^{k+1}\odot o\right)^{2}},0\right), \tag{24}$$

化简(24)式可得到更新的 y^{k+1}：

$$y^{k+1}=\frac{u^{k+1}-b+\dfrac{\pi_{z}^{k}}{\beta_{2}}}{\left|u^{k+1}-b+\dfrac{\pi_{z}^{k}}{\beta_{2}}\right|}\odot\max\left(\frac{\beta_{2}\left|u^{k+1}-b+\dfrac{\pi_{z}^{k}}{\beta_{2}}\right|-v^{k+1}\odot o\odot\pi_{0}^{k}}{\beta_{2}+\beta_{3}v^{k+1}\odot v^{k+1}\odot o},0\right). \tag{25}$$

最后，拉格朗日乘子 π、π_{z}、π_{0} 根据式(13)中的方程进行更新。

算法 2. 本文算法

输入：正则化参数 λ，组块大小 K，惩罚参数 $\beta_{1},\beta_{2},\beta_{3}>0$，迭代次数 k

初始化：初始图像 $u^{0}=b$，$k=0$，拉格朗日乘子 π,π_{z},π_{0}

预先计算：矩阵 $\beta_{2}\mathcal{F}+\beta_{1}\mathcal{F}(\nabla^{\mathrm{T}})\odot\mathcal{F}(\nabla)$

输出：恢复图像 u

Fork = 0 到迭代次数 **Do**

根据(16)式计算 u^{k+1}，根据(18)式计算 v^{k+1}

根据(21)式计算 x^{k+1}，根据(25)式计算 y^{k+1}

根据(13)式计算 π^{k+1} π_{z}^{k+1} π_{0}^{k+1}

续表

If $\frac{\| u_{k+1} - u_k \|}{\| u_k \|} \le 1 \times 10^{-4}$ then

Break

$k = k + 1$

End Do

4. 数值实验

本文实验部分全部使用 Matlab2021a 软件进行，电脑操作系统为 Windows11，硬件平台为 Intel(R) Core(TM) i9-12900H CPU @2.50GHz 处理器、32GB RAM。我们将本文的方法与 AMF [1]、NNFM [10]、l_0-TV [25]以及 l_0-OGSTV [28]方法进行比较，并给出了数值结果，以说明所提出的算法对遥感图像恢复的有效性，所使用的测试图像均来自 AID 数据集如图 1 所示。

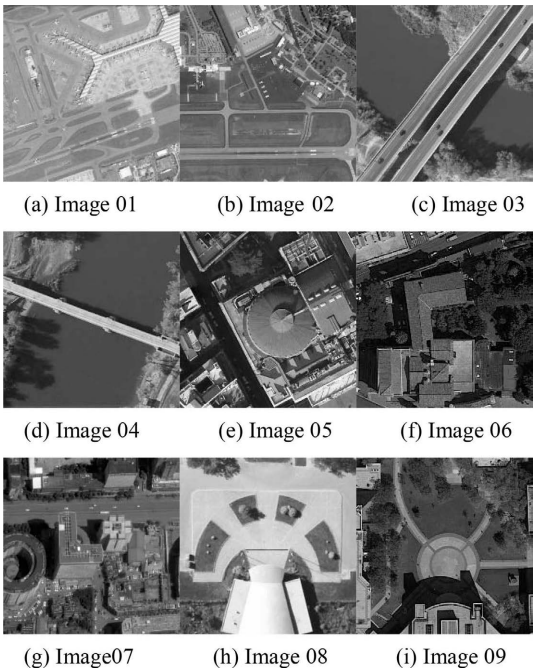


Figure 1. Test images of different scenarios
图 1. 不同场景的测试图像.

4.1. 参数设置

为了获得可接受的图像恢复质量，我们首先设置这些参数，即组块大小 K，内部迭代次数 N 和正则化参数 λ。

为了找到最优的组块大小 K，我们进行了脉冲噪声水平为 30%的去噪实验，使用了“Iamge01”，“Iamge03”和“Iamge05”三个图像来获得 K 的最佳选择。当我们使其他参数保持不变时，令 K 的值发生变化，结果显示当 $K > 5$ 时，PSNR 和 SSIM 值会缓慢降低；当 $K = 5$ 时，三幅图像的 PSNR 和 SSIM 值都最大。因此，在实验中我们将组块大小 K 设置为 5。我们使用 $K = 5$ 时的实验去除“Iamge01”和“Iamge05”两幅图像中 30%的脉冲噪声，以确定重叠组稀疏子问题的内部迭代次数 N。当我们改变 N 时，且其他参

数保持不变，增加内部迭代的次数会导致所提出算法的 CPU 时间增加，而恢复图像的 PSNR 和 SSIM 值几乎相同。因此，在实验中，我们设置 $N = 5$ 来平衡 CPU 时间和恢复图像质量。最后一个需要适当调整的参数是正则化参数 λ，它在噪声去除中起着重要的作用，该值取决于遥感图像本身以及噪声水平。通常，对于纯脉冲噪声的去除，其值在[0.10, 1.10]之间。

4.2. 实验结果及分析

在本文实验中，我们用不同程度的脉冲噪声破坏了九幅 600 × 600 的遥感图像。测试的具体噪声水平分别为 10%、20%、30%和 40%、50%、60%，这些值表示图像中被噪声损坏的像素的百分比。所提方法的所有参数均按前面的讨论得到。我们通过人工选择 l_0-TV 和 l_0-OGSTV 的正则化参数，以便得到最佳的 PSNR 和 SSIM 值，并且本文采用定量评价的方式，获得了五种算法的 PSNR 和 SSIM 值，见表 1~9。

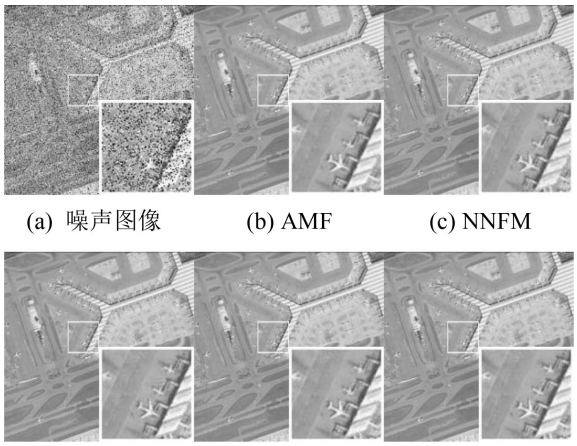


Figure 2. Comparison of the effects of different methods for removing pulse noise (ND = 20%) (Image 01)
图 2. 不同方法去除脉冲噪声(ND = 20%)的效果对比图(Image 01)

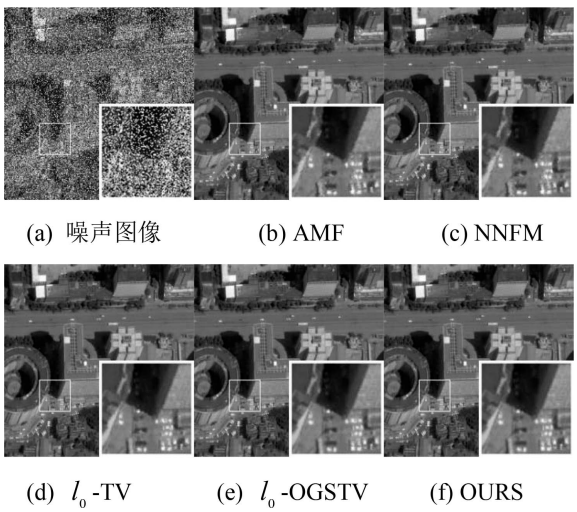
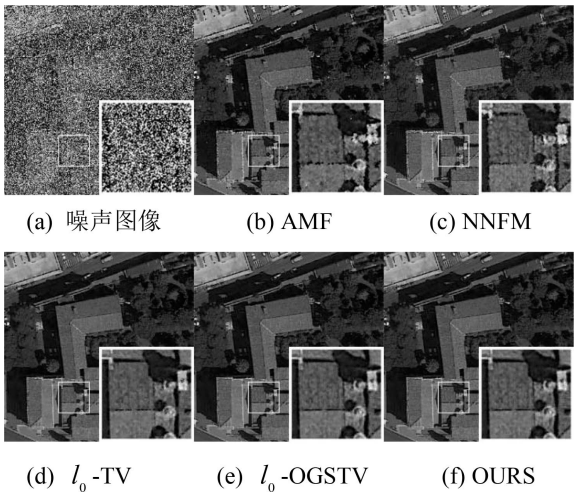


Figure 3. Comparison of the effects of different methods for removing pulse noise (ND = 40%) (Image 07)
图 3. 不同方法去除脉冲噪声(ND = 40%)的效果对比图(Image 07)



(a) 噪声图像 (b) AMF (c) NNFM

(d) l_0-TV (e) l_0-OGSTV (f) OURS

Figure 4. Comparison of the effects of different methods for removing pulse noise (ND = 60%) (Image 06)
图 4. 不同方法去除脉冲噪声(ND = 60%)的效果对比图(Image 06)

Table 1. Evaluation index results of different algorithms at different density levels (10%~60%) (Image 01)
表 1. 不同算法在不同密度水平(10%~60%)下的评价指标结果(Image 01)

ND (%)	AMF		NNFM		l_0-TV		l_0-OGSTV		OURS	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	38.4469	0.9795	37.0155	0.9795	39.1986	0.9773	40.2316	0.9807	**40.5041**	**0.9812**
20	36.3300	0.9692	34.7247	0.9635	37.1661	0.9650	38.3233	0.9697	**38.4669**	**0.9701**
30	34.2040	0.9533	33.2774	0.9479	35.5964	0.9514	36.8031	0.9581	**36.9756**	**0.9587**
40	32.3750	0.9313	32.0492	0.9317	34.2540	0.9361	35.5110	0.9452	**35.6428**	**0.9459**
50	30.6287	0.9025	31.1041	0.9145	32.8005	0.9162	34.1228	0.9291	**34.2589**	**0.9299**
60	28.1191	0.8524	30.0880	0.8933	31.2787	0.8894	32.6681	0.9087	**32.7858**	**0.9094**

Table 2. Evaluation index results of different algorithms at different density levels (10%~60%) (Image 02)
表 2. 不同算法在不同密度水平(10%~60%)下的评价指标结果(Image 02)

ND (%)	AMF		NNFM		l_0-TV		l_0-OGSTV		OURS	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	34.7434	0.9609	40.7337	0.9889	35.8879	0.9675	36.8458	0.9724	**36.8946**	**0.9723**
20	33.1834	0.9489	31.3989	0.9350	33.9403	0.9507	34.8905	0.9577	**34.9791**	**0.9580**
30	31.3401	0.9297	30.3571	0.9270	32.5329	0.9349	33.6546	0.9449	**34.8405**	**0.9449**
40	29.6708	0.9020	29.1564	0.9039	31.4210	0.9179	32.4779	0.9300	**32.4656**	**0.9301**
50	28.1027	0.8663	28.1759	0.8791	30.2811	0.8970	31.3247	0.9117	**31.2956**	**0.9118**
60	25.9320	0.8085	27.2608	0.8519	29.0201	0.8699	30.1303	0.8904	**30.0525**	**0.8898**

Table 3. Evaluation index results of different algorithms at different density levels (10%~60%) (Image 03)
表 3. 不同算法在不同密度水平(10%~60%)下的评价指标结果(Image 03)

ND (%)	AMF		NNFM		l_0-TV		l_0-OGSTV		OURS	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	38.1864	0.9831	36.7964	0.9858	37.4577	0.9805	40.0167	0.9863	**40.2065**	**0.9865**

续表

20	35.4793	0.9740	33.9972	0.9721	34.8694	0.9676	37.5283	0.9768	**37.7201**	**0.9770**
30	33.1512	0.9605	32.3487	0.9587	33.2388	0.9558	35.8514	0.9679	**36.0107**	**0.9683**
40	31.0538	0.9416	30.9422	0.9441	32.1069	0.9426	34.4933	0.9575	**34.6443**	**0.9580**
50	29.1681	0.9169	29.6984	0.9277	30.8585	0.9271	33.1024	0.9454	**33.2076**	**0.9460**
60	26.8051	0.8689	28.5994	0.9086	29.3191	0.9019	31.4362	0.9261	**31.5489**	**0.9272**

通过观察图 2 可以看出，图像在脉冲噪声浓度不大的情况下，四种不同的算法都可以去除噪声，并且可以较好地保存图像细节。但是观察图 2(b)可以看出，AMF 处理后的图像会变得模糊，而相比于图 2(b)，不难看出图 2(c)经过 NNFM 处理后，可以更好地解决去噪过程中图像出现模糊的问题，但是图像飞机场跑道以及边界恢复效果不是很好，仍然有噪声存在。我们可以看出图 2(d)和图 2(e)的 l_0-TV 方法和 l_0-OGSTV 对于图像飞机场跑道部分恢复效果有明显提高，但是图像边界部分仍然存在伪影。而我们提出的方法基本上可以去除掉噪声和消除伪影，且能更好地恢复边界细节，并且在 PSNR 和 SSIM 值上也高于其它四种算法，见表 1。

通过对商业街道图像的边缘区域进行视觉检测，如图 3(b)和图 3(c)所示，可以看出本文提出的方法在恢复体育场图像细节方面优于 AMF 和 NNFM 方法。值得注意的是，AMF 和 NNFM 方法的处理会使图像部分区域仍然存在噪声，而通过观察图 3(d)和图 3(e)可以看出 l_0-TV 和 l_0-OGSTV 方法可以更好地去除噪声，但是在边缘区域仍然存在伪影。此外，图 3(f)清楚地表明，本文提出的方法有效地去除了脉冲噪声，同时保持了图像边缘纹理，且在评价指标的数值上也有所体现，见表 7。

Table 4. Evaluation index results of different algorithms at different density levels (10%~60%) (Image 04)
表 4. 不同算法在不同密度水平(10%~60%)下的评价指标结果(Image 04)

ND (%)	AMF		NNFM		l_0-TV		l_0-OGSTV		OURS	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	41.3157	0.9884	39.9195	0.9897	42.6721	0.9901	44.3479	0.9926	**44.5195**	**0.9928**
20	38.8005	0.9825	37.1438	0.9799	40.4333	0.9839	42.0974	0.9877	**42.2395**	**0.9879**
30	36.4474	0.9732	35.5556	0.9709	38.5943	0.9774	40.3680	0.9825	**40.4638**	**0.9827**
40	34.3230	0.9599	34.3858	0.9621	36.9858	0.9691	38.9577	0.9767	**39.0587**	**0.9770**
50	32.3132	0.9412	33.4305	0.9520	35.5324	0.9586	37.3699	0.9684	**37.4109**	**0.9686**
60	29.0613	0.9023	32.4219	0.9399	33.8233	0.9429	35.6010	0.9568	**35.6275**	**0.9570**

Table 5. Evaluation index results of different algorithms at different density levels (10%~60%) (Image 05)
表 5. 不同算法在不同密度水平(10%~60%)下的评价指标结果(Image 05)

ND (%)	AMF		NNFM		l_0-TV		l_0-OGSTV		OURS	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	33.5803	0.9745	31.2754	0.9764	36.7674	0.9905	40.2322	0.9951	**40.6434**	**0.9953**
20	30.9291	0.9618	29.0455	0.9750	32.8990	0.9781	36.1621	0.9880	**36.3551**	**0.9882**
30	28.6557	0.9420	27.4577	0.9363	30.6116	0.9619	33.5725	0.9776	**33.6674**	**0.9779**
40	26.6557	0.9156	26.2591	0.9156	28.7185	0.9414	**31.2130**	**0.9624**	31.1873	0.9623
50	25.7917	0.8795	25.2685	0.8927	27.1551	0.9145	**29.3214**	**0.9415**	29.1802	0.9405
60	23.0405	0.8208	24.2825	0.8658	25.5741	0.8765	**27.5299**	**0.9131**	27.1971	0.9099

Table 6. Evaluation index results of different algorithms at different density levels (10%~60%) (Image 06)
表 6. 不同算法在不同密度水平(10%~60%)下的评价指标结果(Image 06)

ND (%)	AMF		NNFM		l_0 -TV		l_0 -OGSTV		OURS	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	30.2816	0.9228	26.8233	0.9035	36.1704	0.9853	37.6296	0.9891	**37.7927**	**0.9893**
20	28.7402	0.9033	25.7886	0.8699	32.5357	0.9637	34.0084	0.9732	**34.1159**	**0.9734**
30	26.7880	0.8691	24.8674	0.8348	30.0446	0.9340	31.4417	0.9495	**31.5436**	**0.9499**
40	25.3026	0.8250	24.0212	0.7977	28.2199	0.8943	29.4656	0.9149	**29.5419**	**0.9154**
50	23.7812	0.7682	23.2583	0.7568	26.5512	0.8426	27.7201	0.8685	**27.7858**	**0.8692**
60	22.2113	0.6922	22.4616	0.7102	25.0505	0.7761	26.1940	0.8114	**26.2189**	**0.8119**

通过比较图 4 所示的教堂图像中房顶区域的视觉质量，可以明显看出，本研究提出的方法在捕捉房屋边缘细节方面表现出色，优于其他方法。AMF 和 NNFM 方法在去除噪声的过程中仍存在伪影，并且还留有部分噪声未去除。而本文方法在保留教堂边界的细节方面表现出优越的能力，并且梯度伪影抑制能力更为明显，且在数值结果上优于其它四种算法，见表 6。

Table 7. Evaluation index results of different algorithms at different density levels (10%~60%) (Image 07)
表 7. 不同算法在不同密度水平(10%~60%)下的评价指标结果(Image 07)

ND (%)	AMF		NNFM		l_0 -TV		l_0 -OGSTV		OURS	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	38.6161	0.9809	35.3577	0.9751	40.6558	0.9846	42.1039	0.9883	**42.2142**	**0.9885**
20	36.0397	0.9691	33.6355	0.9594	38.3553	0.9754	39.8262	0.9808	**39.9405**	**0.9811**
30	33.7753	0.9517	32.4033	0.9431	36.5690	0.9653	38.0976	0.9726	**38.1587**	**0.9729**
40	31.7791	0.9272	31.2754	0.9265	35.0286	0.9527	36.5913	0.9632	**36.6395**	**0.9635**
50	30.0133	0.8954	30.3078	0.9076	33.4074	0.9359	35.0240	0.9505	**35.1016**	**0.9511**
60	27.3885	0.8421	29.2087	0.8844	31.5860	0.9108	33.3808	0.9335	**33.4590**	**0.9343**

Table 8. Evaluation index results of different algorithms at different density levels (10%~60%) (Image 08)
表 8. 不同算法在不同密度水平(10%~60%)下的评价指标结果(Image 08)

ND (%)	AMF		NNFM		l_0 -TV		l_0 -OGSTV		OURS	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	42.4882	0.9907	36.8547	0.9860	43.5801	0.9894	45.1743	0.9919	**45.6352**	**0.9921**
20	39.4442	0.9849	35.3957	0.9777	41.4466	0.9840	43.0504	0.9875	**43.5852**	**0.9884**
30	37.0059	0.9754	34.1668	0.9678	39.8384	0.9781	41.6387	0.9831	**42.0620**	**0.9841**
40	32.6700	0.9630	33.1096	0.9571	38.1855	0.9713	40.4359	0.9788	**40.7819**	**0.9796**
50	32.6720	0.9443	32.1961	0.9482	36.8176	0.9629	39.1907	0.9730	**39.3935**	**0.9739**
60	29.6331	0.9068	31.5237	0.9345	34.8508	0.9506	37.3188	0.9650	**37.7388**	**0.9662**

Table 9. Evaluation index results of different algorithms at different density levels (10%~60%) (Image 09)
表 9. 不同算法在不同密度水平(10%~60%)下的评价指标结果(Image 09)

ND (%)	AMF		NNFM		l_0 -TV		l_0 -OGSTV		OURS	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
10	33.6372	0.9521	28.8733	0.9516	35.8022	0.9663	37.0898	0.9724	**37.1080**	**0.9725**
20	31.3748	0.9355	27.7039	0.9237	33.4953	0.9467	34.9315	0.9561	**34.9842**	**0.9563**
30	29.2126	0.9085	26.7600	0.8965	31.7315	0.9248	33.1468	0.9378	**33.2321**	**0.9380**
40	27.3701	0.8728	25.8908	0.8666	30.1865	0.8996	31.6362	0.9170	**31.7218**	**0.9174**
50	25.8212	0.8273	25.0977	0.8348	28.7745	0.8682	30.2326	0.8917	**30.3473**	**0.8921**
60	23.8153	0.7569	24.1709	0.7964	27.2301	0.8269	28.6359	0.8586	**28.7093**	**0.8592**

5. 结论

本文通过融合自适应中值滤波技术和组稀疏模型，设计了基于改进重叠组稀疏的模型，以有效地消除遥感图像的脉冲噪声。该模型首先利用改进的自适应中值滤波去除遥感图像中大部分脉冲噪声，并利用梯度域导向滤波保留图像边缘信息；利用自适应中值滤波计算噪声掩模矩阵，并利用该噪声掩模矩阵提高重叠组稀疏模型对脉冲噪声去除的能力，并消除图像中的梯度伪影。本文方法在有效地保留图像边缘的同时减少了梯度伪影，并且数值实验结果表明，我们提出的模型在 PSNR 和 SSIM 数值方面优于其它四种算法。

基金项目

吉林省自然科学基金，NO.20240101298JC；国家自然科学基金，NO.12171054。

参考文献

[1] Hwang, H. and Haddad, R.A. (1995) Adaptive Median Filters: New Algorithms and Results. *IEEE Transactions on Image Processing*, **4**, 499-502. https://doi.org/10.1109/83.370679

[2] Enginoğlu, S., Erkan, U. and Memiş, S. (2019) Pixel Similarity-Based Adaptive Riesz Mean Filter for Salt-and-Pepper Noise Removal. *Multimedia Tools and Applications*, **78**, 35401-35418. https://doi.org/10.1007/s11042-019-08110-1

[3] Zhang, P. and Li, F. (2014) A New Adaptive Weighted Mean Filter for Removing Salt-and-Pepper Noise. *IEEE Signal Processing Letters*, **21**, 1280-1283. https://doi.org/10.1109/lsp.2014.2333012

[4] Thanh, D.N.H., Hien, N.N., Kalavathi, P. and Prasath, V.B.S. (2020) Adaptive Switching Weight Mean Filter for Salt and Pepper Image Denoising. *Procedia Computer Science*, **171**, 292-301. https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.04.031

[5] Wang, Y., Wang, J., Song, X. and Han, L. (2016) An Efficient Adaptive Fuzzy Switching Weighted Mean Filter for Salt-and-Pepper Noise Removal. *IEEE Signal Processing Letters*, **23**, 1582-1586. https://doi.org/10.1109/lsp.2016.2607785

[6] Khan, K.B., Shahid, M., Ullah, H., Rehman, E. and Khan, M.M. (2018) Adaptive Trimmed Mean Autoregressive Model for Reduction of Poisson Noise in Scintigraphic Images. *IIUM Engineering Journal*, **19**, 68-79. https://doi.org/10.31436/iiumej.v19i2.835

[7] Singh, A., Sethi, G. and Kalra, G.S. (2020) Spatially Adaptive Image Denoising via Enhanced Noise Detection Method for Grayscale and Color Images. *IEEE Access*, **8**, 112985-113002. https://doi.org/10.1109/access.2020.3003874

[8] Mújica-Vargas, D., de Jesús Rubio, J., Kinani, J.M.V. and Gallegos-Funes, F.J. (2017) An Efficient Nonlinear Approach for Removing Fixed-Value Impulse Noise from Grayscale Images. *Journal of Real-Time Image Processing*, **14**, 617-633. https://doi.org/10.1007/s11554-017-0746-8

[9] Enginoğlu, S., Erkan, U. and Memiş, S. (2019) Pixel Similarity-Based Adaptive Riesz Mean Filter for Salt-and-Pepper Noise Removal. *Multimedia Tools and Applications*, **78**, 35401-35418. https://doi.org/10.1007/s11042-019-08110-1

[10] Li, Z., Liu, G., Xu, Y. and Cheng, Y. (2014) Modified Directional Weighted Filter for Removal of Salt & Pepper Noise. *Pattern Recognition Letters*, **40**, 113-120. https://doi.org/10.1016/j.patrec.2013.12.022

[11] Lone, M.R. and Khan, E. (2022) A Good Neighbor Is a Great Blessing: Nearest Neighbor Filtering Method to Remove Impulse Noise. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, **34**, 9942-9952. https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2021.12.020

[12] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E. (1992) Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **60**, 259-268. https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-f

[13] Liu, J., Huang, T., Selesnick, I.W., Lv, X. and Chen, P. (2015) Image Restoration Using Total Variation with Overlapping Group Sparsity. *Information Sciences*, **295**, 232-246. https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.10.041

[14] Shi, M., Han, T. and Liu, S. (2016) Total Variation Image Restoration Using Hyper-Laplacian Prior with Overlapping Group Sparsity. *Signal Processing*, **126**, 65-76. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.11.022

[15] Selesnick, I.W. and Chen, P. (2013) Total Variation Denoising with Overlapping Group Sparsity. 2013 *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vancouver, 26-31 May 2013, 5696-5700. https://doi.org/10.1109/icassp.2013.6638755

[16] Adam, T. and Paramesran, R. (2018) Image Denoising Using Combined Higher Order Non-Convex Total Variation with Overlapping Group Sparsity. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, **30**, 503-527. https://doi.org/10.1007/s11045-018-0567-3

[17] Adam, T. and Paramesran, R. (2019) Hybrid Non-Convex Second-Order Total Variation with Applications to Non-Blind Image Deblurring. *Signal, Image and Video Processing*, **14**, 115-123. https://doi.org/10.1007/s11760-019-01531-3

[18] Adam, T., Paramesran, R., Mingming, Y. and Ratnavelu, K. (2021) Combined Higher Order Non-Convex Total Variation with Overlapping Group Sparsity for Impulse Noise Removal. *Multimedia Tools and Applications*, **80**, 18503-18530. https://doi.org/10.1007/s11042-021-10583-y

[19] Rodríguez, P. (2013) Total Variation Regularization Algorithms for Images Corrupted with Different Noise Models: A Review. *Journal of Electrical and Computer Engineering*, **2013**, 1-18. https://doi.org/10.1155/2013/217021

[20] Gao, Y., Liu, F. and Yang, X. (2017) Total Generalized Variation Restoration with Non-Quadratic Fidelity. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, **29**, 1459-1484. https://doi.org/10.1007/s11045-017-0512-x

[21] Wang, Y., Yang, J., Yin, W. and Zhang, Y. (2008) A New Alternating Minimization Algorithm for Total Variation Image Reconstruction. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **1**, 248-272. https://doi.org/10.1137/080724265

[22] Chan, R.H., Tao, M. and Yuan, X. (2013) Constrained Total Variation Deblurring Models and Fast Algorithms Based on Alternating Direction Method of Multipliers. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **6**, 680-697. https://doi.org/10.1137/110860185

[23] Chan, S.H., Khoshabeh, R., Gibson, K.B., Gill, P.E. and Nguyen, T.Q. (2011) An Augmented Lagrangian Method for Total Variation Video Restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, **20**, 3097-3111. https://doi.org/10.1109/tip.2011.2158229

[24] Liu, Q., Yang, C., Gu, Y. and So, H.C. (2018) Robust Sparse Recovery via Weakly Convex Optimization in Impulsive Noise. *Signal Processing*, **152**, 84-89. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2018.05.020

[25] Wen, F., Pei, L., Yang, Y., Yu, W. and Liu, P. (2017) Efficient and Robust Recovery of Sparse Signal and Image Using Generalized Nonconvex Regularization. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, **3**, 566-579. https://doi.org/10.1109/tci.2017.2744626

[26] Yuan, G. and Ghanem, B. (2019) TV: A Sparse Optimization Method for Impulse Noise Image Restoration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **41**, 352-364. https://doi.org/10.1109/tpami.2017.2783936

[27] Gong, P., Zhang, C., Lu, Z., Huang, J. and Ye, J. (2013) A General Iterative Shrinkage and Thresholding Algorithm for Non-Convex Regularized Optimization Problems. *Proceedings of the* 30*th International Conference on International Conference on Machine Learning*, Atlanta, 16-21 June 2013, 37-45.

[28] Kuang, S., Chao, H. and Li, Q. (2018) Matrix Completion with Capped Nuclear Norm via Majorized Proximal Minimization. *Neurocomputing*, **316**, 190-201. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.07.066

[29] Yin, M., Adam, T., Paramesran, R. and Hassan, M.F. (2022) An ℓ_0-Overlapping Group Sparse Total Variation for Impulse Noise Image Restoration. *Signal Processing*: *Image Communication*, **102**, Article 116620. https://doi.org/10.1016/j.image.2021.116620

[30] Liu, G., Huang, T., Liu, J. and Lv, X. (2015) Total Variation with Overlapping Group Sparsity for Image Deblurring under Impulse Noise. *PLOS ONE*, **10**, e0122562. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0122562