Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(7), 3554-3569
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.137339

Hans汉斯

探究多变量不等式的证明

聂思兵，魏　齐，秦靖玻，李晓琪，李张世佳，黄黎明

内江职业技术学院通识与公共服务学院，四川 内江

收稿日期：2024年6月27日；录用日期：2024年7月21日；发布日期：2024年7月29日

摘　要

多变量问题如何消元，构造合适的一元函数是难点，根据特点构造合适的函数体现了学生对美学的认识，创新性。消元法中的整体换元法：若两个变量存在确定的关系，可以利用其中一个变量替换另一个变量，直接消元，将两个变量转化为一个变量。若两个变量不存在确定的关系，有时可以将两个变量之间的关系看成一个整体(比如 $t=\frac{x_1}{x_2}$， $t=x_1-x_2$)等策略，将两个变量划归为一个变量整体换元，化为一元不等式。

关键词

多变量不等式，消元法，数学核心素养

Exploring the Proof of Multivariate Inequalities

Sibing Nie, Qi Wei, Jingbo Qin, Xiaoqi Li, Zhangshijia Li, Liming Huang

School of General Studies and Public Service, Neijiang Vocational and Technical College, Neijiang Sichuan

Received: Jun. 27th, 2024; accepted: Jul. 21st, 2024; published: Jul. 29th, 2024

Abstract

How to eliminate variables in multivariate problems and construct appropriate univariate functions are difficult points. Constructing appropriate functions according to characteristics reflects students' understanding of aesthetics and innovation. The overall substitution method in the elimination method: If there is a definite relationship between two variables, one variable can be used to replace the other variable, directly eliminate the variables, and transform the two variables into one variable. If there is no definite relationship between the two variables, sometimes

文章引用：聂思兵，魏齐，秦靖玻，李晓琪，李张世佳，黄黎明．探究多变量不等式的证明[J]．应用数学进展，2024, 13(7): 3554-3569. DOI: 10.12677/aam.2024.137339

the relationship between the two variables can be regarded as a whole (such as $t=\frac{x_1}{x_2}$, $t=x_1-x_2$) and other strategies to classify the two variables as one variable and replace the variables as a whole, and transform them into a univariate inequality.

Keywords

Multivariate Inequality, Elimination Method, Mathematical Core Literacy

1. 引言

多变量问题如何运用切线放缩法实质就是利用函数的图像性质解决一类多元的问题向一元函数不等式转化。此时，可以选择先求二阶导看凹凸性，判断这个函数是否能使用切线法，或者能够被用得比较好。也可以直接选择求一阶导，把等号取得条件的切线值求出来，对应不等式常数项配最后的常数系数。其本质相当于求这个一元函数在等号取到条件时(也就是文中的平衡点)的切线值，进一步求对于这个一元函数相对应的某个局部不等式。

引理：当 $n>m>0$ 时，$\ln m-\ln n>\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$。

简证：令 $y=\ln t+t-\frac{1}{t},(t>1)$；$y'=\frac{1}{t}+1+\frac{1}{t^2}=\frac{t^2+t+1}{t^2}=\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{t^2}>0$

$y=\ln t+t-\frac{1}{t},(t>1)\uparrow$；$\ln t+t-\frac{1}{t}>\ln 1+1-\frac{1}{1}=0$；$\ln t>\frac{1}{t}-t$

取 $\frac{n}{m}=t,(n>m>0)$ 则 $\ln m-\ln n>\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$。

引理：$m>n>0$，求证：$\ln m-\ln n>\frac{2(m-n)}{m+n}$。

简证：$y=\ln t-2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\ln t-2\left[\frac{(t+1)-2}{t+1}\right]=\ln t-2\left(1-\frac{2}{t+1}\right)=\ln t+\frac{4}{t+1}-2,\ (t>1)$，

$y'=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0,$

$y=\ln t-2\left(\frac{t-1}{t+1}\right),(t>1)\uparrow$；$\ln t-2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)>0$；取 $t=\frac{m}{n},(m>n>0)$

得 $\ln m-\ln n>\frac{2(m-n)}{m+n}$。

引理：$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$。

简证：$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}$，

不妨设 $a>b>0$

$$\ln a-\ln b<\frac{a-b}{\sqrt{ab}};\ln t<\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),(t>1)$$

$$y=\ln t-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Rightarrow y'=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}=\frac{-t^2+2t-1}{2t^2}=\frac{-(t-1)^2}{2t^2}<0$$

$y=\ln t-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),(t>1)\downarrow$ 则 $\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}$，要证明：$\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$

$\ln t<\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$

不妨设 $a>b>0$ 令 $y=\ln t-2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\ln t-2\left[\frac{(t+1)-2}{t+1}\right]=\ln t-2\left(1-\frac{2}{t+1}\right)=\ln t+\frac{4}{t+1}-2,(t>1)$，

$$y'=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0,$$

$y=\ln t-2\left(\frac{t-1}{t+1}\right),(t>1)\uparrow$；$\ln t-2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)>0$ 取 $t=\frac{a}{b},(a>b>0)$

得 $\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$ 综上：$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$。

引理：$\frac{a}{a+b}<\ln\frac{a+b}{b}<\frac{a}{b}$。$(a>0,b>0)$

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}<\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)<\frac{a}{b}$，令 $t=\frac{a}{b}$，

$$y=\ln(t+1)-t\Rightarrow y'=\frac{1}{t+1}-1=\frac{-t}{t+1}<0.y=\ln(t+1)-t,(t>0)\downarrow;\ln(t+1)<t$$

$$y=\ln(t+1)-\frac{t}{t+1}\Rightarrow y'=\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}=\frac{t}{(t+1)^2}>0$$

$$y=\ln(t+1)-\frac{t}{t+1},(t>0)\uparrow;\ln(t+1)>\frac{t}{t+1}$$

综上 $\frac{a}{a+b}<\ln\frac{a+b}{b}<\frac{a}{b}$。$(a>0,b>0)$

2. 案例分析

1) 已知函数 $f(x)=xe^{-x}(x\in\mathbf{R})$。若 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$x_1+x_2>2$。

证明：路一：$f(x)=\frac{x}{e^x}$ 在 $(-\infty,1)\uparrow,(1,+\infty)\downarrow$

由 $f(x_1)=f(x_2)$，不妨设 $0<x_1<1<x_2$

构造函数 $g(x)=f(2-x)-f(x)$，

$$g'(x)=-f'(2-x)-f'(x),(1>x>0)$$

$$=\frac{-x+1}{e^{-x+2}}+\frac{-1+x}{e^x}=(-1+x)\left(\frac{-1}{e^{-x+2}}+\frac{1}{e^x}\right)=(-1+x)\frac{e^{-x+2}-e^x}{e^2}<0$$

$g(x)=f(2-x)-f(x)$, $1>x>0\downarrow$ 则 $g(x_1)=f(2-x_1)-f(x_1)>g(1)=0$

由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得 $f(2-x_1)>f(x_2)$

由 $2-x_1>1, x_2>1; f(x),(1,+\infty)\downarrow$ 得 $2-x_1<x_2$，得：$x_1+x_2>2$。

路二：由引理：$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$。和 $\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$ 两边取对数得：

$\ln x_2-\ln x_1=x_2-x_1$ 则：$1=\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\dfrac{x_2+x_1}{2}$，得：$x_1+x_2>2$。

路三：

$\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$ 两边取对数得：$\ln x_2-\ln x_1=x_2-x_1$，

$$\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=x_2-x_1, t=\frac{x_2}{x_1}\Rightarrow x_2=tx_1, \ln t=tx_1-x_1=(t-1)x_1, x_1=\frac{\ln t}{t-1}\Rightarrow x_2=tx_1=\frac{t\ln t}{t-1}$$

则：$x_2+x_1=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$，

$$y=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$$

令

$$y'=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$$

由 $t-\dfrac{1}{t}-2\ln t>0,(t>1); t-\dfrac{1}{t}-2\ln t<0,(0<t<1)$

得

$$y=\frac{t+1}{t-1}\cdot\ln t,(0<t<1)\downarrow;(t>1)\uparrow$$

$$\lim_{t\to1}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{t\to1}\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}=(\ln t)'\Big|_{t=1}=1$$

$$\lim_{t\to1}\frac{\ln t}{t-1}\cdot\lim_{t\to1}(t+1)=2$$

$$x_1+x_2>2$$

评注：此法用到了导数定义求值，避开了罗比达法则不算超纲，课本上有导数定义，没有罗比达法则，笔者建议用好教材教学，$\dfrac{t+1}{t-1}\cdot\ln t>2$ 也可作为常用不等式结论记忆。

2) 已知函数 $g(x)=\ln x-mx$ 有两个零点 x_1, x_2。求证：$x_1\cdot x_2>e^2$

证明：路一、所证不等式 $x_1x_2>e^2\Leftrightarrow x_1>\dfrac{e^2}{x_2}$，因为函数 $g(x)=\ln x-mx$ 有两个零点 x_1, x_2

$\therefore x_1, x_2$ 满足方程 $m=\dfrac{\ln x}{x}$，易得：$0<x_1<e<x_2$。

考虑设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$\therefore f(x_1)=f(x_2)$，易得 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 单调递减，在 $(e,+\infty)$ 单调递增。

$\because 0<x_1<e<x_2$，$\therefore x_1\in(0,e), \dfrac{e^2}{x_2}\in(0,e)$。结合 $f(x)$ 的单调性可知：只需证明 $f(x_1)<f\left(\dfrac{e^2}{x_2}\right)$。

$\because f(x_1)=f(x_2)$，所以只需证明：$f(x_2)<f\left(\dfrac{e^2}{x_2}\right)\Leftrightarrow f(x_2)-f\left(\dfrac{e^2}{x_2}\right)<0$。

即证明：$\dfrac{\ln\dfrac{e^2}{x_2}}{\dfrac{e^2}{x_2}}-\dfrac{\ln x_2}{x_2}<0\Leftrightarrow x_2\ln\dfrac{e^2}{x_2}-\dfrac{e^2}{x_2}\ln x_2<0\Leftrightarrow 2x_2^2-\left(x_2^2+e^2\right)\ln x_2<0$。

设 $h(x)=2x^2-\left(x^2+e^2\right)\ln x,\ x\in(e,+\infty)$，则 $h(e)=0$。

$\therefore h'(x)=4x-\dfrac{1}{x}\left(x^2+e^2\right)-2x\ln x=3x-\dfrac{e^2}{x}-2x\ln x$，则 $h'(e)=0$。

$\therefore h''(x)=3+\dfrac{e^2}{x^2}-2(1+\ln x)=1+\dfrac{e^2}{x^2}-2\ln x$，则 $h''(e)=0$。

$\because h''(x)$ 单调递减，$\therefore h''(x)<h''(e)=0$，$\therefore h'(x)$ 单调递减，$\therefore h'(x)<h'(e)=0$。

$\therefore h(x)$ 单调递减，$\therefore h(x)<h(e)=0$，即 $2x_2^2-\left(x_2^2+e^2\right)\ln x_2<0$ 得证。

$\therefore f(x_1)<f\left(\dfrac{e^2}{x_2}\right)$ 得证，从而有 $x_1>\dfrac{e^2}{x_2}\Leftrightarrow x_1x_2>e^2$。

路二、由引理：$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$ 和 $\begin{cases}\ln x_1-mx_1=0, & ①\\ \ln x_2-mx_2=0, & ②\end{cases}$ 得：

$\dfrac{1}{m}=\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$，由 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，易得 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 单调递减，在 $(e,+\infty)$ 单调递增。得 $m\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$，$e<\dfrac{1}{m}=\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\dfrac{x_2+x_1}{2}$。$m(x_1+x_2)>2\Rightarrow \ln x_1+\ln x_2>2$，得 $x_1x_2>e^2$

路三、欲证 $x_1x_2>e^2$，只需证 $\ln x_1+\ln x_2>2$。

由函数 $g(x)$ 有两个零点，又 $g(x)=\ln x-mx$，

所以 x_1，x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个不同实根。于是有 $\begin{cases}\ln x_1-mx_1=0, & ①\\ \ln x_2-mx_2=0, & ②\end{cases}$

1) +②可得 $\ln x_1+\ln x_2=m(x_1+x_2)$，即 $m=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}$，

2) −①可得 $\ln x_2-\ln x_1=m(x_2-x_1)$，即 $m=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

从而可得 $\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}$，于是 $\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{\left(1+\dfrac{x_2}{x_1}\right)\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{\dfrac{x_2}{x_1}-1}$。

由 $0<x_1<x_2$，设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，则 $t>1$。因此 $\ln x_1+\ln x_2=\dfrac{(1+t)\ln t}{t-1}$，$t>1$。

要证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，即证 $\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}>2\ (t>1)$，即证当 $t>1$ 时，有 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$。令 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以 $h(t)$ 为 $(1,+\infty)$ 上的增函数。因此 $h(t)>\ln 1-\dfrac{2(1-1)}{1+1}=0$。

于是当$t>1$时，有$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$。所以有$\ln x_1+\ln x_2>2$成立，即$x_1x_2>e^2$。

评注：也可以通过令$t=\dfrac{x_2}{x_1},x_2=tx_1,\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}\Rightarrow \ln x_1=\dfrac{\ln t}{t-1},\ln x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1}$

欲证$x_1x_2>e^2$，只需证$\ln x_1+\ln x_2>2$，只要证明：$\dfrac{t+1}{t-1}\cdot\ln t>2$。

3) 已知函数$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^2}e^x$。证明：当$f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$时，$x_1+x_2<0$。

证明：路一：构造函数$F(x)=f(x)-f(-x)$，$x\in(0,+\infty)$，代入化简得$F(x)=\dfrac{(1-x)e^x-\dfrac{1+x}{e^x}}{1+x^2}$。

再次局部构造辅助函数，令$G(x)=(1-x)e^x-\dfrac{1+x}{e^x}$，求导得$G'(x)=-xe^{-x}\left(e^{2x}-1\right)$。

当$x\in(0,+\infty)$时，$G'(x)<0$，即$G(x)$是$(0,+\infty)$上的单调减函数。于是$G(x)<G(0)=0$，则$F(x)<0$。

即$F(x)=f(x)-f(-x)<0$。所以$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)<f(-x)$。

由$x_2\in(0,+\infty)$，则$f(x_2)<f(-x_2)$。又$f(x_1)=f(x_2)$，即得$f(x_1)<f(-x_2)$。

根据(1)知$f(x)$是$(-\infty,0)$上的单调增函数，而$x_1\in(-\infty,0)$，$-x_2\in(-\infty,0)$，

所以$x_1<-x_2$，故$x_1+x_2<0$得证。

路二：不妨设$x_1<x_2$，要证明$x_1+x_2<0$，即$x_1<-x_2<0$，只需证明$f(x_1)<f(-x_2)$，

因为$f(x_1)=f(x_2)$，即$f(x_2)<f(-x_2)$。

而$f(x_2)<f(-x_2)$等价于$(1-x_2)e^{2x_2}-1-x_2<0$，$x\in(0,+\infty)$，

令$g(x)=(1-x)e^{2x}-1-x(x>0)$，又$g'(x)=(1-2x)e^{2x}-1$，

令$h(x)=(1-2x)e^{2x}-1$，则$h'(x)=-4xe^{2x}<0$，所以$h(x)$单调递减，$h(x)<h(0)=0$，即$g'(x)<0$，所以$g(x)$单调递减，所以$g(x)<g(0)=0$，得证。

路三：先证明：$x\in(0,+\infty)$，$f(x)<f(-x)$，即证$\dfrac{1-x}{1+x^2}e^x<\dfrac{1+x}{1+x^2}e^x$，

此不等式等价于$(1-x)e^x-\dfrac{1+x}{e^x}<0$。

令$g(x)=(1-x)e^x-\dfrac{1+x}{e^x}$，则$g'(x)=-xe^{-x}\left(e^{2x}-1\right)$。

当$x\in(0,+\infty)$，$g(x)<0$，$g(x)$单调递减，从而$g(x)<g(0)=0$，即$(1-x)e^x-\dfrac{1+x}{e^x}<0$。

所以$x\in(0,+\infty)$，$f(x)<f(-x)$，而$x_2\in(0,+\infty)$，所以$f(x_2)<f(-x_2)$，从而$f(x_1)<f(-x_2)$。

由于$x_1,-x_2\in(-\infty,0)$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，所以$x_1<-x_2$，即$x_1+x_2<0$。

评注：讨论不等式时可分而治之，判断出与零的大小关系。

4) 若函数$g(x)=e^x-2ax-a(a>0)$恰有两个不同的零点x_1,x_2，证明：$1<x_1+x_2<2\ln 2a$。

证明：路一：由引理：$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$。

取$a=e^{x_1},b=e^{x_2}$得$\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}>\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}>\sqrt{e^{x_1+x_2}}$

又$\begin{cases}e^{x_1}-2ax_1-a=0\\e^{x_2}-2ax_2-a=0\end{cases}$得：$\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}=2a,\ e^{x_1}+e^{x_2}=2a(x_1+x_2)+2a$

$a(x_1+x_2)+a>2a>\sqrt{e^{x_1+x_2}}$，即：$1<x_1+x_2<2\ln 2a$。

路二：不等式左边：

$\begin{cases} e^{x_2}=a(2x_2+1) \\ e^{x_1}=a(2x_1+1) \end{cases}$ 两式相除得：$\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}=\dfrac{2x_2+1}{2x_1+1}$ 整理得 $\dfrac{e^{2x_2+1}}{e^{2x_1+1}}=\left(\dfrac{2x_2+1}{2x_1+1}\right)^2$

令 $\lambda_1=2x_1+1,\lambda_2=2x_2+1$ 得 $\dfrac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1}}=\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2$ 两边取对数得：$\lambda_2-\lambda_1=2\ln\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$

令 $t=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$，得 $\lambda_1=\dfrac{2\ln t}{t-1},\lambda_2=\dfrac{2t\ln t}{t-1}$　$x_1+x_2=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-1=\dfrac{t+1}{t-1}\ln t-1>2-1=1$。

不等式右边：

由 $2a=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$。所证不等式右边等价于：$\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}\Leftrightarrow e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$，不妨设 $x_1>x_2$，两边同除以 e^{x_2} 可得：$e^{\frac{x_1-x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_1-x_2}-1}{x_1-x_2}$。令 $t=x_1-x_2$　$t\in(0,+\infty)$。

所证不等式只需证明：$e^{\frac{t}{2}}<\dfrac{e^t-1}{t}\Leftrightarrow te^{\frac{t}{2}}-e^t+1<0$，设 $p(x)=te^{\frac{t}{2}}-e^t+1$，$p'(x)=-e^{\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}}-\left(\dfrac{t}{2}+1\right)\right)$

由 $e^x\geq x+1$ 可得：$e^{\frac{t}{2}}-\left(\dfrac{t}{2}+1\right)\geq 0$，$\therefore p'(x)\leq 0$，

$\therefore p(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$p(t)<p(0)=0$，$\therefore$ 原不等式成立，即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln 2a$

综上：$1<x_1+x_2<2\ln 2a$。

评注：此方法用到了齐次构造，$\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}=\dfrac{2x_2+1}{2x_1+1}$ 整理为 $\dfrac{e^{2x_2+1}}{e^{2x_1+1}}=\left(\dfrac{2x_2+1}{2x_1+1}\right)^2$ 是一个创新点。对 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$ 的处理，此时对数部分无法再做变形，两边取指数，而后同除以 e^{x_2}，使得不等式的左右都是以 x_1-x_2 为整体的表达式，再利用整体换元转化为一元不等式是亮点。

5) 已知函数 $f(x)=\dfrac{m}{x}+\dfrac{1}{2}\ln x-1(m\in\mathbf{R})$ 的两个零点为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$。求证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{e}$。

证明：路一：易得 m 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{e}{2}\right)$。做变量替换令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $f(t)=mt-\dfrac{1}{2}\ln t-1$，由题意知方程 $mt-2\ln t-1=0$ 有两个根 t_1，t_2，即方程 $m=\dfrac{\ln t+2}{2t}$ 有两个根 t_1，t_2，不妨设 $t_1=\dfrac{1}{x_1}$，$t_2=\dfrac{1}{x_2}$。令 $h(t)=\dfrac{\ln t+2}{2t}$，则 $h'(t)=-\dfrac{\ln t+1}{2t^2}$，

由 $h'(t)>0$ 可得 $0<t<\dfrac{1}{e}$，由 $h'(t)<0$ 可得 $t>\dfrac{1}{e}$，$\therefore t\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$h(t)$ 单调递增，$t\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$h(t)$ 单调递减。

故结合已知有 $t_1>\dfrac{1}{e}>t_2>0$，要证 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{e}$，即证 $t_1+t_2>\dfrac{2}{e}$，即 $t_1>\dfrac{2}{e}-t_2>\dfrac{1}{e}$

即证 $h(t_1)<h\left(\dfrac{2}{e}-t_2\right)$。令 $\phi(x)=h(x)-h\left(\dfrac{2}{e}-x\right)$，

下面证 $\phi(x)<0$ 对任意的 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 恒成立。

$$\phi'(x)=h'(x)+h'\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)=\frac{-\ln x-1}{2x^2}+\frac{-\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)-1}{2\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)^2}。$$

$\because x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，$\therefore -\ln x-1>0$，$x^2<\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)^2$，$\therefore \phi'(x)>\frac{-\ln x-1}{2\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)^2}+\frac{-\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)-1}{2\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)^2}=\frac{-\ln x\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)-2}{2\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)^2}$。

$\because x\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)<\left[\frac{x+\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，$\therefore \phi'(x)>0$，$\therefore \phi(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 是增函数，$\therefore \phi(x)<\phi\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$，原不等式成立。

路二、做变量替换令 $t=\frac{1}{x}$，则 $f(t)=mt-\frac{1}{2}\ln t-1$，的零点为 t_1，t_2。即证 $t_1+t_2>\frac{2}{\mathrm{e}}$

易得 m 的取值范围为 $\left(0,\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$，$\frac{1}{m}\in\left(\frac{2}{\mathrm{e}},+\infty\right)$。$\frac{t_1-t_2}{\ln t_1-\ln t_2}=\frac{1}{2m}$

由引理：$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$。得 $\frac{1}{\mathrm{e}}<\frac{1}{2m}=\frac{t_2-t_1}{\ln t_2-\ln t_1}<\frac{t_2+t_1}{2}$ 即 $\frac{2}{\mathrm{e}}<t_2+t_1$

评论：做变换后 m 的范围不会发生改变，读者要重视这一点。作变量的替换时，一定要标明新变量的范围。

6) 设函数 $f(x)=-\frac{a}{2}\mathrm{e}^{2x}+(x-1)\mathrm{e}^x\,(a\in\mathbf{R})$。若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1、$x_2\,(x_1<x_2)$，证明：$x_1+2x_2>3$。

证明：路一：由题意得 x_1、$x_2\,(x_1<x_2)$ 是方程 $a\mathrm{e}^x=x$ 的两个穿透零点。代入两式相除得 $\mathrm{e}^{x_1-x_2}=\frac{x_1}{x_2}$。

令 $t=\frac{x_1}{x_2},x_1=tx_2$ 代入得 $x_2=\frac{\ln t}{t-1},x_1=\frac{t\ln t}{t-1}$

得：$x_1+2x_2=\frac{(t+2)\ln t}{t-1},(0<t<1)$

$$y=\frac{(t+2)\ln t}{t-1},(0<t<1)\Rightarrow y'=\frac{t+1-\frac{2}{t}-3\ln t}{(t-1)^2}<0$$

$$y=\frac{(t+2)\ln t}{t-1},(0<t<1)\downarrow\left(\frac{(t+2)\ln t}{t-1}>3=\lim_{x\to1}\frac{\ln t}{t-1}\cdot\lim_{x\to1}(t+2)\right)$$

得 $x_1+2x_2>3$。

评注：用到了导数定义求值，避开了洛比达法。

路二、要证：$x_1+2x_2>3$。$\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2>1$ 由于 $x_2>x_1$ 得 $\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2>\frac{x_1+x_2}{2}$ 即证明：$x_1+x_2>2$ 由 $\frac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}=\frac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}$ 两边取对数得：$\ln x_2-\ln x_1=x_2-x_1$，则：$1=\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\frac{x_2+x_1}{2}$，得：$x_1+x_2>2$。得 $x_1+2x_2>3$。

7) 已知函数 $f(x)=\ln x-ax\,(a\in\mathbf{R})$。若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，证明：$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}>2$。

证明：路一：易得 $a\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

$$\begin{cases}\ln x_1 = ax_1 \\ \ln x_2 = ax_2\end{cases} \Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = a(x_1 - x_2) \Rightarrow \frac{1}{\ln x_1} + \frac{1}{\ln x_2} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

要证明：$\dfrac{1}{\ln x_1} + \dfrac{1}{\ln x_2} > 2$。

即证明：$\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} > 2 \Rightarrow \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} > 2a \Rightarrow \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} > 2\dfrac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{x_1 - x_2} \Rightarrow \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} > 2\dfrac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{x_1 - x_2}$,

不妨设 $x_1 > x_2 > 0$

则 $\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{x_1x_2} > 2\ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) \Rightarrow \dfrac{(x_1^2 - x_2^2)}{x_1x_2} > 2\ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} - \dfrac{x_2}{x_1} > 2\ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$

令 $t = \dfrac{x_1}{x_2}, (t>1)$ $y = t - \dfrac{1}{t} - 2\ln t$；$y' = 1 + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t} = \dfrac{t^2 - 2t + 1}{t^2} > 0$；$t - \dfrac{1}{t} > 2\ln t$

则 $\dfrac{1}{\ln x_1} + \dfrac{1}{\ln x_2} > 2$。

路二：作变量替换令 $x = e^{\frac{1}{t}}$ 则 $y = \dfrac{1}{t} - ae^{\frac{1}{t}}$ 的零点为 t_1, t_2

要证明：$\dfrac{1}{\ln x_1} + \dfrac{1}{\ln x_2} > 2$。则证明：$t_1 + t_2 > 2$

由于 $\dfrac{1}{t} = ae^{\frac{1}{t}}$ 两边取对数得 $-\ln t = \ln a + \dfrac{1}{t}$ 代入 $\begin{cases}-\ln t_2 = \ln a + \dfrac{1}{t_2} \\ -\ln t_1 = \ln a + \dfrac{1}{t_1}\end{cases}$ 两式相减得 $-\ln\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{1}{t_2} - \dfrac{1}{t_1}$

令 $\lambda = \dfrac{t_2}{t_1}, -\ln\lambda = \dfrac{1}{\lambda t_1} - \dfrac{1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda\ln\lambda}, t_2 = \dfrac{\lambda^2 - \lambda}{\lambda\ln\lambda}$

$$t_1 + t_2 = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda\ln\lambda};\quad g(\lambda) = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda\ln\lambda}, (0,1)\downarrow; (1,+\infty)\uparrow$$

$$t_1 + t_2 = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda\ln\lambda} > 2 = \lim_{\lambda\to1}\frac{\lambda - 1}{\ln\lambda}\lim_{\lambda\to1}\frac{\lambda + 1}{\lambda}$$

评注：$g(\lambda) = \dfrac{\lambda^2 - 1}{\lambda\ln\lambda}, (0,1)\downarrow; (1,+\infty)\uparrow$。$\dfrac{\lambda^2 - 1}{\lambda\ln\lambda} > 2$ 当作结论记忆。此处也用了导数定义求极限。

路三、作变量替换令 $x = e^{\frac{1}{t}}$ 则 $y = \dfrac{1}{t} - ae^{\frac{1}{t}}$ 的零点为 t_1, t_2

要证明：$\dfrac{1}{\ln x_1} + \dfrac{1}{\ln x_2} > 2$。则证明：$t_1 + t_2 > 2$

由于 $\dfrac{1}{t} = ae^{\frac{1}{t}}$ 两边取对数得 $-\ln t = \ln a + \dfrac{1}{t}$ 代入 $\begin{cases}-\ln t_2 = \ln a + \dfrac{1}{t_2} \\ -\ln t_1 = \ln a + \dfrac{1}{t_1}\end{cases}$ 两式相减得 $-\ln\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{1}{t_2} - \dfrac{1}{t_1}$

由引理：$\sqrt{ab} < \dfrac{a-b}{\ln a - \ln b} < \dfrac{a+b}{2}$。得：

$$\frac{t_1+t_2}{2}>\frac{t_2-t_1}{\ln t_2-\ln t_1}=t_1t_2>\sqrt{t_1t_2}$$

$$\sqrt{t_1t_2}>1\Rightarrow\frac{t_1+t_2}{2}>1\Rightarrow t_1+t_2>2$$

8) 若 x_1， $x_2\left(x_1<x_2\right)$ 是方程 $x^2\ln x+a=0,\left(a>0\right)$ 的两个不同的正实根，证明： $x_1^2+x_2^2>4a$ 。

证明：路一、$x^2\ln x+a=0,\left(a>0\right)$ 恒等变形为 $x^2\ln x^2+2a=0$，令 $t=x^2$ 则 t_1,t_2 是方程 $t\ln t+2a=0$ 的两个正实数根，要证 $x_1^2+x_2^2>4a$ 。即证明： $t_1+t_2>4a$

$$\begin{cases}\ln t_1+\dfrac{2a}{t_1}=0\\ \ln t_2+\dfrac{2a}{t_2}=0\end{cases}$$

两式相减得 $\ln\dfrac{t_1}{t_2}+2a\left(\dfrac{t_2-t_1}{t_1t_2}\right)=0$

令 $\lambda=\dfrac{t_1}{t_2},\ln\lambda=\dfrac{2a\left(\lambda-1\right)}{\lambda t_2},t_2=\dfrac{2a\left(\lambda-1\right)}{\lambda\ln\lambda},t_1=\dfrac{2a\left(\lambda^2-\lambda\right)}{\lambda\ln\lambda}$；

要证明 $t_1+t_2>4a$ ，即证明 $\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda\ln\lambda}>2$ 成立。

$g\left(\lambda\right)=\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda\ln\lambda},\left(0,1\right)\downarrow;\left(1,+\infty\right)\uparrow$； $t_1+t_2=\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda\ln\lambda}>2=\lim\limits_{\lambda\to1}\dfrac{\lambda-1}{\ln\lambda}\lim\limits_{\lambda\to1}\dfrac{\lambda+1}{\lambda}$ 即有 $x_1^2+x_2^2>4a$ 。

路二、要证 $x_1^2+x_2^2>4a$ 。即证 $t_1+t_2>4a$：

$$\begin{cases}\ln t_1+\dfrac{2a}{t_1}=0\\ \ln t_2+\dfrac{2a}{t_2}=0\end{cases}$$

两式相减得 $\ln\dfrac{t_1}{t_2}+2a\left(\dfrac{t_2-t_1}{t_1t_2}\right)=0$

由引理： $\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$ 。得：

$$\frac{t_1+t_2}{2}>\frac{t_2-t_1}{\ln t_2-\ln t_1}=\frac{t_1t_2}{2a}>\sqrt{t_1t_2}$$

$$\sqrt{t_1t_2}>2a\Rightarrow\frac{t_1+t_2}{2}>2a\Rightarrow t_1+t_2>4a$$

9) 已知函数 $f\left(x\right)=a-\dfrac{1}{x}-\ln x\left(a\in\mathbf{R}\right)$。若 $f\left(x\right)$ 有两零点 x_1， $x_2\left(x_1<x_2\right)$，

求证： $2<x_1+x_2<3\mathrm{e}^{a-1}-1$ 。

证明：用对称性构造 $h\left(x\right)=f\left(2-x\right)-f\left(x\right)$ 解决左侧不等式证明；

不等式右边 $x_1+x_2<3\mathrm{e}^{a-1}-1$。转化证明： $1+x_1+x_2<3\mathrm{e}^{a-1}$ 又 $1<\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 则

$1+x_1+x_2<\dfrac{x_1+x_2}{2}+x_1+x_2=\dfrac{3}{2}\left(x_1+x_2\right)$ 即证明加强不等式 $x_1+x_2<2\mathrm{e}^{a-1}$

令 $g\left(x\right)=ax-1-x\ln x$， 对称性构造 $h\left(x\right)=g\left(2\mathrm{e}^{a-1}-x\right)-g\left(x\right)$ 解决右侧不等式证明[1]。

10) 方程 $\ln x - x = m(m < -2)$ 有两个相异实根 x_1， x_2，且 $x_1 < x_2$，求证： $x_1 \cdot x_2 < 2$。

证明：两个相异实根 x_1， x_2 满足 $\ln x - x - m = 0$，

且 $0 < x_1 < 1 < x_2$，即 $\ln x_1 - x_1 - m = \ln x_2 - x_2 - m = 0$。

由题意，可知 $\ln x_1 - x_1 = m < -2 < \ln\ 2 - 2$，

又由(1)可知， $f(x) = \ln x - x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，故 $x_2 > 2$。

令 $g(x) = \ln x - x - m$，则 $g(x) - g\left(\frac{2}{x^2}\right) = -x + \frac{2}{x^2} + 3\ln x - \ln 2$。

令 $h(t) = -t + \frac{2}{t^2} + 3\ln t - \ln 2(t > 2)$，则 $h'(t) = -\frac{(t-2)^2(t+1)}{t^3}$。

当 $t > 2$ 时，$h'(t) < 0$，$h(t)$ 单调递减，所以 $h(t) < h(2) = 2\ln 2 - \frac{3}{2} < 0$，所以 $g(x) < g\left(\frac{2}{x^2}\right)$，因为 $x_2 > 2$ 且 $g(x_1) = g(x_2)$，所以 $h(x_2) < 0$，即 $g(x_1) < g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)$。

因为 $g(x)$ 在(0, 1)上单调递增，所以 $x_1 < \frac{2}{x_2^2}$，故 $x_1 \cdot x_2^2 < 2$。

评注：方程根之间的不等式关系比较复杂，此类问题可通过不等式的等价变形，将两个根分布在不等式两侧，然后利用函数的单调性转化为对应函数值之间的大小关系即可[2]。显然构造函数的关键仍然是消掉参数，另外根据函数性质确定“ $x_2 > 2$ ”是解题的一个关键点，确定其范围之后才能将 x_1 与 $\frac{2}{x_2^2}$ 化归到函数的同一个单调区间上，这也是此类问题的一个难点。

11) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - (a+1)(x-1)e^x + \frac{1}{3}ax^3, a < -16$

$f'(x) + (a+1)xe^x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同实数根记为 x_1, x_2，若 $x_1 < x_2$

求证： $3x_1 - x_2 < \frac{3-e}{e-1}$

证明：由 $f'(x) = e^{2x} - (a+1)xe^x + ax^2$ 和 $f'(x) + (a+1)xe^x = 0$ 得

$e^{2x} + ax^2 = 0$ 即有： $\frac{e^x}{x} = \sqrt{-a}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同实数根记为 x_1, x_2，若 $x_1 < x_2$

那么：

$$\begin{cases} \frac{e^{x_1}}{x_1} = \sqrt{-a} \\ \frac{e^{x_2}}{x_2} = \sqrt{-a} \end{cases}$$

令 $t = \frac{x_2}{x_1}, x_2 = tx_1$ 代入得 $x_1 = \frac{\ln t}{t-1}, x_2 = \frac{t\ln t}{t-1}$

则： $3x_1 - x_2 = \frac{3-t}{t-1}\ln t$

令 $g(t) = \frac{3-t}{t-1}\ln t$，则 $g'(t) = \frac{(-t\ln t - t + 3)(t-1) - (3-t)t\ln t}{t(t-1)^2}$

令 $h(t) = (-t\ln t - t + 3)(t-1) - (3-t)t\ln t$

则： $h'(t) = -2(t - 1 + \ln t)$

由 $t>1$ 得 $t-1+\ln t>0$

则 $h(t)=(-t\ln t-t+3)(t-1)-(3-t)t\ln t$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

则 $h(t)<h(1)=0$，故 $g'(t)<0$

那么 $g(t)=\dfrac{3-t}{t-1}\ln t$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减。

下面证明 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>\mathrm{e}$

由 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1}=\sqrt{-a}\\ \dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}=\sqrt{-a}\end{cases}$ 两式作比得 $t=\dfrac{x_2}{x_1}=\mathrm{e}^{x_2-x_1}$

只需要证明 $x_2-x_1>1$

即证明：$x_2>x_1+1$

由于 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

则只要证明：$\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}>\dfrac{\mathrm{e}^{x_1+1}}{x_1+1}$

即证明 $0<x_1<\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$

由于 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减和 $a<-16$

则只要证明 $\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}>4>\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}}{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}$

即证明 $\dfrac{4}{\mathrm{e}-1}>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}$，两边取对数得：$2\ln 2+\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}>\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ 即 $2\ln 2>\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$

下面构造函数 $y=x-\ln x$，$(0,1)$

$$y'=1-\frac{1}{x}<0$$

$y=x-\ln x$ 在 $(0,1)$ 上单调递增少，

$$\frac{1}{\mathrm{e}-1}>0.5,\frac{1}{\mathrm{e}-1}-\ln\frac{1}{\mathrm{e}-1}<\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}=0.5+\ln 2<\ln 2+\ln 2=2\ln 2$$

由 $g(t)=\dfrac{3-t}{t-1}\ln t$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>\mathrm{e}$

得：$g(t)=\dfrac{3-t}{t-1}\ln t<g(\mathrm{e})=\dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，即有 $3x_1-x_2<\dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

评注：由 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减和 $a<-16$，去找 $t>\mathrm{e}$ 这个结论转化到证明差值 $x_2-x_1>1$。

证明时加强不等式 $\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}>4>\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}}{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}$ 是此题目的亮点。

12) 已知函数 $f(x)=a^x-\mathrm{e}x^2,a>0$ 且 $a\neq 1$。

(1) 设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}+\mathrm{e}x$，讨论 $g(x)$ 的单调性；

(2) 若 $a>1$ 且 $f(x)$ 存在三个零点 x_1,x_2,x_3。

a) 求实数 a 的取值范围；

b) 设 $x_1<x_2<x_3$，求证：$x_1+3x_2+x_3>\frac{2\mathrm{e}+1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$。

解：(1) $g(x)=\frac{f(x)}{x}+\mathrm{e}x=\frac{a^x-\mathrm{e}x^2}{x}+\mathrm{e}x=\frac{a^x}{x}$，$g'(x)=\frac{a^x\ln a\cdot x-a^x}{x^2}=\frac{a^x(\ln a\cdot x-1)}{x^2}$，

因为 $a^x>0,x^2>0$，$g(x)$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

当 $a>1$ 时，$\ln a>0$，解 $g'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{\ln a}$，解 $g'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{\ln a},x<0$

当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，解 $g'(x)>0$，得 $x<\frac{1}{\ln a}$，解 $g'(x)<0$，得 $0>x>\frac{1}{\ln a},x>0$

综上，当 $a>1$ 时，$g(x)$ 增区间为 $\left(\frac{1}{\ln a},+\infty\right)$，$g(x)$ 减区间为 $(-\infty,0),\left(0,\frac{1}{\ln a}\right)$，

当 $0<a<1$ 时，$g(x)$ 增区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{\ln a}\right)$，$g(x)$ 减区间为 $(0,+\infty),\left(\frac{1}{\ln a},0\right)$，

(2) 1) 因为 $f(x)=a^x-\mathrm{e}x^2,a>1$ 且 $f(x)$ 存在三个零点 x_1,x_2,x_3。

所以 $a^x-\mathrm{e}x^2=0$ 有 3 个根。

当 $x<0$ 时，$f(-1)=a^{-1}-e<0$，$f(0)=a^0>0$，$f'(x)=a^x\ln a-2\mathrm{e}x>0$，

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调递增的，由零点存在定理，方程必有一个负根。

当 $x>0$，$x\ln a=1+2\ln x$，即 $\ln a=\frac{1+2\ln x}{x}$ 有两个根，

令 $t(x)=\frac{1+2\ln x}{x}$，可转化为 $y=\ln a$ 与 $t(x)=\frac{1+2\ln x}{x}$ 有两个交点。

$$t'(x)=\frac{2-(1+2\ln x)}{x^2}=\frac{1-2\ln x}{x^2},$$

可得 $x\in(0,\sqrt{\mathrm{e}})$，$t'(x)>0$，$t(x)$ 是单调递增的，可得 $x\in(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$，$t'(x)<0$，$t(x)$ 是单调递减的，其中 $t\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)=0$，当 $x>\sqrt{\mathrm{e}},t(x)>0$，$t(x)_{\max}=t(\sqrt{\mathrm{e}})=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

所以可得 $0<\ln a<\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，

即得 $1<a<\mathrm{e}^{\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}}$。

2) 因为 $f(x)=a^x-\mathrm{e}x^2,a>1$ 且 $f(x)$ 存在三个零点 x_1,x_2,x_3。

设 $x_1<x_2<x_3$，$a^{x_1}=\mathrm{e}x_1^2,a^{x_2}=\mathrm{e}x_2^2,a^{x_3}=\mathrm{e}x_3^2$，易知其中 $x_1<0$，$0<x_2<x_3$，

因为 $x_1<x_2,a^{x_1}<a^{x_2}$，所以 $\mathrm{e}x_1^2<\mathrm{e}x_2^2,x_1^2<x_2^2,-x_1<x_2$，故可知 $x_1+x_2>0$；①

由 1)可知 $y=\ln a$，与 $t(x)=\frac{1+2\ln x}{x}$ 有两个交点 $x_2<x_3$，

$x\in(0,\sqrt{\mathrm{e}})$，$t(x)$ 是单调递增的，$x_2\in(0,\sqrt{\mathrm{e}})$，$t(x_2)=\ln a>0$，$t\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)=0$，所以 $x_2>\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$；②

$\sqrt{e} > x_2 > \frac{1}{\sqrt{e}}, x_3 > \sqrt{e}$，

若 $x_3 \ge 2\sqrt{e}$，则 $x_2 + x_3 > 2\sqrt{e}$

若 $\sqrt{e} < x_3 < 2\sqrt{e}$，

构造函数 $h(x) = t(x) - t(2\sqrt{e} - x)$，$\sqrt{e} < x < 2\sqrt{e}$

$$h'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^2} + \frac{1 - 2\ln(2\sqrt{e} - x)}{(2\sqrt{e} - x)^2}$$

$$= \frac{(1 - 2\ln x)(2\sqrt{e} - x)^2 + x^2\left[1 - 2\ln(2\sqrt{e} - x)\right]}{x^2(2\sqrt{e} - x)^2}$$

设 $m(x) = (1 - 2\ln x)(2\sqrt{e} - x)^2 + x^2\left[1 - 2\ln(2\sqrt{e} - x)\right]$，

$$m'(x) = \frac{-2(2\sqrt{e} - x)^2}{x} + \frac{2x^2}{2\sqrt{e} - x} - 2(1 - 2\ln x)(2\sqrt{e} - x) + 2x\left[1 - 2\ln(2\sqrt{e} - x)\right]$$

因为 $\frac{-2(2\sqrt{e} - x)^2}{x} + \frac{2x^2}{2\sqrt{e} - x} = \frac{2x^3 - 2(2\sqrt{e} - x)^3}{x(2\sqrt{e} - x)} = \frac{2\left[x^3 - (2\sqrt{e} - x)^3\right]}{x(2\sqrt{e} - x)}$

又因为 $2\sqrt{e} > x > \sqrt{e}, 2x > 2\sqrt{e}, x > 2\sqrt{e} - x, x^3 > (2\sqrt{e} - x)^3$，

所以 $\frac{-2(2\sqrt{e} - x)^2}{x} + \frac{2x^2}{2\sqrt{e} - x} > 0$ ③

因为 $-2(1 - 2\ln x)(2\sqrt{e} - x) + 2x\left[1 - 2\ln(2\sqrt{e} - x)\right] = 2(2\ln x - 1)(2\sqrt{e} - x) + 2x\left[1 - 2\ln(2\sqrt{e} - x)\right]$

又因为 $x > \sqrt{e}, \ln x > \frac{1}{2}, 2\sqrt{e} - x < \sqrt{e}, \ln(2\sqrt{e} - x) < \frac{1}{2}$

所以 $2\ln x - 1 > 0, 2\sqrt{e} - x > 0; 1 - 2\ln(2\sqrt{e} - x) > 0, x > \sqrt{e} > 0$

即得 $2(2\ln x - 1)(2\sqrt{e} - x) + 2x\left[1 - 2\ln(2\sqrt{e} - x)\right] > 0$ ④

由③④可知 $m'(x) > 0$，$m(x)$ 在 $(\sqrt{e}, 2\sqrt{e})$ 上单调递增，$x > \sqrt{e}$，可得 $m(x) > m(\sqrt{e}) = 0$

$h'(x) = \frac{m(x)}{x^2(2\sqrt{e} - x)^2}$，可知 $m(x)$ 与 $h'(x)$ 同号。

所以 $h'(x) > 0$，

$h(x)$ 在 $(\sqrt{e}, 2\sqrt{e})$ 上单调递增。$h(x) > h(\sqrt{e}) = t(\sqrt{e}) - t(\sqrt{e}) = 0$

$t(x) - t(2\sqrt{e} - x) > 0$，$t(x_3) > t(2\sqrt{e} - x_3)$，又由 1)可知，$t(x_2) = t(x_3)$

所以 $t(x_2) > t(2\sqrt{e} - x_3), x_2 \in (0, \sqrt{e})$，$2\sqrt{e} - x_3 \in (0, \sqrt{e})$

$x \in (0, \sqrt{e})$，$t'(x) > 0$，$t(x)$ 是单调递增的，

所以 $x_2 > 2\sqrt{e} - x_3, x_2 + x_3 > 2\sqrt{e}$ ⑤

由①②⑤可知，$x_1+3x_2+x_3>\dfrac{2e+1}{\sqrt{e}}$

13) 已知 $x_1\ln x_1=x_2\ln x_2=a$，$x_1<x_2$，求证：$x_2-x_1<2a+1+e^{-2}$。

解：设函数 $f(x)=x\ln x$，$f'(x)=1+\ln x$。

取其 $x=e^{-2}$ 在和 $x=1$ 处的切线，分别为 $l_1:y=-x-e^{-2}$ 和 $l_2:y=x-1$，如图 1。

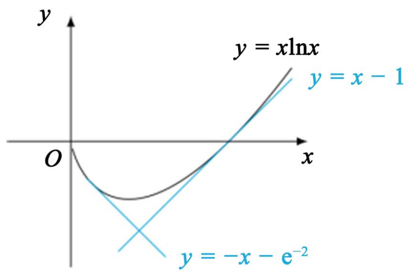

Figure 1. Function graph
图 1. 函数

直线 $y=a$ 与直线 l_1，函数 $f(x)$ 的图象和直线 l_2 分别交于 x_1',x_1,x_2,x_2'，则有：$x_1'<x_1<x_2<x_2'$

$$x_2-x_1<x_2'-x_1'=(a+1)-\left(-a-e^{-2}\right)=2a+1+e^{-2}$$

评注：**切线放缩**

若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有凹凸性，可以利用切线 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 进行放缩。

(1) 若函数 $y=f(x)$ 的图象在区间 $[a,b]$ 凹弧($f''(x)>0$)，则有：$f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$；

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图象在区间 $[a,b]$ 凸弧($f''(x)<0$)，则有：$f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$。

割线放缩

若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有凹凸性，可以利用割线 $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ 进行放缩。

(1) 若函数 $y=f(x)$ 的图象在区间 $[a,b]$ 凹弧($f''(x)>0$)，则有：$f(x)\leq\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$；

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图象在区间 $[a,b]$ 凸弧($f''(x)<0$)，则有：$f(x)\geq\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$。

附：函数凹凸性的定义[3]

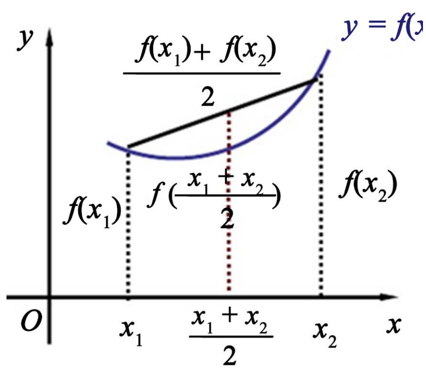

Figure 2. Concave function
图 2. 凹函数

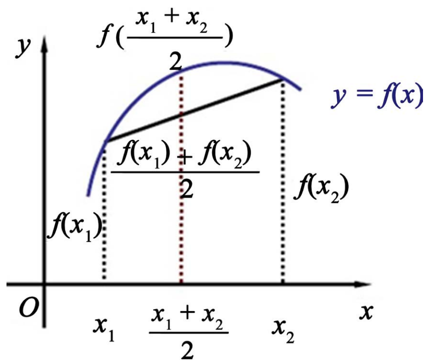

Figure 3. Convex function
图 3. 凸函数

1) 凹函数定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，对 $\forall x_1,x_2\in I$，若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $y=f(x)$ 的图象是凹的，函数 $y=f(x)$ 为上凹函数；二阶导数 $f''(x)>0$ (如图 2)。

2) 凸函数定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，对 $\forall x_1,x_2\in I$，若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则 称 $y=f(x)$ 的图象是凸的，函数 $y=f(x)$ 为凸函数。二阶导数 $f''(x)<0$ (如图 3)。

以下两个问题读者可以尝试解决

1) 若两个不相等的正实数满足 $\frac{1+\ln x_2}{1+\ln x_1}=\frac{x_2}{x_1}$，求证：$x_1+x_2=\mathrm{e}x_1x_2$。

2) 若函数 $f(x)=\frac{x+2}{\mathrm{e}^x}+ax-2$ 在 R 上存在两个极值点 x_1,x_2 若 $x_1<x_2$。求证 $\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}>\frac{2}{a}-2$。

3. 总结

处理多元不等式证明题时，常用到引理 1、2、3 作不等式的放缩，双变量问题一直是导数备考中的重要内容，极值点偏移问题作为双变量问题中的一种，常见的处理方法是构造函数，这里的构造有可分为根据对称构造和一般性构造，而利用对数均值不等式是处理极值点偏移问题的一类方法。无论哪种方法都要特别是需要严格步骤的大题中，相反一知半解只会误入迷途。如果读者把对数均值不等式中的内容好好研究一下，说不定会对导数放缩，导数不等式证明，双变量处理方法有一些新的领悟。读者也可以思考高数的中值定理和微积分知识对这类问题的证明。

参考文献

[1] 姚永亮. 巧解不含参数的极值点偏移问题[J]. 科学咨询(教育科研), 2021(9): 133-135.

[2] 许俊莲. 巧用导数证明不等式[J]. 科技风, 2023(17): 25-27.

[3] 贾全, 曾晓兰. 高等数学(基础版) [M]. 成都: 四川大学出版社, 2017: 82-87.