

关于方程 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 的可解性研究

尹 秘*, 向万国, 王 军#

云南民族大学数学与计算机科学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2024年6月9日; 录用日期: 2024年7月2日; 发布日期: 2024年7月10日

摘 要

本文利用伪Smarandache函数、Smarandache LCM函数和广义Euler函数的基本性质, 以及一些初等方法和技巧给出 $\varphi_{10}(p^\alpha)$ 的准确计算公式, 其中 p 是素数, 且 α 是正整数。由此, 我们讨论数论函数方程 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 的可解性, 结论是: 该方程无正整数解。

关键词

伪Smarandache函数, Smarandache LCM函数, 广义欧拉函数, 可解性

On the Solvability of Number-Theoretic Function Equation $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$

Mi Yin*, Wanguo Xiang, Jun Wang#

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Jun. 9th, 2024; accepted: Jul. 2nd, 2024; published: Jul. 10th, 2024

Abstract

This paper applies the basic properties of pseudo-Smarandache, Smarandache LCM and generalized functions, as well as some elementary methods and techniques to obtain an accurate calculation formula $\varphi_{10}(p^\alpha)$, where p is a prime number and α is a positive integer. Based on this formula, We discuss number-theoretic functional equations $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$. It is concluded that there is no positive integer solution to this equation.

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 尹秘, 向万国, 王军. 关于方程 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 的可解性研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3096-3104.

DOI: 10.12677/aam.2024.137295

Keywords

Pseudo-Smarandache Function, Smarandache LCM Function, Generalized Euler Function, Solvability

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数论函数方程是数论中的一个重要课题，它揭示了数论函数之间的本质联系。其中涉及到很多数论函数。例如欧拉函数、广义欧拉函数及 Smarandache 函数。而欧拉函数 $\varphi(n)$ 的值等于序列 $0, 1, \dots, n-1$ 中与 n 互素的整数个数[1]。欧拉函数是一类非常重要的函数，已经成为解决数论问题的一个重要工具，例如原根的刻画、费马小定理、RSA 加密算法、素数定理的证明都要用到欧拉函数。因此，有不少学者对其进行研究，基于解决实际问题的客观需要，还对其进一步推广。我们简单地概括如下：

1938 年著名数学家 Lehmer [2] 利用欧拉函数证明了：对于任意的奇素数 p ,

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \equiv -2q_2(p) + pq_2^2(p) \pmod{p^2},$$

其中 $q_r(n) = \frac{r^{\varphi(n)} - 1}{n}$, $\varphi(n)$ 是欧拉函数, n 和 r 是大于等于 2 的正整数, 且 $\gcd(n, r) = 1$ 。

后来他利用自己建立的上述同余恒等式, 再加上一些类似的同余恒等式证明费马大定理的第一种情形形式: $x^n + y^n = z^n, 4|n$ 无正整数解。

鉴于上述基本事实, 从 2002 年到 2007 年, 蔡天新等学者[3] [4] 企图将 Lehmer 的上述同余恒等式进行推广: 从模为素数的平方推广到模为任意整数的平方。为了达到这一目的, 他们定义了广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$:

$$\varphi_e(n) = \sum_{i=1}^{\lfloor n/e \rfloor} 1, \quad \gcd(i, n) = 1$$

即 $\varphi_e(n)$ 等于序列 $0, 1, \dots, \lfloor n/e \rfloor$ 中与 n 互素的整数的个数, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 是 Gauss 取整函数。易知: $\varphi_e(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) \lfloor d/e \rfloor$, 其中 $\mu(n)$ 是 Mobius 函数:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1; \\ (-1)^k, & n \geq 2, \text{ 且 } \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1; \\ 0, & n \geq 2, \text{ 且 } \exists \text{ 某一个 } \alpha_i > 1 (1 \leq i \leq k). \end{cases}$$

其中 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ($\alpha_i \geq 1, i = 1, \dots, k$)。

另一位著名数论专家 F. Smarandache 定义了数论函数——Smarandache 函数。后来学者们在此基础上进行了推广, 定义了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 和 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 。Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 则表示为最小正整数 k , 使得 $1, 2, \dots, k$ 的最小公倍数能被 n 整除 [5], 即

$SL(n) = \min\{k: k \in \mathbb{Z}^+, n | \text{lcm}[1, 2, \dots, k]\}$ 。伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m , 使得 $1 + 2 + \dots + m$ 能被 n 整除[6], 即 $Z(n) = \min\left\{m: m \in \mathbb{Z}^+, n | \frac{m(m+1)}{2}\right\}$ 。

为了揭示数论函数之间的本质联系, 近年来一些学者对这几类结合的方程做了大量的研究。例如, 范盼红[7]利用初等方法对此问题进行了研究, 给出了方程 $Z(n) = \varphi(n)$ 的解的所有形式; 鲁伟阳[8]研究了 $Z(n^2) = \varphi(n)$ 的所有整数解情况; 张利霞等[9]研究了方程 $S(SL(n)) = \varphi_2(n)$ 的可解性, 并给出了所有的正整数解; 朱杰[10]对方程 $Z(n) = \varphi_e(SL(n)) (e = 2, 3, 4, 6)$ 进行研究, 给出了其所有正整数解; 李改利等[11]研究了方程 $Z(n^2) = \varphi_e(SL(n)) (e = 3, 4)$ 的所有正整数解。

本文在上述学者研究的基础上, 进一步讨论 $\varphi_{10}(p^\alpha)$ (p 为素数, α 为正整数) 的准确计算公式, 接着用 $\varphi_{10}(p^\alpha)$ 的准确计算公式讨论数论函数方程 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 的可解性。为此需要下列相关引理。

2. 相关引理及主要结果

引理 1 [12] 设正整数 n 的标准分解式为 $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, 则有:

$$SL(n) = \max\{p_i^{k_i}\} (1 \leq i \leq s),$$

特别地, 当 p 为素数及 $k \geq 1$ 时, $SL(p^k) = p^k$ 。

引理 2 [13] 当 $p \geq 3$ 及 $k \geq 1$ 时, 有 $Z(p^k) = p^k - 1$ 。特别地, 当 $p = 2$ 时, 则有 $Z(2^k) = 2^{k+1} - 1$ 。

引理 3 [14] 对任意素数 p 及 $k \geq 1$, 有 $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ 。

定理 1 若 $n = p^\alpha$, $\forall e$, $\varphi_e(n) = \frac{\varphi(n) - \lambda_1 + \lambda_2}{e}$, $(p, e) = 1$ 且 p 为素数, $\alpha \geq 1$ 且为整数, $\lambda_2 \equiv p^{\alpha-1}(\text{mode})$, $\lambda_1 \equiv p^\alpha \equiv p\lambda_2(\text{mode})$, $1 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq e-1$ 。

证明: 当 $n = p^\alpha$ 时, 由广义欧拉函数的性质得:

$$\varphi_e(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \left[\frac{d}{e}\right] = \mu(1) \left[\frac{p^\alpha}{e}\right] + \mu(p) \left[\frac{p^{\alpha-1}}{e}\right] = \frac{p^\alpha - \lambda_1}{e} - \frac{p^{\alpha-1} - \lambda_2}{e} = \frac{\varphi(n) - \lambda_1 + \lambda_2}{e}$$

其中 $1 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq e-1$, 且 $\lambda_2 \equiv p^{\alpha-1}(\text{mode})$, $\lambda_1 \equiv p^\alpha \equiv p\lambda_2(\text{mode})$ 。

推论 1 $n = p^\alpha$, $e = 10$, $(p, 2) = 1$ 且 $(p, 5) = 1$, $1 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 9$

$$\varphi_{10}(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \left[\frac{d}{10}\right] = \mu(1) \left[\frac{p^\alpha}{10}\right] + \mu(p) \left[\frac{p^{\alpha-1}}{10}\right] = \frac{p^\alpha - \lambda_1}{10} - \frac{p^{\alpha-1} - \lambda_2}{10} = \frac{\varphi(n) - \lambda_1 + \lambda_2}{10}$$

$\lambda_2 \equiv p^{\alpha-1}(\text{mod} 10)$, $\lambda_1 \equiv p^\alpha \equiv p\lambda_2(\text{mod} 10)$ 。

推论 2

(1) $p \equiv 1(\text{mod} 10)$

$$\varphi_{10}(n) = \frac{\varphi(n)}{10}$$

(2) $p \equiv 3(\text{mod} 10)$

$$\varphi_{10}(n) = \begin{cases} \frac{\varphi(n) \mp 2}{10}, & \alpha \equiv 1, 3(\text{mod} 4), \\ \frac{\varphi(n) \mp 6}{10}, & \alpha \equiv 2, 4(\text{mod} 4). \end{cases}$$

(3) $p \equiv 7 \pmod{10}$

$$\varphi_{10}(n) = \begin{cases} \frac{\varphi(n) \mp 6}{10}, & \alpha \equiv 1, 3 \pmod{4}, \\ \frac{\varphi(n) \mp 2}{10}, & \alpha \equiv 2, 4 \pmod{4}. \end{cases}$$

(4) $p \equiv 9 \pmod{10}$

$$\varphi_{10}(n) = \begin{cases} \frac{\varphi(n) - 8}{10}, & \alpha \equiv 1, 3 \pmod{4}, \\ \frac{\varphi(n) + 8}{10}, & \alpha \equiv 2, 4 \pmod{4}. \end{cases}$$

证明: 当 $p \equiv 1 \pmod{10}$ 时, 易证 $\varphi_{10}(n) = \frac{\varphi(n)}{10}$ 。当 $p \equiv 3 \pmod{10}$, $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 由推论 1 得 $\varphi_{10}(n) = \frac{\varphi(n) - \lambda_1 + \lambda_2}{10}$, $1 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 9$, 且 $\lambda_2 \equiv 3^{\alpha-1} \pmod{10}$, $\lambda_1 \equiv 3^\alpha \pmod{10}$, 则有 $\lambda_2 \equiv 1 \pmod{10}$, $\lambda_1 \equiv 3 \pmod{10}$, 故 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, 便可得 $\varphi_{10}(n) = \frac{\varphi(n) - 2}{10}$, 证毕。其余情况类似可得。

定理 2 如果 $n = 2^\alpha 5^\beta > 10$ (α, β 均为非负整数) 且 $n \neq 20$, 则有,

$$\varphi_{10}(2^\alpha 5^\beta) = \begin{cases} 2 \cdot 5^{\beta-2}, & \alpha = 0, \beta \geq 2, \\ 2^\alpha 5^{\beta-2}, & \alpha \geq 1, \beta \geq 2, \\ \frac{2^{\alpha-1} \pm 2}{5}, & \alpha \geq 4 \text{ 且 } \alpha \equiv 1, 3 \pmod{4}, \beta = 0, \\ \frac{2^{\alpha-1} \mp 1}{5}, & \alpha \geq 4 \text{ 且 } \alpha \equiv 2, 4 \pmod{4}, \beta = 0, \\ \frac{2^\alpha \mp 2}{5}, & \alpha \geq 4 \text{ 且 } \alpha \equiv 1, 3 \pmod{4}, \beta = 1, \\ \frac{2^\alpha \pm 1}{5}, & \alpha \geq 4 \text{ 且 } \alpha \equiv 2, 4 \pmod{4}, \beta = 1. \end{cases}$$

证明: (1) 若 $\alpha = 0$, $n = 5^\beta > 10$, 故 $\beta \geq 2$ 。这时我们有

$$\varphi_{10}(5^\beta) = \sum_{d|5^\beta} \mu\left(\frac{5^\beta}{d}\right) \left[\frac{d}{10} \right] = \left[\frac{5^\beta}{10} \right] - \left[\frac{5^{\beta-1}}{10} \right] = \left[\frac{5^{\beta-1}}{2} \right] - \left[\frac{5^{\beta-2}}{2} \right] = 2 \cdot 5^{\beta-2}$$

(2) 若 $\alpha = 1$, $n = 2 \cdot 5^\beta > 10$, 故 $\beta \geq 2$ 。这时我们有

$$\begin{aligned} \varphi_{10}(2 \cdot 5^\beta) &= \sum_{d|5^\beta} \mu\left(\frac{2 \cdot 5^\beta}{d}\right) \left[\frac{d}{10} \right] + \sum_{d|5^\beta} \mu\left(\frac{2 \cdot 5^\beta}{2d}\right) \left[\frac{2d}{10} \right] \\ &= -\varphi_{10}(5^\beta) + \sum_{d|5^\beta} \mu\left(\frac{5^\beta}{d}\right) \left[\frac{d}{5} \right] \\ &= -\varphi_{10}(5^\beta) + \sum_{d|5^\beta} \mu\left(\frac{5^\beta}{d}\right) \left[\frac{d}{5} \right] = 2 \cdot 5^{\beta-2} \end{aligned}$$

(3) 若 $\alpha = 2$, $n = 4 \cdot 5^\beta > 10$ 且 $n \neq 20$, 故 $\beta \geq 2$ 。这时我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{10}(4 \cdot 5^\beta) &= \sum_{d|4 \cdot 5^\beta} \mu\left(\frac{4 \cdot 5^\beta}{d}\right) \left[\frac{d}{10}\right] \\ &= \mu(1) \left[\frac{4 \cdot 5^\beta}{10}\right] + \mu(2) \left[\frac{2 \cdot 5^\beta}{10}\right] + \mu(5) \left[\frac{4 \cdot 5^{\beta-1}}{10}\right] + \mu(10) \left[\frac{2 \cdot 5^{\beta-1}}{10}\right] \\ &= 4 \cdot 5^{\beta-2}\end{aligned}$$

(4) 若 $\alpha = 3$, $n = 8 \cdot 5^\beta > 10$, 则 $\beta \geq 2$ 。这时我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{10}(8 \cdot 5^\beta) &= \sum_{d|8 \cdot 5^\beta} \mu\left(\frac{8 \cdot 5^\beta}{d}\right) \left[\frac{d}{10}\right] \\ &= \mu(1) \left[\frac{8 \cdot 5^\beta}{10}\right] + \mu(2) \left[\frac{4 \cdot 5^\beta}{10}\right] + \mu(5) \left[\frac{8 \cdot 5^{\beta-1}}{10}\right] + \mu(10) \left[\frac{4 \cdot 5^{\beta-1}}{10}\right] \\ &= 8 \cdot 5^{\beta-2}\end{aligned}$$

(5) $\alpha \geq 4$, $n = 2^\alpha 5^\beta > 10$, 则 $\beta \geq 0$ 。这时我们有

1) 如果 $\beta = 0$, 则 $n = 2^\alpha$ ($\alpha \geq 4$), 此时我们有

$$\varphi_{10}(2^\alpha) = \sum_{d|2^\alpha} \mu\left(\frac{2^\alpha}{d}\right) \left[\frac{d}{10}\right] = \left[\frac{2^{\alpha-1}}{5}\right] - \left[\frac{2^{\alpha-2}}{5}\right]$$

(i) 若 $\alpha \equiv 1, 3 \pmod{4}$

$$\varphi_{10}(2^\alpha) = \frac{2^{\alpha-2} \pm 2}{5}$$

(ii) 若 $\alpha \equiv 2, 4 \pmod{4}$

$$\varphi_{10}(2^\alpha) = \frac{2^{\alpha-2} \mp 1}{5}$$

2) 如果 $\beta = 1$, 则 $n = 5 \cdot 2^\alpha$, 这时我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{10}(2^\alpha \cdot 5) &= \sum_{d|2^\alpha \cdot 5} \mu\left(\frac{2^\alpha \cdot 5}{d}\right) \left[\frac{d}{10}\right] \\ &= \mu(1) \left[\frac{2^\alpha \cdot 5}{10}\right] + \mu(2) \left[\frac{2^{\alpha-1} \cdot 5}{10}\right] + \mu(5) \left[\frac{2^\alpha}{10}\right] + \mu(10) \left[\frac{2^{\alpha-1}}{10}\right] \\ &= 2^{\alpha-2} + \left[\frac{2^{\alpha-2}}{5}\right] - \left[\frac{2^{\alpha-1}}{5}\right]\end{aligned}$$

(i) 若 $\alpha \equiv 1, 3 \pmod{4}$

$$\varphi_{10}(2^\alpha \cdot 5) = 2^{\alpha-2} - \frac{2^{\alpha-2} \pm 2}{5}$$

(ii) 若 $\alpha \equiv 2, 4 \pmod{4}$

$$\varphi_{10}(2^\alpha \cdot 5) = 2^{\alpha-2} - \frac{2^{\alpha-2} \mp 1}{5}$$

3) 若 $\beta \geq 2$, 则 $n = 5^\beta \cdot 2^\alpha$, 这时我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{10}(2^\alpha \cdot 5^\beta) &= \sum_{d|2^\alpha \cdot 5^\beta} \mu\left(\frac{2^\alpha \cdot 5^\beta}{d}\right) \left\lfloor \frac{d}{10} \right\rfloor \\ &= \mu(1) \left\lfloor \frac{2^\alpha \cdot 5^\beta}{10} \right\rfloor + \mu(2) \left\lfloor \frac{2^{\alpha-1} \cdot 5^\beta}{10} \right\rfloor + \mu(5) \left\lfloor \frac{2^\alpha \cdot 5^{\beta-1}}{10} \right\rfloor + \mu(10) \left\lfloor \frac{2^{\alpha-1} \cdot 5^{\beta-1}}{10} \right\rfloor \\ &= 2^\alpha 5^{\beta-2}\end{aligned}$$

定理 3 数论函数方程:

$$Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n)) \quad (1)$$

无整数解。

3. 主要结果的证明

定理 3 的证明 由引理 2 知 $n=1$, $Z(1)=1$, $SL(1)=1$, $\varphi_{10}(SL(1))=0$, 则 $Z(1) \neq \varphi_{10}(SL(1))$, 故 $n=1$ 不是方程的解。

现设 $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} > 1$, 其中 $k \geq 0$, $\alpha, \alpha_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, k$), 其中 p_i 是不同的奇素数。

(1) 若 $2^\alpha = \max\{2^\alpha, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}\}$, 则必有 $\alpha \geq 1$ 。由引理 1 得 $SL(n) = 2^\alpha$, $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(2^\alpha)$ 。当 $\alpha=1$ 时, 即 $n=2$, $\varphi_{10}(SL(2))=0$ 。根据定义 $Z(2^2)=7$, 故 $Z(2^2) \neq \varphi_{10}(SL(2))$, 即方程(1)无解。当 $\alpha=2$ 时, 即 $n=4$ 或 12 , 由引理得 $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(4) = 0$, $Z(4^2)=31$, 故 $\varphi_{10}(SL(n)) \neq Z(n^2)$ 。当 $\alpha=3$ 时, n 的值为以下几种情况:

$$n \in \{2^3, 2^3 \times 3, 2^3 \times 5, 2^3 \times 7, 2^3 \times 3 \times 5, 2^3 \times 3 \times 7, 2^3 \times 5 \times 7, 2^3 \times 3 \times 5 \times 7\}$$

由引理 2 知 $SL(n) = 2^3$, $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(8) = 0$, 显然 $Z(n^2) \neq 0$, 故此时 $\varphi_{10}(SL(n)) \neq Z(n^2)$ 。

故 $\alpha \geq 4$ 时, $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(2^\alpha)$, 下面计算 $\varphi_{10}(2^\alpha)$ 。考虑以下两种情形。

(i) 若 $\alpha \equiv 1, 3 \pmod{4}$, 由定理 2 知则 $\varphi_{10}(2^\alpha) = \frac{2^{\alpha-2} \pm 2}{5}$, 如果 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则有下面式子成立:

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{2^{\alpha-2} \pm 2}{5} \left(\frac{2^{\alpha-2} \pm 2}{5} + 1 \right)}{2}$$

则有 $2^{2\alpha+1} \mid (2^{\alpha-2} \pm 2)(2^{\alpha-2} \pm 2 + 5)$, 故 $2^{2\alpha+1} \mid 2^{\alpha-2} \pm 2$ 或 $2^{2\alpha+1} \mid 2^{\alpha-2} \pm 2 + 5$ 成立。假设 $2^{2\alpha+1} \mid 2^{\alpha-2} \pm 2$ 成立, 故 $2^{2\alpha} \mid 2^{\alpha-3} \pm 1$, 而 $2^{\alpha-3} \pm 1$ 为奇数显然矛盾。故 $2^{2\alpha+1} \mid 2^{\alpha-2} \pm 2 + 5$, 此时 $2^{\alpha-2} \pm 2 + 5$ 为奇数, 显然矛盾。

(ii) 若 $\alpha \equiv 2, 4 \pmod{4}$, 由定理 2 知则 $\varphi_{10}(2^\alpha) = \frac{2^{\alpha-2} \mp 1}{5}$, 如果 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则有下面式子成立:

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{2^{\alpha-2} \mp 1}{5} \left(\frac{2^{\alpha-2} \mp 1}{5} + 1 \right)}{2}$$

则有 $2^{2\alpha+1} \mid (2^{\alpha-2} \mp 1)(2^{\alpha-2} \mp 1 + 5)$, $2^{2\alpha+1} \mid 2^{\alpha-2} \mp 1$ 显然不成立, 故 $2^{2\alpha+1} \mid 2^{\alpha-2} \mp 1 + 5$,

当 $2^{2\alpha+1} \mid 2^{\alpha-2} + 4$ 成立时, 有 $2^{2\alpha-1} \mid 2^{\alpha-4} + 1$ 显然矛盾, 故 $2^{2\alpha+1} \mid 2^{\alpha-2} + 6$, 有 $2^{2\alpha} \mid 2^{\alpha-3} + 3$ 显然矛盾。综

上所述当 $2^\alpha = \max\{2^\alpha, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}\}$ 时, 此时方程(1)无解。

(2) 若 $p_k^{\alpha_k} = \max\{2^\alpha, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}\}$, 则必有 $\alpha_k \geq 1$, 由引理 1 得 $SL(n) = p_k^{\alpha_k}$, $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(p_k^{\alpha_k})$, 下面计算 $\varphi_{10}(p_k^{\alpha_k})$ 的值。

情形一: 若 $p_k = 5$, 由引理 1 得, 当 $\alpha_k = 1$ 时, $n = 5, 2 \times 5, 3 \times 5, 2^2 \times 5, 2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 3 \times 5$, $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(5) = 0$, 由引理 2 得 $Z(n^2) \neq 0$, 显然 $\varphi_{10}(SL(n)) \neq Z(n^2)$ 。当 $\alpha_k = 2$, $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(5^2) = 1$, 易验证 $Z(n^2) \neq 1$, 故 $\varphi_{10}(SL(n)) \neq Z(n^2)$ 。故 $\alpha_k \geq 3$, 由定理 2 得 $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(5^{\alpha_k}) = 2 \cdot 5^{\alpha_k-2}$, 如果 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则下面式子成立

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{2 \cdot 5^{\alpha_k-2} (2 \cdot 5^{\alpha_k-2} + 1)}{2}$$

则有 $5^{2\alpha_k} \mid 5^{\alpha_k-2} (2 \cdot 5^{\alpha_k-2} + 1)$, 故 $5^{\alpha_k+2} \mid 2 \cdot 5^{\alpha_k-2} + 1$, 显然不成立。

情形二: 若 $(p_k, 5) = 1$, 计算 $\varphi_{10}(p_k^{\alpha_k})$, 需讨论 p_k 为不同的值, 分以下四种情形进行讨论。

(I) 若 $p_k \equiv 1 \pmod{10}$, 根据推论 2 得 $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(p_k^{\alpha_k}) = \frac{1}{10} \varphi(p_k^{\alpha_k}) = \frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}}{10}$, 若 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则下面式子成立:

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}}{10} \left(\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}}{10} + 1 \right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 10)$, 即 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 10$ 成立。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}$ 成立, 有 $p_k \mid p_k - 1$ 与 p_k 是奇素数矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 10$, 当 $\alpha_k = 1$ 时, 则 $p_k^2 \mid p_k + 9$, 故 $p_k = 3$ 与 $p_k \equiv 1 \pmod{10}$ 矛盾。当 $\alpha_k > 1$ 时, $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 10$, 必有 $p_k = 2$ 或 $p_k = 5$, 与 p_k 奇素数且 $(p_k, 5) = 1$ 矛盾。综上所述, 方程(1)无解。

(II) 若 $p_k \equiv 3 \pmod{10}$, 下面对 α_k 分以下两种情况进行讨论。

(i) 若 $\alpha_k \equiv 1, 3 \pmod{4}$, 由推论 2 得 $\varphi_{10}(SL(n)) = \varphi_{10}(p_k^{\alpha_k}) = \frac{\varphi(n) \mp 2}{10} = \frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2}{10}$, 若 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则下面式子成立:

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2}{10} \left(\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2}{10} + 1 \right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2)(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2 + 10)$, 故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2 + 10$ 。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2$, 则 $p_k = 2$ 与 p_k 是奇素数矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2 + 10$, 当 $\alpha_k \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 有 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 8$, 则 $p_k = 2$ 与 p_k 为奇素数矛盾。当 $\alpha_k \equiv 3 \pmod{4}$ 时, 有 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 12$, 故 $p_k = 2$ 或 $p_k = 3$, 当 $p_k = 2$ 时显然不成立, 则 $p_k = 3$, 上式可以写成 $3^{2\alpha_k} \mid 3^{\alpha_k} - 3^{\alpha_k-1} + 12$, 化简得 $3^{2\alpha_k-1} \mid 3^{\alpha_k-1} - 3^{\alpha_k-2} + 4$, 显然矛盾。

(ii) 若 $\alpha_k \equiv 2, 4 \pmod{4}$, 由推论 2 得 $\varphi_{10}(p_k^{\alpha_k}) = \frac{\varphi(n) \mp 6}{10} = \frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6}{10}$, 若 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则下面式子成立:

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6}{10} \left(\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6}{10} + 1 \right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6)(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6 + 10)$, 故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6 + 10$ 。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6$ 成立, 则有 $p_k = 2$ 或 $p_k = 3$, $p_k = 2$ 时显然矛盾, 故 $p_k = 3$, 上式为 $3^{2\alpha_k} \mid 3^{\alpha_k} - 3^{\alpha_k-1} \mp 6$, 化简为 $3^{2\alpha_k-1} \mid 3^{\alpha_k-1} - 3^{\alpha_k-2} \mp 2$, 显然不可能成立。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6 + 10$, 则 $p_k = 2$ 显然矛盾。综上所述方程(1)无解。

(III) 若 $p_k \equiv 7 \pmod{10}$, 根据下面对 α_k 分以下两种情况进行讨论。

(i) 若 $\alpha_k \equiv 1, 3 \pmod{4}$, 由推论 2 得 $\varphi_{10}(p_k^{\alpha_k}) = \frac{\varphi(p_k^{\alpha_k}) \mp 6}{10} = \frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6}{10}$, 若 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则有下面式子成立:

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6}{10} \left(\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6}{10} + 1 \right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6)(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6 + 10)$, 故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6 + 10$ 成立。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6$ 成立, 则有 $p_k = 2$ 或 $p_k = 3$, 与 $p \equiv 7 \pmod{10}$ 矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 6 + 10$, 则 $p_k = 2$ 与 $p \equiv 7 \pmod{10}$ 矛盾。

(ii) 若 $\alpha_k \equiv 2, 4 \pmod{4}$, 由推论 2 得 $\varphi_{10}(p_k^{\alpha_k}) = \frac{\varphi(p_k^{\alpha_k}) \mp 2}{10} = \frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2}{10}$, 若 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则有下面式子成立:

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2}{10} \left(\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2}{10} + 1 \right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2)(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2 + 10)$, 故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2 + 10$ 。若 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2$, 则 $p_k = 2$ 与 p_k 是奇素数矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} \mp 2 + 10$, 则有 $p_k = 2$ 或 $p_k = 3$, 与 $p \equiv 7 \pmod{10}$ 矛盾。故方程(1)无解。

(IV) 若 $p_k \equiv 9 \pmod{10}$, 下面对 α_k 分以下两种情况讨论。

(i) $\alpha_k \equiv 1, 3 \pmod{4}$, 由推论 2 得 $\varphi_{10}(p_k^{\alpha_k}) = \frac{\varphi(p_k^{\alpha_k}) - 8}{10} = \frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8}{10}$, 若 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则有下面式子成立:

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8}{10} \left(\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8}{10} + 1 \right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8)(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 2)$, 故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 2$ 。当 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} - 8$ 时, 有 $p_k = 2$ 与 $p_k \equiv 9 \pmod{10}$ 矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 2$, 则 $p_k = 2$ 与 $p_k \equiv 9 \pmod{10}$ 矛盾。

(ii) 若 $\alpha_k \equiv 2, 4 \pmod{4}$, 由推论 2 得 $\varphi_{10}(p_k^{\alpha_k}) = \frac{\varphi(p_k^{\alpha_k}) + 8}{10} = \frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 8}{10}$, 若 $Z(n^2) = \varphi_{10}(SL(n))$ 成立, 则有下面式子成立:

$$2^{2\alpha} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} \mid \frac{\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 8}{10} \left(\frac{p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 8}{10} + 1 \right)}{2}$$

则有 $p_k^{2\alpha_k} \mid (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 8)(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 18)$, 故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 8$ 或 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 18$ 。当 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 8$ 时, 有 $p_k = 2$ 与 $p_k \equiv 9 \pmod{10}$ 矛盾。故 $p_k^{2\alpha_k} \mid p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1} + 18$, 则有 $p_k = 2$ 或 $p_k = 3$, 与 $p \equiv 9 \pmod{10}$ 矛盾。故方程(1)无解。

4. 结语

本文利用伪 Smarandache 函数、Smarandache LCM 函数以及广义欧拉函数的基本性质, 讨论了数论函数方程 $Z(n) = \varphi_{10}(SL(n))$ 的可解性, 证明了该方程无正整数解。在此基础上, 可进一步讨论数论函数方程 $Z(n) = \varphi_{pq}(SL(n))$ 的可解性, 其中 p, q 是不同的素数。

参考文献

- [1] 柯召, 孙琦. 数论函数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021: 33.
- [2] Lehmer, E. (1938) On Congruences Involving Bernoulli Numbers and the Quotients of Fermat and Wilson. *The Annals of Mathematics*, **39**, 350-360. <https://doi.org/10.2307/1968791>
- [3] Cai, T. (2002) A Congruence Involving the Quotients of Euler and Its Applications (I). *Acta Arithmetica*, **103**, 313-320. <https://doi.org/10.4064/aa103-4-1>
- [4] Cai, T.X., Fu, X.D. and Zhou, X. (2007) A Congruence Involving the Quotients of Euler and Its Applications (II). *Acta Arithmetica*, **130**, 203-214. <https://doi.org/10.4064/aa130-3-1>
- [5] Murthy, A. (2000) Some New Smarandache Sequences, Functions and Partitions. *Smarandache Notions Journal*, **11**, 179-183.
- [6] Sandor, J. (2002) On a Dual of the Pseudo Smarandache Function. *Smarandache Notions Journal*, **13**, 18-23.
- [7] 范盼红. 对 Catalan 数的性质以及关于 Smarandache 函数的几个方程的研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西北大学, 2012.
- [8] 鲁伟阳. 一类包含伪 Smarandache 函数与 Euler 函数的方程[J]. 河南科学, 2013, 31(10): 1597-1599.
- [9] 张利霞, 赵西卿, 郭瑞. 关于数论函数方程 $S(SL(n)) = \varphi_2(n)$ 的可解性[J]. 江汉大学学报(自然科学版), 2016, 44(1): 18-21.
- [10] 朱杰, 廖群英. 方程 $Z(n) = \varphi_e(SL(n))$ 的可解性[J]. 数学进展, 2019, 48(5): 541-554.
- [11] 李改利, 高丽, 戴妍百, 等. 一类包含 Smarandache LCM 函数与广义欧拉函数的方程[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2023, 45(2): 181-187.
- [12] 杨张媛, 赵西卿, 白继文. 两个数论函数方程解的探讨[J]. 江西科学, 2018, 36(4): 579-581.
- [13] 马荣. Smarandache 函数及其相关问题研究[M]: 哥伦布: 教育出版社, 2012.
- [14] 高丽, 赵祈芬. 一类包含伪 Smarandache 函数与欧拉函数方程[J]. 河南科学, 2017, 35(2): 180-183.