

利用定积分求无穷和的极限

杨政懿¹, 丁 锋²

¹江南大学商学院, 江苏 无锡

²江南大学物联网工程学院, 江苏 无锡

收稿日期: 2024年7月5日; 录用日期: 2024年7月29日; 发布日期: 2024年8月6日

摘 要

求无穷和的极限在高等数学的学习中经常遇到。本文阐述了利用定积分求无穷和极限的原理, 并列举了使用定积分求不同类型无穷和极限的方法。

关键词

定积分, 极限, 无穷和

Computing Limits of Infinite Sums Using Definite Integrals

Zhengyi Yang¹, Feng Ding²

¹School of Business, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu

²School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu

Received: Jul. 5th, 2024; accepted: Jul. 29th, 2024; published: Aug. 6th, 2024

Abstract

Computing Limits of Infinite Sums is often encountered in the study of advanced mathematics. This article explains the principle of using definite integrals to find infinite sum limits, and provides some methods of solving different types of infinite sum limits by using definite integrals.

Keywords

Definite Integral, Limit, Infinite Sum



1. 引言

能够准确地求极限高等数学学习中必须具备的能力。在高等数学[1]课程内容中, 我们学习了夹逼定理、洛必达法则等求极限的方法, 这些方法常用于解决一些常见的求极限问题。我们偶尔会碰到求无穷和的极限的问题, 一般来说这些问题都可以通过夹逼定理等常规方法求解。例如, 卢兰[2]讨论了利用两边夹准则求数列极限以及由单调有界原理及其递推公式求数列的极限的方法; 赵士元[3]研究了利用裂项法求数列极限。但是对于一类特殊的无穷和的极限必须寻求特别的方法进行求解。

本文讨论了利用定积分求不同类型的无穷和的极限的方法。通过利用定积分的性质, 从而对一系列不同的无穷和的极限进行探究与比较, 还包含从求解方法当中提炼出来的引申与思考。

2. 定积分与无穷和的联系

首先回顾一下定积分的定义[4]。设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 在 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$, 各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$ 作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $\Delta x_i f(\xi_i) (i=1, 2, \cdots, n)$, 并作出这些乘积的和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 这乘积的极限总存在, 且与封闭区间 $[a, b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关, 那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间上的定积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

从图像方面来理解[5], 定积分就是把直角坐标系上的函数的图像用平行于 y 轴的直线把其分割成无数个矩形, 然后把某个区间 $[a, b]$ 上的矩形累加起来所得到的就是这个函数图像在区间 $[a, b]$ 的面积。定积分我们可以理解为把图像无限细分再累加起来。

我们在定积分的定义中观察到了无穷和的极限的使用, 下面计算各种类型无穷和的极限。

3. 需要变形的无穷和的极限

一些无穷和的极限不能直观的看出来如何化成定积分来计算, 因此我们需要对其进行合适的变形。计算下面的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

该极限并不可以直观地用定积分求解, 观察可知在分母上我们可以提一个 n 出来, 这样该无穷和的极限就可以很直接使用定积分来求, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}},$$

其中 $x = \frac{i}{n}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$, 化为定积分的形式得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx,$$

由上式计算可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2.$$

4. 根式无穷和的极限

求根式的无穷和的极限是常见的问题之一。求 $n \rightarrow \infty$ 时下列无穷和的极限:

$$1) A = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^3}}.$$

分析题目可知, 可以通过变形使该和式的极限可以直观的使用定积分的方法求解, 即

$$A = \frac{1}{n} \left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right].$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 将和式的极限转化为被积函数的区间为 $[0,1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}.$$

从和式 A 我们可以进一步推广为和式 B 。

$$2) B = \frac{1}{n} \left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right].$$

和式 B 与和式 A 求法相似, 观察该和式我们可知当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 我们将和式的极限转化为被积函数的区间为 $[0,1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

对于和式 A 我们还可以推广到和式 C 。

$$3) C = \frac{1}{n^2} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \frac{2}{n^2} \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2} \sqrt{1+\frac{n}{n}}.$$

首先提出一个 $\frac{1}{n}$ 使和式 C 变形为

$$C = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \frac{2}{n} \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{n}{n} \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 由此可知需要将和式的极限转化为被积函数的区间为 $[0, 1]$ 的定积分并进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 x \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{15} (3x-2)(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{15} - 4.$$

将和式 C 进一步推广到和式 D 。

$$4) D = \frac{1}{n^3} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{2}{n^3} \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{n}{n^3} \sqrt{1 + \frac{n}{n}}.$$

仍然提一个 $\frac{1}{n}$ 出来使和式 D 变形为

$$D = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{2}{n^2} \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2} \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

故当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 将和式的极限转化为被积函数的区间为 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n^2} \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{105} (15x^2 - 12x + 8)(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{44\sqrt{2} - 16}{105}.$$

下面来看根式为分数中的分母时的情况。

$$5) E = \frac{1}{\sqrt{n+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+3^2}}.$$

提出一个 $\frac{1}{n}$ 将和式 E 变形为

$$E = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right].$$

观察和式 E , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 我们将和式的极限转化为被积函数的区间为 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

和式 E 可再进一步推广为和式 F 。

$$6) F = \frac{1}{n^2} \left[\frac{1^2}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n^2}} \right].$$

仍然提出一个 $\frac{1}{n}$ 将和式 F 变形

$$F = \frac{1}{n} \left[\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right].$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 由此可知需要将和式的极限转化为被积函数的区间为 $[0, 1]$ 的定积分并进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1+x^2}| \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}.$$

5. 求三角函数类无穷和的极限

求 $n \rightarrow \infty$ 时下列三角函数类无穷和的极限。

$$1) A = \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{2n} \right).$$

提出一个 $\frac{2}{\pi}$, 使和式 A 变形为

$$A = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} \left(\sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{2n} \right).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\pi}{2n} \rightarrow 0$, $\frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$, 该和式转化为定积分后, 被积函数的区间为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$, 进一步计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{2}{\pi} [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

和式 A 可进一步推广到和式 B :

$$2) B = \frac{1}{n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2n} + \sin^2 \frac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n} + \sin^2 \frac{n\pi}{2n} \right).$$

和式 B 在和式 A 的基础上给三角函数加上了平方, 我们仍然提出一个 $\frac{2}{\pi}$, 原式可化为

$$B = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2n} + \sin^2 \frac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n} + \sin^2 \frac{n\pi}{2n} \right).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\pi}{2n} \rightarrow 0$, $\frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$, 该和式转化为定积分后, 被积函数的区间为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$, 故进一步计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n \sin^2 \frac{i\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

再如:

$$3) C = \frac{\pi}{4n} \left(\tan \frac{\pi}{4n} + \tan \frac{2\pi}{4n} + \cdots + \tan \frac{n\pi}{4n} \right).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\pi}{4n} \rightarrow 0$, $\frac{n\pi}{4n} = \frac{\pi}{4}$, 由此我们可以确定该和式的极限转化为定积分后, 被积函数的区间为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\Delta x = \frac{\pi}{4n}$, 和式 C 等价于

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n},$$

故进一步计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \left[-\ln |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

和式 C 可进一步推广到和式 D 。

$$4) D = \frac{\pi}{4n} \left(\tan^2 \frac{\pi}{4n} + \tan^2 \frac{2\pi}{4n} + \cdots + \tan^2 \frac{n\pi}{4n} \right).$$

该和式的极限转化为定积分后, 被积区间与和式 C 一致

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4n} \tan^2 \frac{i\pi}{4n} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

将和式 D 进一步推广:

$$5) E = \frac{\pi}{4n} \left(\sec \frac{\pi}{4n} \tan \frac{\pi}{4n} + \sec \frac{2\pi}{4n} \tan \frac{2\pi}{4n} + \cdots + \sec \frac{n\pi}{4n} \tan \frac{n\pi}{4n} \right).$$

该和式将两种三角函数进行结合, 将和式的极限转化为定积分后可知函数的被积区间为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$\Delta x = \frac{\pi}{4n}$, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4n} \sec \frac{i\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \cos x dx = \left[\sec x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

下面来分析如何求 $n \rightarrow \infty$ 时三角函数与根式结合的综合和式的极限。

$$6) F = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\cos \frac{2\pi}{n}}{n^2}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\cos \frac{n\pi}{n}}{n^2}}.$$

首先需要提出一个 $\frac{1}{n}$ 将和式 F 进行变形得

$$F = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{i\pi}{n}} \right),$$

观察到 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n\pi}{n} = \pi$, 则可将无穷和的极限转化为求函数被积区间在 $[0, \pi]$ 的定积分, 进一步计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

本方法也可由余弦函数推广到正弦函数。

有的和式不能很直接的转化为无穷和的形式, 此时我们不妨考虑放缩, 使放缩后的和式处于一个相对合理的范围, 再通过夹逼定理的使用, 我们便可以求出无穷和的极限。求 $n \rightarrow \infty$ 时下列无穷和的极限。

$$S = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}.$$

一方面, 我们先将题干中的和式往较大的和式放缩

$$S \leq \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) = R.$$

我们将放缩后的和式在 $n \rightarrow \infty$ 时的极限求出来

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}.$$

另一方面, 我们将题干中的和式往较小的和式放缩

$$S \geq \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) = T.$$

我们继续将放缩后的和式在 $n \rightarrow \infty$ 时的极限求出来

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

根据上述计算结果再由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right] = \frac{2}{\pi}.$$

6. 求反三角函数类无穷和的极限

既然我们可以使用定积分求三角函数类无穷和的极限, 那么我们可不可以使用这种方法求反三角函数类无穷和的极限呢? 答案是肯定的. 对于不同类型的反三角函数类无穷和, 我们都可以使用定积分求解, 求 $n \rightarrow \infty$ 时下列无穷和的极限:

$$1) A = \frac{1}{n} \arcsin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \arcsin \frac{2}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \arcsin \frac{n}{n}.$$

对于该和式, 观察到 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 则本题可转化为求函数在区间 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \arcsin \frac{i}{n} = \int_0^1 \arcsin x dx = \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

和式 A 可进一步推广到和式 B .

$$2) B = \frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \arccos \frac{2}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \arccos \frac{n}{n}.$$

对于该和式, 观察到 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 则本题可转化为求函数在区间 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \arccos \frac{i}{n} = \int_0^1 \arccos x dx = \left[x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = 1.$$

再如:

$$3) C = \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n} + \arctan \frac{2}{n} + \cdots + \arctan \frac{n}{n}.$$

对于该和式, 观察到 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 则本题可转化为求函数在区间 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \arctan \frac{i}{n} = \int_0^1 \arctan x dx = \left[x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

7. 求对数类无穷和的极限

求下列 $n \rightarrow \infty$ 无穷和的极限。

$$1) A = \frac{1}{n} [\ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(n+n) - n \ln n].$$

首先将和式 A 进行变形为

$$A = \frac{1}{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]$$

观察到 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 则求该和式的极限可转化为求函数在区间 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = [x \ln x - x]_0^1 = 2 \ln 2 - 2.$$

和式 A 可进一步推广到和式 C 。

$$2) C = \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right].$$

观察该和式, 我们可知其等价于

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right),$$

观察到 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 则求该和式的极限可转化为求函数在区间 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = \int_0^1 (1+x) \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

当对数为分数中的分子时如下。

$$3) D = \frac{1}{(2n+1) \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{(2n+2) \ln\left(2 + \frac{2}{n}\right)} + \cdots + \frac{1}{(2n+n) \ln\left(2 + \frac{n}{n}\right)}.$$

原式提出一个 $\frac{1}{n}$ 后得到

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(2 + \frac{i}{n}\right) \ln\left(2 + \frac{i}{n}\right)},$$

观察到 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 则求该和式的极限可转化为求函数在区间 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(2 + \frac{i}{n}\right) \ln\left(2 + \frac{i}{n}\right)} = \int_0^1 \frac{1}{(2+x) \ln(2+x)} dx = [\ln |\ln x|]_2^3 = \ln \ln 3 - \ln \ln 2.$$

8. 求指数类无穷和的极限

求下列无穷和的极限

$$1) A = \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} \right).$$

分析题目可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 由此我们可以确定该和式的极限使用定积分的方法求解时, 被积函数的区间为 $[0, 1]$, 进一步计算得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

和式 A 可进一步推广到和式 B :

$$2) B = \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}} + \frac{2}{n^2} e^{\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2} e^{\frac{n}{n}}.$$

提出一个 $\frac{1}{n}$ 将和式 B 变形得

$$B = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} + \frac{2}{n} e^{\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{n}{n} e^{\frac{n}{n}} \right).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 故求该和式的极限可转化为求函数在区间 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} + \frac{2}{n} e^{\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{n}{n} e^{\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} e^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 x e^x dx = 1.$$

将三角函数与指数函数进行结合。

$$3) C = \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} \cdot \sin \frac{1}{n} + e^{\frac{2}{n}} \cdot \sin \frac{2}{n} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} \cdot \sin \frac{n}{n} \right).$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{n}{n} = 1$, 故求该和式的极限可转化为求函数在区间 $[0, 1]$ 的定积分, 进一步计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} \cdot \sin \frac{i}{n} = \int_0^1 e^x \cdot \sin x dx = \left[\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) \right]_0^1 = \frac{e}{2} (\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}.$$

和式 C 可进一步推广到含不同类三角函数的和式, 此类和式的极限求法大致相同, 不过多赘述。

9. 结语

在求解某类特殊的无穷和的极限的过程中, 我们可以发现求这类求无穷和的极限都有固定的思路: 首先观察所求和式的形式, 明确是否能够使用定积分求极限, 然后提炼有效信息, 再转化为定积分的形式从而求出无穷和的极限。

对于一些特殊无穷和的极限我们还需要使用放缩以及夹逼定理等方法进行求解, 这些方法的使用需要根据具体情况具体分析。一定的计算能力是处理这类题目所必需的素养。

无穷项和的极限在科学和工程经常会遇到。对于一些存在规律的某些和的极限, 可能寻求到一定方法或特殊技巧进行求解, 而有些尽管看起来有规律的某些无穷和的极限, 实际上是机器困难的, 都是科学计算领域的难题。专著[6]-[11]中研究了一些极限的和, 在其思考题和后记中给出了一些无穷和的极限算式。例如, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 下列无穷和的极限存在,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$T_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

即 $\lim S_n = \gamma = 0.577215\cdots$, $\lim T_n = \ln 2 = 0.693147\cdots$

而给出了下列无穷和的极限猜想:

$$\lim P_n = \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n-1} + \frac{\alpha^2}{n-2} + \cdots + \frac{\alpha^{n-2}}{2} + \frac{\alpha^{n-1}}{1} = 0, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

下列无穷和恒等式成立:

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

读者可以研究 $n \rightarrow \infty$ 时下列函数的极限[6]-[11]:

$$(1) F(n, \beta) = \frac{1}{n} + \frac{2\beta}{n-1} + \frac{3\beta^2}{n-2} + \cdots + \frac{(t-2)\beta^{t-2}}{2} + \frac{(t-1)\beta^{t-1}}{1}, \quad 0 \leq \beta < 1;$$

$$(2) R(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)2} + \frac{1}{n};$$

$$(3) K(n, \varepsilon) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^\varepsilon(n-1)} + \frac{1}{3^\varepsilon(n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^\varepsilon 2} + \frac{1}{n^\varepsilon};$$

$$(4) G(n, \varepsilon) = \frac{1}{n} + \frac{1}{(\ln 2)^\varepsilon(n-1)} + \frac{1}{(\ln 3)^\varepsilon(n-2)} + \cdots + \frac{1}{[\ln(n-1)]^\varepsilon 2} + \frac{1}{(\ln n)^\varepsilon}.$$

本文求无穷和的极限方法可以推广到一些特殊矩阵和行列式的无穷和的极限[12]-[14]。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学上册[M]. 第7版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [2] 卢兰. 微积分中求数列极限的几种方法[J]. 数学学习与研究, 2021(30): 120-121.
- [3] 赵士元. 数列及函数极限的几种特殊求法[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2023, 41(5): 177-180.
- [4] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程: 第二卷[M]. 第8版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [5] 菲赫金哥尔茨. 数学分析原理: 第一卷[M]. 第9版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [6] 丁锋. 现代控制理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2018.
- [7] 丁锋. 系统辨识新论[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [8] 丁锋. 系统辨识——辨识方法性能分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [9] 丁锋. 系统辨识——辅助模型辨识思想与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [10] 丁锋. 系统辨识——迭代搜索原理与辨识方法[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [11] 丁锋. 系统辨识——多新息辨识理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [12] Ding, F. (2010) Transformations between Some Special Matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 2676-2695. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.01.036>
- [13] Ding, F. (2013) Computation of Matrix Exponentials of Special Matrices. *Applied Mathematics and Computation*, **223**, 311-326. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.07.079>
- [14] 丁胤帆. 特殊矩阵行列式的计算[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 716-730. <https://doi.org/10.12677/aam.2019.84082>